NARRATIVAS DE AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: aprendizagens docentes no contexto de *Lesson Study* Híbrido

Ana Leticia Losano
Thaís de Oliveira Ferrasso
Cristina Meyer
(Organizadoras)

Biblioteca do Educador
Coleção SBEM
Volume 18

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

NARRATIVAS DE AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: aprendizagens docentes no contexto de *Lesson Study* Híbrido

Organizadoras
Ana Leticia Losano
Thaís de Oliveira Ferrasso
Cristina Meyer

Autoras
Ana Leticia Losano
Ana Paula Rodrigues Magalhães de Barros
Cláudia Rodrigues de Andrade
Cristina Meyer
Juliet Sarkis
Maria Aparecida de Jesus Salgado
Thaís de Oliveira Ferrasso
Prefácio: Dario Fiorentini
Posfácio: Eliane Matesco Cristovão

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Copyright © 2021 Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Todos os direitos reservados

Coordenação Editorial
Marcelo Almeida Bairral
Geraldo Eustáquio Moreira
Vanessa Franco Neto

Conselho Editorial Nacional - CEN
Alex Jordane de Oliveira
André Luis Trevisan Antonio
Carlos Fonseca Pontes
Carlos Augusto Aguilar Júnior
Clélia Maria Ignatius Nogueira
David Antonio da Costa
Fernanda Malinosky Coelho da Rosa
Gilda Lisbôa Guimarães
Janete Bolite Frant
João Alberto da Silva
Jonei Cerqueira Barbosa
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Milton Rosa
Paulo Afonso Lopes da Silva
Romaro Antonio Silva
Sintria Labres Lautert
Suzi Samá Pinto

Publicação
Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM

Projeto Gráfico, Diagramação e Capa
Janaína Mendes Pereira da Silva

Imagens da Capa
https://www.freepik.com/

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Narrativas de aulas de matemática no ensino médio: aprendizagens docentes no contexto de Lesson Study Híbrido [livro eletrônico] / Ana Leticia Losano, Thaís de Oliveira Ferrasso, Cristina Meyer (organizadoras). -- Brasília : SBEM, 2021. -- (Coleção SBEM ; 18)
PDF

Vários autores.
ISBN 978-65-87305-04-2

1. Educação 2. Educação matemática 3. Ensino híbrido 4. Ensino médio 5. Matemática - Estudo e ensino 6. Narrativas I. Losano, Ana Leticia. II. Losano, Ana Leticia. III. Ferrasso, Thaís de Oliveira. IV. Meyer, Cristina. V. Série.

21-68506 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Professores de matemática : Prática de ensino : Educação matemática 510.7

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA -SBEM

DIRETORIA NACIONAL EXECUTIVA -DNE

Marcelo Almeida Bairral (UFRRJ)
Presidente
Fátima Peres Zago de Oliveira (IFC - Campus Rio do Sul)
Vice-Presidente
Geraldo Eustáquio Moreira (UnB)
Primeiro Secretário
Vanessa Franco Neto (UFMS)
Segunda Secretária
Maurício Rosa (UFRGS)
Terceiro Secretário
Leandro de Oliveira Souza (UFU)
Primeiro Tesoureiro
Ana Virgínia de Almeida Luna (UEFS)
Segunda Tesoureira

Conselho Nacional Fiscal -CNF

Antonio Carlos de Souza (UNESP - Campus de Guaratinguetá)
Everton José Goldoni Estevam (UNESPAR - Campus de Campo Mourão)
Verônica Gitirana (UFPE)
Rhômulo Oliveira Menezes (SEDUC-PA / UFPA)

Comissão de Avaliação -CA

Geraldo Eustáquio Moreira (UnB, DNE, Presidente)
Jonei Cerqueira Barbosa (UFBA, CEN)
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino (UEL, CEN)
Suzi Samá (FURG, CEN)
Vanessa Franco Neto (UFMS, DNE)

Secretária da SBEM

Larissa Martins Guedes

Obra submetida e aprovada no Edital SBEM-DNE 03/2020.

Caminante, son tus huellas
el camino y nada más;
Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.
Al andar se hace el camino,
y al volver la vista atrás
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar.
Caminante, no hay camino
sino estelas en la mar.
ANTONIO MACHADO

Caminhante, são tuas pegadas
o caminho e nada mais;
Caminhante, não há caminho,
o caminho faz-se ao andar.
Ao andar se faz o caminho,
e ao voltar o olhar para trás
vê-se a senda que nunca
se voltará a pisar.
Caminhante não há caminho
somente rastos no mar
ANTONIO MACHADO

AGRADECIMENTOS

A nossa gratidão a todos os alunos que participaram da implementação das tarefas elaboradas neste projeto, abrindo-nos gentilmente as portas de seus universos particulares de aprendizes, para que buscássemos compreender melhor como se aprende e ensina matemática.

Agradecemos às Equipes Gestoras e aos colegas professores do Instituto Federal do Estado de São Paulo - *Campus* São João da Boa Vista e *Campus* Hortolândia; da Escola Estadual Patriarca da Independência; e da Escola Estadual Professora Maria do Carmo Ricci Von Zuben, pelas parcerias, ao nos acolher nas suas escolas.

Agradecemos a todos os membros do Grupo de Sábado (GdS), que após muitas leituras e exaustivos debates, enriqueceram as versões destas narrativas com suas críticas, sugestões e contribuições.

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo financiamento do projeto *Lesson Study: Conhecimento e desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática*, que deu origem a esta publicação.

FAPESP

GdS
Grupo de Sábado

Esta obra foi parcialmente financiada com recursos FAPESP.
Linha Ensino Público -Processo: 2016/12877-2.

SUMÁRIO

PREFÁCIO **9**
Dario Fiorentini

APRESENTAÇÃO **12**

PARTE I: Ensino de Trigonometria

LESSON STUDY HÍBRIDO NO ENSINO MÉDIO: UMA HISTÓRIA DE COLABORAÇÃO E APRENDIZAGEM DOCENTE **16**
Ana Leticia Losano

CONSTRUÇÃO DE UMA TAREFA SOBRE TRIGONOMETRIA: A COMPLEXIDADE DE FAZER ESCOLHAS... A DIFICULDADE DE FAZÊ-LAS SOZINHA! **30**
Thaís de Oliveira Ferrasso
Cristina Meyer

DE PROFESSORA A PESQUISADORA: INVESTIGANDO A COMUNICAÇÃO NA SALA DE AULA **47**
Maria Aparecida de Jesus Salgado

REINVENÇÃO DE UMA PROFESSORA DE MATEMÁTICA: PRIMEIRAS EXPERIÊNCIAS COM TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS **63**
Juliet Sarkis

APÊNDICE 1 ..... **73**

PARTE II: Ensino das Funções

DA SALA DE AULA PARA UM PASSEIO NA ESCOLA: INTRODUZINDO O ESTUDO DE FUNÇÃO POR MEIO DE UMA TAREFA EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA **78**
Ana Paula Rodrigues Magalhães de Barros
Ana Leticia Losano

E O GRÁFICO DO CRESCIMENTO SURPREENDEU: APRENDIZAGENS DOCENTES SOBRE A DERIVADA, VIVENCIADAS AO EXPLORAR UMA TAREFA INVESTIGATIVA **94**
Maria Aparecida de Jesus Salgado

ANO TEM ALTURA? CORES TRAZEM SENTIDO? ESTUDO DA LINGUAGEM GRÁFICA PRODUZIDA POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO NO CONTEXTO DE LESSON STUDY HÍBRIDO **104**
Thaís de Oliveira Ferrasso

APÊNDICE 2 ..... **117**

PARTE III: Educação Financeira

O QUE EU POSSO APRENDER AO OUVIR UMA REUNIÃO?: DIÁLOGOS ASSÍNCRONOS SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL E EDUCAÇÃO FINANCEIRA ... **120**
Cláudia Rodrigues de Andrade

"É SÓ PEGAR COM O AGIOTA!": NEGOCIANDO SIGNIFICADOS VINCULADOS À EDUCAÇÃO FINANCEIRA **136**
Juliet Sarkis

APÊNDICE 3 ..... **146**

POSFÁCIO **151**
Eliane Matesco Cristovão

SOBRE OS AUTORES **159**

PREFÁCIO

Dario Fiorentini

Foi com imensa alegria e satisfação que recebi em minhas mãos o livro finalizado pelo subgrupo do Ensino Médio (sEM), tendo a tarefa de prefaciá-lo. Na condição de coordenador geral do Grupo de Sábado (GdS) e do projeto financiado pela FAPESP, linha Ensino Público, que deu origem a este sétimo livro produzido pelo Grupo, em seus 21 anos de existência, fiquei assaz emocionado e impressionado com a qualidade e a relevância do resultado conseguido.

O Grupo de Sábado tem-se caracterizado, ao longo dos anos, como um grupo aberto, onde a saída e a entrada de novos membros não são vistas como problemáticas. Ao contrário, aprendemos a ver essa mobilidade como uma oportunidade para o grupo renovar-se continuamente. Isso porque, quando um novo membro ingressa no grupo, ele não apenas se apropria de um modo de ser e projetar-se profissionalmente, como professor que problematiza e investiga sua prática de ensinaraprender, mas também contribui, trazendo novas ideias e possibilidades de estudo e trabalho para o grupo. Entretanto, essa não foi a principal razão pela qual convidei Prof.a Dr.a Ana Leticia Losano, da Universidade Nacional de Córdoba (Argentina), a fazer parte do Grupo, com a função de liderar e coordenar o sEM, quando o projeto financiado pela Fapesp teve efetivamente início, em 2017. A escolha deve-se, também, ao fato de Leticia ter tido uma experiência exitosa de formação de professores em serviço no Ensino Secundário argentino, equivalente ao nosso Ensino Médio, tendo desenvolvido um trabalho colaborativo e investigativo entre universidade e escola, inspirado, em parte, no GdS.

O principal diferencial deste livro, em relação aos anteriores, reside no fato de este ser totalmente voltado ao Ensino Médio, nível de ensino ainda muito carente de experiências relevantes de inovação curricular e didático-pedagógica no âmbito do ensino da matemática.

Por outro lado, este livro guarda semelhança com os anteriores em pelo menos dois aspectos relativos ao processo e ao lugar do desenvolvimento profissional de professores. Primeiramente, destaco que o livro é fruto de um projeto de formação em serviço que não é centrado nem na Universidade, considerada o primeiro espaço de formação do professor, nem na escola, considerada o segundo espaço da formação profissional docente. Na verdade, trata-se de um terceiro espaço formativo, como descreve Zeichner (2010)[1] – um espaço híbrido ou fronteiriço (FIORENTINI, 2013)[2], constituído horizontalmente por

[1] ZEICHNER, K. Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades. Educação, v. 35, n. 3, p. 479-504, 2010.

[2] FIORENTINI, D. Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities. Sisyphus -

acadêmicos da universidade e profissionais da escola, que têm como objeto de estudo a problematização e a investigação conjunta e colaborativa, a prática de ensinar e aprender nas escolas. Nesse sentido, cabe destacar o fato de o GdS ter percebido, no processo internacionalmente conhecido como Lesson Study ou Estudo da Aula, uma perspectiva que contempla o princípio fundamental do grupo de tomar como objeto central de estudo a própria aula. Mas, para não abrir mão da investigação colaborativa entre acadêmicos da universidade e professores da escola, desenvolveu um *Lesson Study* Híbrido (LSH).

Um segundo aspecto que guarda semelhança com as publicações anteriores é o uso de narrativas escritas, como destacam os organizadores na "Apresentação" do livro e, principalmente, Leticia Losano, no capítulo introdutório. Além de as narrativas serem "ferramentas para refletir e analisar a própria prática", eu gostaria de ressaltar que elas servem, sobretudo, para o professor pôr em evidência e socializar, para si e para outros professores, suas aprendizagens (processos de aprender) e seus aprendizados (lições e conhecimentos produzidos) como professor.

São principalmente essas aprendizagens e esses aprendizados que os leitores, especialmente os educadores matemáticos, encontrarão nas oito análises narrativas que compõem a principal parte deste livro e que dizem respeito a três tópicos especiais da matemática escolar do Ensino de Médio: Funções; Trigonometria; e Educação Financeira. São análises narrativas que evidenciam tanto os sucessos como as dificuldades que perpassam a prática docente e envolvem a escolha coletiva, pelo sEM, de um tema comum para ensinar e o desafio da elaboração de tarefas realmente exploratório-investigativas. Tarefas que sejam capazes de oportunizar um ambiente culturalmente relevante da atividade matemática, com potencial de engajar os alunos, produzindo e negociando significados sobre o que aprendem e a forma como aprendem, estabelecendo conexões não apenas com a matemática acadêmica, mas também com as práticas socioculturais dos estudantes, como nos mostram principalmente Thaís e Cristina, Juliet, Cláudia, Ana Paula e Leticia.

Análises narrativas – como as de Salgado, Juliet e Thaís – que põem em evidência a comunicação e a negociação de significados em sala de aula, as diferentes linguagens dos alunos e a gestão da aprendizagem discente.

Para conhecer os bastidores da história de estudo, investigação e escrita dos professores que construíram esta obra, não deixem de ler o capítulo introdutório de Leticia Losano. Este capítulo traz revelações e contribuições importantes sobre o processo formativo e investigativo experienciado pelo subgrupo do Ensino Médio e que resultou na produção desta obra. Embora tenhamos, no projeto inicial, previstas seis fases alinhadas ao modelo de desenvolvimento profissional (MDP-GdS) construído historicamente pelo GdS, Leticia sistematizou o processo de LSH desenvolvido pelo sEM, tendo identificado e descrito três grandes fases do LSH: Problematização e Planejamento; Implementação e Observação; e Reflexão e Sistematização. Além disso, descreve e justifica o hibridismo do processo de LS concebido pelo GdS, sendo este uma síntese entre o modelo internacional de LS e o MDP-GdS.

Por último, gostaria de destacar que os organizadores do livro foram muito felizes

Journal of Education, v. 1, p. 152-181, 2013.

em convidar a professora Eliane Matesco Cristovão (UNIFEI) para escrever o Posfácio, tendo ela feito uma bela viagem ao seu passado como membro do GdS e também como ex-professora do Ensino Médio, para estabelecer um rico diálogo entre suas memórias de participação no grupo com as histórias e os aprendizados narrados por cada professora autora do livro.

Trata-se, portanto, de uma obra que precisa ser lida e discutida por todos os educadores matemáticos, tanto por acadêmicos da universidade (futuros professores, mestrandos, doutorandos e formadores de professores) como por professores que ensinam matemática nas escolas, sobretudo no Ensino Médio.

Boa leitura a todos!

Campinas, agosto de 2020.

APRESENTAÇÃO

Sejam bem-vindos, prezados leitores, ao sétimo livro do Grupo de Sábado (GdS). *Narrativas de aulas de matemática no Ensino Médio: aprendizagens docentes no contexto de Lesson Study Híbrido* reúne narrativas produzidas por professores em exercício no Ensino Médio que participam dessa comunidade de aprendizagem docente. A escrita de narrativas consideradas como ferramentas para refletir e analisar a própria prática tem sido um traço característico do GdS desde sua criação em 1999. Mais de 20 anos se passaram e, ao longo de todo esse período, os professores de todos os níveis educativos temos aprendido muito, ao ler essas histórias que vivamente capturam episódios de sala de aula e os entretecem com profundas reflexões sobre o saber e o fazer docente em matemática. Estamos cientes, também, de que não são só os leitores os que aprendem com as leituras. Ao relatar e representar acontecimentos da sua prática, refletindo em torno deles para extrair saberes e compreensões para si e para sua comunidade profissional, os autores, provavelmente, sejam os que mais aprenderam.

Ao longo da sua existência, o GdS tem transitado por diversas fases, explorando, transformando e criando caminhos, oportunidades e projetos orientados a promover o desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Nessa direção, as narrativas que compõem este livro possuem um selo particular: elas foram produzidas no marco do projeto *Lesson Study: Conhecimento e desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática*, desenvolvido pelo grupo entre 2017 e 2019. Nesse projeto, os membros do GdS assumimos o desafio de nos apropriar das contribuições ou das atividades características do processo de formação-pesquisa internacionalmente conhecido como *Lesson Study* (ou Estudo de Aula) para melhorar nosso trabalho. Visto que tal processo não se constituiu em uma simples adaptação ou transposição direta, o grupo cunhou o termo *Lesson Study* Híbrido. Com essa expressão nos referimos a um processo de formação-pesquisa que assume características cíclicas, envolvendo o planejamento, a implementação e a reflexão e sistematização de uma tarefa para sala de aula. Particularmente, as narrativas foram produzidas por um conjunto de professores, formadores, pesquisadores e pós-graduandos que participaram do projeto, tendo especial interesse em explorar o ensino e a aprendizagem da matemática no Ensino Médio.

As narrativas seguiram um extenso caminho até chegar a sua forma final, que se apresenta neste livro. Cada uma delas foi lida e revisada criticamente por, pelo menos, sete membros do GdS, que, ao longo do processo, se constituíram em leitores privilegiados, procurando, com seus comentários e sugestões, aprofundar as reflexões contidas nas narrativas, assim como clarear pontos confusos. Estando fortemente ancorado em um

trabalho colaborativo, podemos dizer que este livro é resultado do esforço de todo o GdS.

Neste sétimo livro estão sendo publicados nove trabalhos, oito deles produzidos por professores do Ensino Médio dentro do projeto. No capítulo introdutório, intitulado "*Lesson Study* Híbrido no Ensino Médio: uma história de colaboração e aprendizagem docente", Ana Leticia Losano narra o processo de trabalho que deu origem ao presente livro. Para tal fim, analisa o processo de *Lesson Study* Híbrido desenvolvido pelo GdS, descreve as principais atividades em cada um dos ciclos de *Lesson Study* Híbrido – incluindo uma descrição rápida das tarefas para sala de aula que estiveram no centro de cada um deles – e finaliza, relatando o processo de escrita das narrativas. Embora cada capítulo do livro possa ser lido de maneira independente, recomendamos a leitura do capítulo introdutório, para que o leitor possa compreender as ideias, os princípios e as dinâmicas que orientaram o trabalho dos autores.

Os oito capítulos seguintes trazem análises narrativas das experiências vividas ao longo dos três ciclos de *Lesson Study* Híbrido desenvolvidos no marco do projeto. Eles foram agrupados em três partes, atendendo à temática de ensino abordada: Trigonometria, Funções e Educação Financeira. As narrativas que compõem cada parte do livro giram em torno de uma mesma tarefa para sala de aula, cujo enunciado o leitor encontrará, na íntegra, em um Apêndice ao final de cada parte. Queremos ressaltar que esses enunciados se apresentam tal como foram implementados. Ao dia de hoje, nós já temos um conjunto de sugestões para melhorá-las; no final das contas, é no processo de ensinar e de refletir sobre nosso ensino que nos transformamos e transformamos nossa prática. Nessa direção, convidamos o leitor a imaginar outras modificações. Assim, longe de pretender servir como tarefas "prontas" para serem aplicadas por qualquer professor em qualquer sala de aula, o principal objetivo de os enunciados estarem incluídos no livro é que o leitor possa compreender detalhadamente o que foi feito na sala de aula, servindo como alicerce para as interpretações dos episódios narrados.

Parte I: Ensino da Trigonometria

A primeira parte do livro é constituída por três capítulos, nos quais os autores discutem e refletem sobre o ensino e a aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo, contando as suas histórias.

O primeiro capítulo tem por título "Construção de uma tarefa sobre trigonometria: a complexidade de fazer escolhas... a dificuldade de fazê-las sozinha!". Nele, Thaís de Oliveira Ferrasso e Cristina Meyer nos contam sobre o trabalho de planejamento e elaboração da tarefa que foi implementada no primeiro ciclo de *Lesson Study* Híbrido dentro do projeto. Neste relato encontramos suas reflexões e aprendizagens sobre a complexidade do trabalho docente de construir tarefas, e os dilemas e as descobertas experimentados, ao fazê-lo de modo individual e colaborativo.

O tema do segundo capítulo é o desafio da comunicação em sala de aula. Por meio da narrativa que tem por título "De professora a pesquisadora: investigando a comunicação na sala de aula", Maria Aparecida de Jesus Salgado apresenta uma reflexão sobre sua própria forma de comunicar-se em sala de aula quando implementa uma tarefa que constitui um

Cenário para Investigação. Salgado, como é conhecida entre os amigos, analisa diálogos produzidos por suas intervenções, ao implementar a tarefa de trigonometria em sua sala de aula.

Fechando esta primeira parte do livro, Juliet Sarkis nos oferece, no terceiro capítulo, a narrativa "Reinvenção de uma professora de matemática: Primeiras experiências com tarefas exploratório-investigativas". Tomando como referências a Teoria Social da Aprendizagem e as Comunidades de Prática, Juliet narra e reflete sobre sua trajetória de participação no projeto. Analisando dois momentos marcantes de suas primeiras experiências com tarefas exploratório-investigativas, ela traz reflexões sobre os movimentos de mudança nas suas práticas de ensinar e aprender matemática e nos seus modos de participar na comunidade do GdS.

Parte II: Ensino das Funções

A segunda parte do livro é constituída por três capítulos, nos quais os autores se debruçam sobre diferentes aspectos do ensino-aprendizagem das funções.

O primeiro capítulo desta parte, com o título "Da sala de aula para um passeio na escola: introduzindo o estudo de função por meio de uma tarefa exploratório-investigativa", é uma narrativa que difere dos outros capítulos deste livro porque a tarefa foi desenvolvida na fase piloto do projeto. Naquele momento, os membros do GdS estavam conhecendo e experimentando as fases do *Lesson Study*. As autoras, Ana Paula Rodrigues Magalhães de Barros e Ana Leticia Losano, narram o desenvolvimento de uma atividade orientada a introduzir o conceito de função por meio de uma tarefa onde os alunos estudam o trajeto que comumente percorrem durante os 15 minutos de intervalo entre as aulas. Por ter sido desenvolvida nas fases preliminares do projeto, o enunciado desta tarefa está contido no corpo do texto, e não nos apêndices, como nas outras narrativas.

No segundo capítulo desta parte, Maria Aparecida de Jesus Salgado narra as suas aprendizagens como professora de matemática, ao explorar, colaborativamente, uma tarefa para sala de aula. A sua narrativa, intitulada "E o gráfico do crescimento surpreendeu: Aprendizagens docentes sobre a derivada vivenciados ao explorar uma tarefa investigativa", destaca os conhecimentos mobilizados pelas professoras na fase de planejamento, principalmente aqueles que se referem ao significado associado à curva que representa um fenômeno. Com as suas reflexões, a autora revela como esse processo conseguiu ampliar o olhar das professoras para o que aparentemente parecia uma tarefa simples.

Em "Ano tem altura? Cores trazem sentido? Estudo da linguagem gráfica produzida por alunos do Ensino Médio no contexto de Lesson Study Híbrido", Thaís de Oliveira Ferrasso analisa e interpreta dois gráficos, produzidos pelos alunos, para representar a variação da sua altura ao longo da vida. A partir desses registros, a autora desenvolve o trabalho reflexivo de evidenciar quais foram os conhecimentos matemáticos mobilizados pelos alunos durante a construção do gráfico.

Parte III: Educação Financeira

A terceira parte do livro é constituída por dois capítulos, nos quais os autores têm a preocupação de analisar as experiências vividas ao longo do projeto com o ensino e a aprendizagem da Educação Financeira.

No primeiro capítulo desta terceira parte, intitulado "O que eu posso aprender, ao ouvir uma reunião?: Diálogos assíncronos sobre função exponencial e Educação Financeira", Cláudia Rodrigues de Andrade desenvolve uma análise narrativa do processo seguido pelo grupo de professoras para chegar a escolher a Educação Financeira como o tópico a abordar na tarefa para sala de aula durante o um ciclo de *Lesson Study* Híbrido. Assim, Cláudia articula os argumentos e as ideias discutidas durante as primeiras reuniões do ciclo com suas próprias reflexões em torno do ensino da matemática, da função exponencial e da Educação Financeira. O capítulo de Cláudia destaca quantos saberes docentes são mobilizados e produzidos no processo colaborativo de explorar uma temática a fim de desenhar uma tarefa para sala de aula.

Em "É só pegar com o agiota!: Negociando significados vinculados com a Educação Financeira", Juliet Sarkis analisa um daqueles episódios de sala de aula que desestruturam e problematizam o professor, levando-a a refletir sobre a diversidade de significados que circulam na sala de aula em torno da Educação Financeira, quando os alunos participam de uma tarefa exploratório-investigativa, e os desafios que tal cenário coloca para o professor. O trabalho de Juliet destaca a complexidade de articular saberes provenientes da matemática escolar com aqueles advindos das comunidades familiares, quando se trata de Educação Financeira.

Eliane Matesco Cristóvão escreve o posfácio que encerra esta obra. Tendo sido um membro do GdS por mais de oito anos, Eliane conhece a identidade do grupo e a resgata em seu texto, percebendo continuidades e inovações nas práticas do grupo a partir do desenvolvimento do projeto de *Lesson Study* Híbrido. A autora organiza sua reflexão em torno de dois pontos-chave: as pessoas que participaram do projeto e escreveram as narrativas deste livro, e as suas aprendizagens.

Os autores colocam-se à disposição, via e-mail, para receber comentários dos leitores e sanar possíveis dúvidas. Desejamos uma excelente leitura!

Os organizadores

LESSON STUDY HÍBRIDO NO ENSINO MÉDIO: UMA HISTÓRIA DE COLABORAÇÃO E APRENDIZAGEM DOCENTE

Ana Leticia Losano

As narrativas que compõem este livro são um dos frutos do projeto "*Lesson Study: Conhecimento e desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática*" desenvolvido pelo Grupo de Sábado (GdS) no período 2017-2019[3]. Fundado em 1999, o GdS é uma comunidade de aprendizagem docente que congrega professores de escolas públicas e privadas, estudantes dos cursos de Licenciatura em Pedagogia e Matemática, pesquisadores e formadores de professores interessados em investigar colaborativamente o ensino e a aprendizagem da matemática.

No decorrer de mais de 20 anos, muitos dos membros do GdS mudaram, mas a estrutura e os objetivos do grupo permaneceram os mesmos: promover o desenvolvimento profissional dos professores que ensinam matemática, entrelaçado com uma dimensão de pesquisa e tendo como ponto de partida e de chegada as demandas e as práticas dos professores escolares (FIORENTINI, 2006). Seguindo este enfoque, ao longo da sua trajetória, o grupo desenvolveu seus próprios recursos e estratégias para estudar/investigar as práticas docentes dos professores participantes. Dentre elas se destacam a consideração dos problemas e desafios vividos pelos professores na sua prática docente como ponto de partida, a utilização de diários de campo como ferramenta de registro da implementação de atividades em sala de aula e a sistematização da experiência através da escrita de narrativas (FIORENTINI, 2006).

Embora a cultura profissional produzida pelo GdS venha contribuindo para o desenvolvimento de seus participantes, no final de 2016 o grupo sentiu a necessidade de incrementar e sistematizar melhor o processo de estudo/pesquisa da aula de matemática. Nesse cenário, a metodologia de formação/pesquisa internacionalmente conhecida como *Lesson Study (LS)* – ou Estudo de Aula – emergiu como uma alternativa promissora. Considerando a tradição de trabalho colaborativo do GdS e a realidade da escola pública brasileira, era claro que não seria possível – nem desejável – realizar uma adaptação ou transposição direta da metodologia do *LS* para o grupo. Entretanto, o grupo decidiu se apropriar de contribuições ou atividades próprias do *LS* para melhorar seu trabalho. Tendo em conta esses processos de apropriação, o grupo optou por utilizar a denominação *Lesson Study* Híbrido (*LSH*).

[3] Projeto financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – Linha Fapesp Ensino Público (Processo 17/17418-9).

O desenvolvimento do projeto requereu a criação de três subgrupos dentro do GdS, cada um tendo como foco um nível da Educação Básica. Este livro está dedicado inteiramente a narrar as experiências vividas pelos participantes do subgrupo com foco no Ensino Médio, do qual participo.

O presente capítulo tem por objetivo narrar e discutir a trajetória percorrida pelo subgrupo do Ensino Médio ao longo dos três anos do projeto. Começo caracterizando o processo de *LSH* desenvolvido pelo GdS. A seguir, apresento a forma de trabalho desenvolvida pelo subgrupo do Ensino Médio. Continuo narrando nossas principais atividades em cada um dos ciclos de *LSH* e finalizo descrevendo o processo de escrita das narrativas que compõem este livro.

O *LSH* desenvolvido pelo GdS

Surgido no Japão, o *LS* compreende a preparação e a reflexão coletiva de aulas por professores organizados em equipes de estudo dentro das escolas. O desenvolvimento de um *LS* envolve a realização de certas etapas compostas de maneira cíclica. A primeira delas consiste no estabelecimento de um objetivo vinculado com uma questão ou temática que surge dos próprios professores. A segunda etapa envolve a elaboração de um plano de aula detalhado, através do qual os professores procuram atender ao objetivo colocado. Na terceira etapa um dos professores implementa a aula, enquanto os outros membros da equipe realizam observações e coletam dados (notas de campo, vídeo ou áudio gravações, etc.). A quarta etapa tem por foco realizar uma discussão posterior em que os observadores compartilham os dados coletados durante a aula para iluminar a reflexão sobre a aprendizagem dos estudantes, o conteúdo disciplinar, a tarefa e outros tópicos vinculados com o ensino e a aprendizagem. Em algumas ocasiões, especialistas externos participam desta etapa. A quinta etapa do ciclo consiste na reflexão e na análise de todas as etapas anteriores (FUJII, 2016). Essa última etapa leva, naturalmente, ao surgimento de novas perguntas e objetivos. É importante ressaltar que o *LS* pode envolver, também, a (re) implementação de versões melhoradas do plano de aula nas salas de outros professores participantes da equipe dentro da mesma escola.

A partir dessa descrição, é possível perceber que os professores que participam de um *LS*

> [...] trabalham em conjunto identificando dificuldades dos alunos, considerando alternativas curriculares e preparando cuidadosamente uma aula que depois observam e analisam. Trata-se, portanto, de um processo muito próximo de uma pequena investigação sobre a sua própria prática profissional, realizado em contexto colaborativo, e que é usualmente informado pelas orientações curriculares e pelos resultados da investigação relativa a um dado tema dos programas escolares. (QUARESMA; PONTE, 2016, p. 298)

Desse modo, o processo de *LS* pode ser uma oportunidade rica para promover o desenvolvimento profissional dos professores, abrindo espaços para a discussão conjunta e colaborativa de questões problemáticas que emergem da própria prática, criando oportunidades para imaginar ações que visem superá-las e promovendo a reflexão

sistemática sobre tais ações.

Segundo Fujii (2016), o *LS* faz parte da cultura escolar no Japão desde mais de um século atrás. Esta situação contrasta fortemente com a do Brasil, onde tal metodologia não integra a cultura institucional do professor e os estudos vinculados com o *LS* são incipientes. A realidade da escola pública brasileira é outra, marcada pelo desprestígio da profissão docente, a alta carga de trabalho semanal do professor e os baixos salários. Neste cenário é natural imaginar que a implantação do processo do *LS* deverá enfrentar dificuldades de diversa natureza. Baldin e Felix (2011) e Utimura e Curi (2016) destacam algumas delas: a postura individualista que prepondera na escola; a dificuldade de o professor aceitar a participação de outros profissionais em sua sala de aula; a dificuldade para reunir os professores num horário comum; e a dificuldade de desenvolver um trabalho conjunto ao longo de todas as etapas do ciclo. A possibilidade de desenvolver um processo de *LS* dentro de uma comunidade de aprendizagem docente caraterizada pela colaboração e pela confiança mútua entre seus membros – como é o caso do GdS – é uma alternativa promissora para tentar superar tais dificuldades. Contudo, desde minha perspectiva, seria ingênuo supor que o processo de *LS* não deveria sofrer adequações e/ou adaptações, quando aplicado no contexto brasileiro.

Em 2016, quando o GdS iniciou sua aproximação ao *LS*, o grupo já vinha desenvolvendo seu próprio modelo de desenvolvimento profissional. Fiorentini (2006) sistematizou esse modelo em seis etapas: (1) identificação de desafios e problemas nas práticas docentes; (2) estudo colaborativo da literatura com foco em tais problemas; (3) planejamento individual de ações e tarefas para lidar com esses problemas; (4) implementação de tarefas em sala de aula, coletando respostas de estudantes e fazendo – o próprio professor ou um colega do GdS – áudio ou videogravações de tal implementação; (5) seminário final, discutindo a experiência em sala de aula, usando narrativas escritas pelos professores ou produção de episódios gravados em vídeo ou resoluções dos alunos; (6) escrita de uma análise narrativa sobre a experiência vivida. É possível perceber aspectos em comum entre tais etapas e aquelas propostas num ciclo de *LS*. Contudo, existem, também, elementos diferenciados.

Na tentativa de articular o processo de *LS* com o modelo de desenvolvimento profissional criado pelo GdS, levando também em consideração a realidade da escola pública brasileira, acunhamos o termo *LSH*. Desse modo, o desenvolvimento do *LSH* envolveu tanto a introdução de certas modificações no processo de *LS* original como a produção de mudanças na organização e nas formas de trabalho adotadas pelo GdS.

Nessa direção, e considerando as especificidades do GdS e a impossibilidade de que todos seus participantes assumissem o mesmo papel, foram organizados três subgrupos: O subgrupo dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental; o subgrupo dos Anos Finais do Ensino Fundamental; e o subgrupo do Ensino Médio. Cada um deles estava formado por professores de matemática em exercício nas escolas – sendo dois ou três deles bolsistas –, futuros professores, mestrandos, doutorandos e formadores da universidade.

Quando o grupo concebeu o projeto, imaginamos um ciclo de *LSH* com seis fases (FIORENTINI et al., 2018). Contudo, no processo de vivenciar e sistematizar a experiência, fomos percebendo que cada ciclo de LHS estava dividido em três grandes fases, cada uma

envolvendo diversas atividades dentro dos subgrupos ou considerando o GdS como um todo.

Assim, um ciclo de *LSH* pode ser descrito pelas seguintes fases:

1. Problematização e Planejamento: Esta etapa compreende as seguintes atividades:

- Definição, por cada subgrupo, de uma "problemática" na qual pretende focar o ciclo. Tal problemática está associada a um determinado tópico do currículo.
- Estudo colaborativo, dentro do subgrupo, da literatura com foco em tais problemas.
- Seminário de problematização, em que cada subgrupo apresenta para o GdS a problemática, as motivações que levaram o subgrupo a escolher tal problemática e as ideias iniciais. Os demais participantes do GdS contribuem, sugerindo leituras e compartilhando experiências relacionadas com a problemática.
- Elaboração de uma tarefa por cada subgrupo e planejamento detalhado de sua implementação em sala de aula. Tal planejamento inclui a gestão da tarefa por parte do docente (como ele irá introduzi-la, a gestão do tempo, a organização da socialização, etc.), possíveis produções e/ou respostas dos alunos e intervenções do professor.
- Seminário-Piloto, em que uma primeira versão da tarefa é "implementada" no GdS. Num primeiro momento, os participantes dos outros subgrupos devem resolver e responder a tarefa como se fossem alunos, fornecendo – na medida do possível – respostas não esperadas. Num segundo momento, o grupo como um todo se engaja numa reflexão sobre a tarefa, proporcionando feedback e buscando contribuir para a sua melhoria antes da implementação. A partir deste Piloto, os membros do subgrupo ajustam a versão da tarefa e os procedimentos para sua implementação na escola.

2. Implementação e Observação:

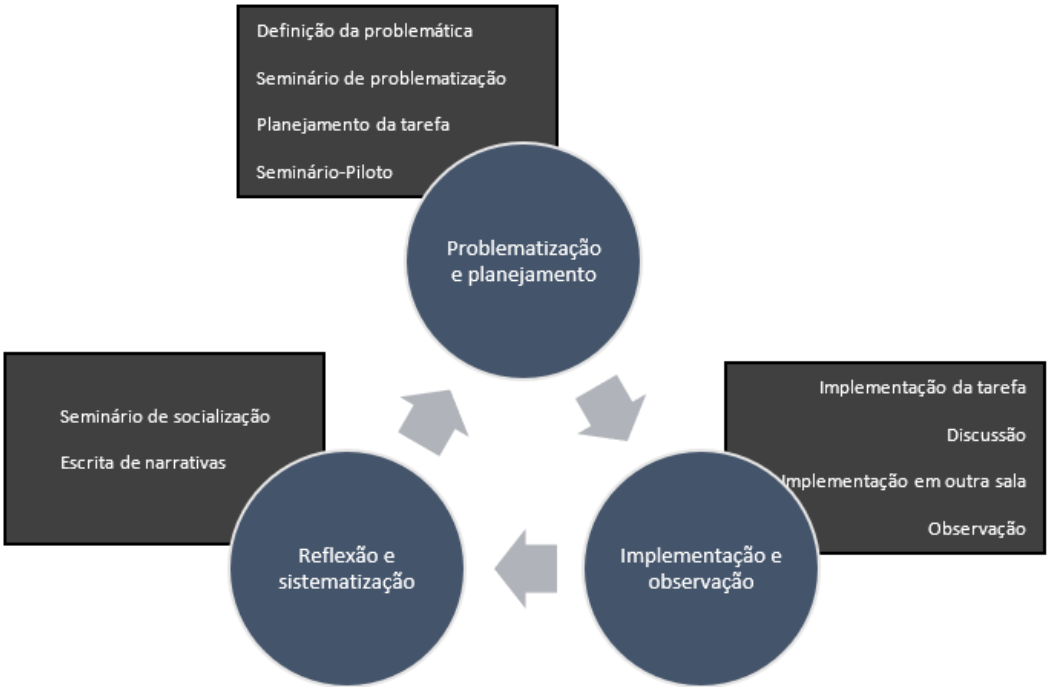
- Implementação da tarefa em sala de aula por um dos professores bolsistas.
- Discussão posterior à aula, em que se debatem diversos aspectos da tarefa e da sua implementação. A partir dessa discussão são realizados novos ajustes na tarefa e nos procedimentos de sala de aula.
- Implementação da tarefa (ajustada, se for o caso) na sala de aula de outro professor bolsista.
- Observação e coleta de dados (notas de campo, vídeo e áudio gravações, etc.) por outros membros do subgrupo durante as aulas.

3. Reflexão e Sistematização:

- Seminário de socialização da experiência, em que cada subgrupo apresenta ao GdS o processo seguido ao longo do ciclo, enfatizando principalmente a implementação da tarefa, dando destaque para os momentos mais significativos e críticos do ciclo e também para as evidências de aprendizagem profissional e discente.
- Elaboração, em formato de narrativa, e apresentação, por cada participante, de uma sistematização da experiência vivida.

A Figura 1 traz, de maneira esquemática, o ciclo de *LS*H. Cada ciclo tem duração de um semestre – com reuniões presenciais pelo menos a cada dois sábados. Frequentemente, os membros dos subgrupos se encontram semanalmente de maneira pessoal ou utilizando recursos *on-line*.

Figura 1 – Esquema do ciclo de *LS*H



Fonte: Elaborado pela autora.

Formas de trabalho desenvolvido pelo sEM durante o LSH

Os participantes do subgrupo do Ensino Médio (sEM) decidimos, desde o início do projeto, realizar encontros semanais. Visto que moramos e trabalhamos em distintas cidades, a realização de reuniões *on-line* – utilizando a ferramenta do Google Hangout[4]– foi a opção que melhor se adaptou às nossas realidades. As reuniões aconteciam nas sextas-feiras e se estendiam durante três ou quatro horas. Todos os encontros eram gravados em áudio e um de seus participantes ficava responsável por produzir uma ata escrita da reunião.

[4] https://hangouts.google.com

Ademais, realizávamos intercâmbios assíduos através do grupo que criamos no WhatsApp[5]. Participamos, também, de todas as atividades e encontros do GdS.

Grande parte dos registros produzidos ao longo do projeto foram armazenados no Google Drive[6], permitindo que todos pudéssemos ter acesso a eles quando necessário. Esses registros tiveram um papel central nos momentos em que sistematizamos e comunicamos nosso trabalho para o GdS e para outros grupos. Assim, recorremos a eles, sobretudo, quando preparamos os seminários de cada ciclo, ou quando elaboramos artigos a serem submetidos e apresentados em congressos e também quando escrevemos as narrativas que compõem este livro.

Ao longo desses três anos de trabalho, os participantes do sEM foram mudando, seguindo a trajetória pessoal de cada um – filhos nasceram, dissertações e teses foram concluídas, projetos de mestrado e doutorado foram iniciados, etc. Destaco aqui que o subgrupo sempre permitiu, e fomentou, diversas formas de participação, dependendo da disponibilidade de cada professor e do momento da vida no qual se encontrava. Assim, os papéis assumidos por alguns membros do sEM mudaram ao longo do tempo. Ademais, tivemos algumas mudanças nos professores bolsistas – que eram os encarregados de implementar a tarefa na sua sala de aula – tal como relato na próxima seção. Apesar destas transformações, uma característica permaneceu: ao longo do projeto todas as professoras bolsistas estavam atuando no 1º ano do Ensino Médio. Esse fato foi essencial para podermos elaborar uma tarefa e um planejamento conjunto com foco num conteúdo matemático comum e presente no currículo escolar.

Ao longo do projeto, os participantes do sEM fomos negociando e criando nossas próprias práticas. Através delas fomos compreendendo e nos apropriando do processo de LSH. Em relação à fase de Problematização e Planejamento, uma importante decisão nesta direção foi a opção por elaborar tarefas e planejar aulas de natureza exploratório-investigativa. Entendemos que essas aulas são "aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas, do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e de significação" (FIORENTINI, 2006, p. 29). Esta decisão não foi menor, visto que este tipo de aula não era o mais frequente nas práticas das professoras bolsistas. Assim, para algumas bolsistas, o projeto representou a primeira oportunidade que tiveram para planejar colaborativamente este tipo de aula e experienciá-la em sala de aula. Desse modo, a elaboração de tarefas e o planejamento de aulas exploratório-investigativas nos colocaram múltiplos questionamentos e desafios, dentre os quais destaco: Como redigir o enunciado da tarefa de maneira que ele seja claro e, ao mesmo tempo, permita a exploração de diversas vias de ação (quais dados e informações incluir e quais não)? Como imaginar as possíveis respostas dos alunos para uma tarefa que admite múltiplas formas de resolução? Como ganhar insight sobre as dificuldades que os alunos poderiam enfrentar durante a resolução da tarefa? Como imaginar as possíveis intervenções do professor, que poderiam ajudar os alunos a superar essas dificuldades?

[5] https://www.whatsapp.com/

[6] https://www.google.com/drive/

Criamos e desenvolvemos práticas que nos ajudaram a lidar com esses desafios. Uma delas foi resolver a tarefa de maneira detalhada, tentando assumir a posição do aluno. A outra foi a dos "Pilotinhos", ou seja, momentos em que membros da nossa família e/ou amigos resolviam uma versão inicial da tarefa, enquanto nós registrávamos as respostas e as dúvidas que surgiam. Destaco aqui que os Seminários-Piloto, no GdS, tiveram uma importância fulcral para produzir uma melhor compreensão das tarefas e tomar decisões tanto sobre seus enunciados como sobre suas estruturas.

Grande parte desse cuidadoso e detalhado processo de planejamento era sistematizado por meio de uma "Tabela de Planejamento", onde descrevíamos a duração estimada da atividade, o objetivo da tarefa, as principais orientações do professor, as possíveis respostas dos alunos e as intervenções do professor para cada parte da tarefa. É importante destacar que tal tabela não foi elaborada com a intenção de tornar-se um roteiro rígido que as professoras deveriam seguir durante a implementação. Éramos, e somos, cientes de que a prática docente não pode ser completamente prevista e planejada. O planejamento é indispensável para preparar e antecipar a prática, mas deve permanecer maleável perante as condições concretas da sua produção e dos sujeitos que dela participam. Desde essa perspectiva, o papel desta tabela era proporcionar uma certa segurança para as professoras que se adentravam numa zona de risco, ao implementar tarefas desta natureza. Ademais, a tabela servia como ferramenta de apoio na hora de tomar decisões dentro da sala de aula.

Em relação à etapa de Implementação e Observação, é importante considerar que, embora todas as professoras bolsistas do sEM estivessem atuando no 1º ano, elas trabalham em escolas diferentes que fazem parte de distintas redes de ensino e atendem a públicos diversos. Ainda que a tarefa fosse a "mesma", em cada uma das implementações ela se transformou, visto que o contexto, os alunos e a professora eram outros. Outro ponto importante em relação a esta etapa é que as tarefas exploratório-investigativas que nós conseguimos elaborar ao longo do projeto tinham geralmente uma duração maior que uma hora-aula – como costuma ser no processo de LS original. Algumas dessas tarefas poderiam ser consideradas como miniprojetos, sendo desenvolvidos entre quatro e oito horas-aula.

Nesse cenário, nem todas as aulas em que a tarefa foi implementada puderam ser observadas pelos membros do sEM. Com o tempo, aprendemos a identificar quais seriam os momentos mais ricos da tarefa para realizar observações e passamos a priorizar essas aulas. A duração estendida das tarefas, junto com a consideração dos calendários das escolas, fez com que devêssemos iniciar a segunda implementação da tarefa em outra escola, antes de conseguir finalizar a primeira implementação. Contudo, sempre conseguimos realizar discussões e introduzir modificações na tarefa a partir das experiências que íamos adquirindo, antes de realizar uma nova implementação em outra escola.

Compreender qual era o sentido da prática de observação em sala de aula foi um processo trabalhoso, que demandou múltiplas discussões em seu decurso. Particularmente, foi necessário negociar a natureza da observação – ou seja, o que devia ser observado – e o papel dos observadores dentro da sala de aula, o que, principalmente, envolveu negociar se eles, além de observar, podiam, ou não, realizar intervenções (LOSANO; FERRASSO, 2018). Depois de múltiplos debates, que se ressignificavam cada vez que passávamos pela

experiência de observar aulas, acordamos que a natureza da observação seria a de procurar interpretar as ações e as decisões dos alunos e da professora, levando em consideração a perspectiva do professor encarregado de ministrar a aula. Negociamos, além disso, que o observador deveria tentar fazer o mínimo de intervenções possíveis na aula, procurando ser sensível e razoável em cada situação. É importante ressaltar que, em nenhum momento da implementação das tarefas, um observador assumiu o controle da sala. Conseguir realizar observações deste tipo requereu o desenvolvimento de fortes relações de confiança mútua entre os membros do sEM. Ademais, foi uma prática aprendida através de muito esforço. Outro ponto importante a destacar é que todas as professoras bolsistas atuaram, também, como observadoras das aulas das colegas. Assim, elas experimentaram o duplo papel de professora e observadora.

Durante as aulas observadas realizamos gravações de vídeo – geralmente a câmera tinha por foco captar a sala toda –, gravações de áudio, para captar as discussões dentro de cada grupo de alunos, e fotografamos ações particularmente importantes dos alunos e/ou da professora. Ademais, cada observador produziu notas de campo. As professoras bolsistas também fizeram registros das aulas que não foram observadas por outros membros do sEM, filmaram ou gravaram fragmentos da aula, tiraram fotos, coletaram as produções dos alunos e produziram notas de campo.

Em relação à etapa de *Reflexão e Sistematização,* posso, mediante um olhar retrospectivo, reconhecer dois grandes momentos. O primeiro deles acontecia geralmente ao finalizar a implementação da tarefa, quando tomávamos contato pela primeira vez com a vasta quantidade de dados coletados. Estando muito próximos da experiência vivida na sala de aula – a qual, em todas as ocasiões, provocava uma intensa mobilização –, os participantes do sEM tínhamos dificuldade para encontrar focos de reflexão. Todos os dados coletados nos chamavam a atenção e nos maravilhavam. Pessoalmente, lembro-me de ter a sensação de que pulávamos de dado em dado e de tema em tema, sem conseguir aprofundar em nenhum deles. Foi necessária uma passagem do tempo para que conseguíssemos nos distanciar minimamente da experiência vivida e para que cada um de nós encontrasse um assunto sobre o qual tinha interesse em refletir. Neste segundo momento percebi que as professoras participantes do sEM conseguiram mudar o foco das suas análises: ao invés de centrar as reflexões somente nas produções e nos diálogos dos alunos, elas começaram a analisar também suas próprias ações docentes e seu papel no processo de aprendizagem da matemática por seus alunos. Acredito que essa mudança de foco foi fortemente estimulada pelos múltiplos questionamentos e comentários que cada membro do sEM realizava das narrativas discutidas nos nossos encontros. Essa mudança foi, também, a que permitiu colocar em primeiro plano as aprendizagens docentes produzidas ao longo de cada ciclo de *LS*H.

As atividades e as tarefas desenvolvidas pelo sEM ao longo dos ciclos de LSH

As aproximações do GdS ao processo de *LS* começaram em 2016. Elas incluíram a realização de leituras sobre o *LS* e discussões que visavam esclarecer conceitos básicos

vinculados com esta metodologia, assim como outras noções que a podem expandir. Assim, discutimos, entre outros aspectos: a diferença entre tarefa aberta e fechada; a diferença entre exercícios, problemas e tarefas exploratório-investigativas; a importância de estabelecer objetivos matemáticos e objetivos didático-pedagógicos para as tarefas; a possibilidade de desenvolver análises prévias sobre a tarefa antes de aplicá-la na sala de aula; a exploração de possíveis produções, raciocínios e representações dos alunos perante a tarefa; os cuidados na aplicação e na gestão das tarefas em sala de aula na perspectiva do *LS*; as formas de documentar a prática, visando a sua análise posterior pelo grupo (FIORENTINI et al., 2018). Esse trabalho culminou na escrita do projeto que submetemos à Fapesp no final de 2016.

O primeiro semestre de 2017 foi destinado ao que denominamos Ciclo Piloto de *LS*H. Foi um semestre em que todos os participantes do GdS tentamos nos apropriar da estrutura e da metodologia do *LS*. Simultaneamente, íamos nos conhecendo, aprendendo a trabalhar de maneira colaborativa e consolidando os subgrupos. Durante este Ciclo Piloto de *LS*H participamos do sEM seis professores de matemática em exercício no Ensino Médio (Thaís, Cida, Juliet, Milda, Ana Paula e Marília), dois pós-graduandos (Wellington e Jenny), um futuro professor (Marcos) e dois professores universitários (Dario e eu). Durante o Ciclo Piloto acordamos que iríamos trabalhar ao redor do conceito de função. Contudo, não conseguimos escolher uma única tarefa em torno da qual giraria o trabalho do subgrupo. Assim, durante esse ciclo, o sEM elaborou e implementou três tarefas diferentes, todas elas inspiradas em experiências prévias ou leituras sobre o conceito de função. Thaís e Dario lideraram o trabalho com uma tarefa inspirada em Fiorentini, Fernandez e Cristovão (2005), que explorava a noção de função como máquina transformadora. Cida trabalhou com uma tarefa centrada na relação de proporcionalidade direta, retomando uma atividade experimental que tinha vivenciado o ano anterior, ao participar da pesquisa de doutorado de Ana Paula (BARROS, 2019). Marília, Marcos, Ana Paula e eu nos concentramos numa tarefa orientada à representação gráfica e algébrica do trajeto que os alunos percorrem durante o intervalo escolar, tarefa essa inspirada no trabalho que eu tinha desenvolvido com meus estagiários na Argentina (GARCIA; ZURBANO; ROMERO, 2016). Os demais membros do sEM participaram das reuniões, produzindo apoios e comentários. As três tarefas foram implementadas em sala de aula. Contudo, neste Ciclo Piloto não conseguimos nos organizar para realizar observações das aulas. Apesar disso, as professoras conseguiram produzir registros das aulas que compartilharam com o subgrupo, gerando interessantes discussões e análises. A partir dessa descrição e do contraste com a figura 1, é possível perceber que este não foi propriamente um ciclo de *LS*H. Ainda assim, ele foi muito importante para nos familiarizar com esta metodologia e para começar a negociar os sentidos de cada uma de suas etapas.

No segundo semestre de 2017 desenvolvemos o Primeiro Ciclo de LSH. Os membros do sEM, neste ciclo, fomos cinco professoras de matemática em exercício no Ensino Médio (Thaís, Cida Juliet, Milda e Cláudia), dois pós-graduandos (Jenny e Wellington) e uma professora da universidade (eu). Tomamos a decisão de trabalhar com a trigonometria do triângulo retângulo. Para isso, construímos uma tarefa[7] cujos objetivos eram que os alunos

[7] O enunciado completo da tarefa se encontra no Apêndice 1 deste livro.

explorassem as relações entre ângulos-triângulos-razões dos lados de triângulos retângulos; que identificassem que triângulos semelhantes possuem as mesmas razões trigonométricas; e que tomassem contato com a linguagem utilizada para nomear as razões trigonométricas. Cida e Thaís, na condição de bolsistas da FAPESP, assumiram a responsabilidade de implementar a tarefa nas suas salas de aula. Todos os membros do sEM participamos como observadoras de alguma dessas aulas.

O Segundo Ciclo de LSH foi desenvolvido durante o primeiro semestre de 2018. Nesta oportunidade, participamos do sEM cinco professoras de matemática em exercício no Ensino Médio (Thaís, Cida Juliet, Milda e Cláudia), um pós-graduando (Wellington) e uma professora da universidade (eu). Neste segundo ciclo optamos por trabalhar a representação gráfica de funções. A partir dessa temática, elaboramos uma tarefa[8] para que os alunos compreendessem um fenômeno no qual está envolvida a relação entre duas variáveis – altura e idade – ao longo da vida; representassem, lessem e interpretassem essa relação, utilizando linguagem gráfica; e argumentassem as decisões envolvidas na construção desse gráfico. Neste ciclo Juliet tornou-se também professora bolsista. Assim, a tarefa foi implementada nas salas de aula de Thaís, Cida e Juliet. Essas três professoras, Wellington e eu atuamos como observadores.

No segundo semestre de 2018 desenvolvemos o *Terceiro Ciclo de LS*H. Durante esse semestre seis membros participamos do sEM: cinco professoras de matemática (Thaís, Cida Juliet, Milda e Cláudia) e uma professora universitária (eu). O tema escolhido para este ciclo foi a Educação Financeira. Decidimos elaborar uma tarefa que trabalhasse com dados e situações reais e próximas das realidades dos nossos estudantes. A tarefa elaborada buscava que os alunos mobilizassem noções da Matemática Financeira para analisar e tomar decisões sobre a conveniência de realizar diversos investimentos e financiamentos. Neste caso, a tarefa apresentava para os alunos a história de dois personagens, Carol e Fernando. Carol era uma jovem trabalhadora que percebia que todo mês sobrava dinheiro na sua conta e decidiu procurar opções para investir esse dinheiro. Fernando era jovem e queria comprar uma moto. A tarefa[9] introduzia quatro opções de investimentos para Carol e quatro maneiras de financiar a moto de Fernando. Os alunos deviam atuar como assessores financeiros, emitindo um conselho final para os jovens. Novamente, a tarefa foi implementada nas salas de aula de Juliet, Cida e Thaís. As três professoras, Milda e eu atuamos como observadoras de algumas das aulas.

O processo de escrita das narrativas que compõem este livro

Durante os três ciclos de LSH, os subgrupos do GdS realizaram importantes avanços na fase de Reflexão e Sistematização. Assim, cada subgrupo apresentou seus seminários, no final de cada semestre, compartilhou as experiências vividas durante a implementação das tarefas e destacou os momentos mais poderosos e/ou críticos de cada ciclo. Ademais, cada professor bolsista elaborou uma primeira versão de um texto narrativo em que sistematizava

[8] O enunciado completo da tarefa aparece no Apêndice 2 deste livro.

[9] O enunciado completo da tarefa aparece no Apêndice 3 deste livro.

parte dos seus aprendizados. Contudo, não tivemos tempo suficiente para aprofundar e finalizar a sistematização.

Essa situação levou o GdS a decidir destinar o último semestre do projeto – o primeiro de 2019 – exclusivamente para a sistematização das experiências vividas ao longo dos três ciclos de LSH. Em julho de 2019 percebemos que mais um semestre seria necessário para deixar as narrativas prontas para publicação. Desse modo, o ano de 2019 foi dedicado inteiramente à produção das narrativas que estão reunidas neste livro.

Durante 2019, os participantes do sEM fomos seis professoras de matemática em exercício (Ana Paula, Juliet, Cláudia, Milda, Cida e Thaís), uma pós-graduanda (Cristina) e uma professora da universidade (eu). É importante destacar que a inclusão de novos membros do subgrupo trouxe relevantes contribuições, pois passamos a contar com "olhares externos" sobre o que fazíamos, elaborando outras interpretações e novas compreensões sobre o trabalho.

Para a produção das narrativas, os membros do sEM acordamos nos seguintes pontos: em primeiro lugar, cada narrativa teria como foco descritivo um ciclo de *LS*H, pois, nos primeiros intentos de escrita, ficou evidente que seria muito difícil produzir uma narrativa que conseguisse abarcar, com a profundidade almejada, mais de um ciclo. Em segundo lugar, cada professora manifestou sua disponibilidade para a escrita, estabelecendo se escreveria uma ou duas narrativas. Em terceiro lugar, as professoras escolheram os ciclos nos quais iriam focar. Levando em conta que as narrativas seriam reunidas em um livro, essas escolhas consideraram os interesses pessoais de cada um e a necessidade de alcançar um certo equilíbrio que permitisse narrar para o público o trabalho desenvolvido ao longo de todos os ciclos.

Ademais, o sEM negociou a seguinte forma de organização do trabalho. Cada professora escrevia uma primeira versão da sua narrativa que era enviada para todos os membros do subgrupo. A seguir, destinávamos um encontro do sEM para discutir a narrativa, realizando comentários e sugestões tanto na estrutura como no conteúdo do texto. A partir desse trabalho, a autora produzia uma segunda versão novamente remetida para todos os membros do GdS. Nesta fase, dois membros do grupo não participantes do sEM eram escolhidos como leitores privilegiados da narrativa, um deles um acadêmico da universidade e o outro um professor da escola. Durante a reunião do GdS, os leitores privilegiados, a autora e todo membro do grupo que tivesse feito a leitura da narrativa, se reuniam para discutir o texto, proporcionando um novo feedback. Considerando esses aportes, a autora produzia uma terceira versão da narrativa que era discutida, novamente, durante um dos encontros do sEM. Assim, as narrativas que compõem os capítulos deste livro são o produto de, pelo menos, quatro revisões feitas pelas suas autoras.

Considerações finais

Ao longo destas páginas tentei descrever e sintetizar três anos de um intenso trabalho colaborativo. Foram tempos de muitas conversas, discussões acaloradas e, também, grandes satisfações. As narrativas, a seguir, sistematizam as aprendizagens docentes produzidas ao

longo desta caminhada. Contudo, quero destacar, aqui, duas aprendizagens que, desde minha perspectiva como professora/acadêmica da universidade, considero altamente relevantes.

Em primeiro lugar, a compreensão, por parte das professoras em exercício, sobre a importância do planejamento como um espaço para antecipar, de maneira cuidadosa, as ações docentes dentro de uma tarefa exploratório-investigativa e como uma oportunidade para se projetar como professoras de matemática dentro deste tipo de prática de ensino. Assim, nesse aprender a planejar tarefas exploratório-investigativas elas aprendiam, também, a se compreender como professoras que elaboram e implementam este tipo de tarefa, contribuindo com o desenvolvimento da sua identidade.

Em segundo lugar, as profundas aprendizagens matemáticas produzidas ao longo de cada ciclo de *LS*H. Desde a fase de Problematização e Planejamento – em que as discussões sobre o enunciado da tarefa com frequência nos levavam a discussões matemáticas aprofundadas – até a fase de Reflexão e Sistematização, na qual as produções dos estudantes sempre conseguiam trazer novas compreensões sobre a matemática envolvida nas tarefas propostas, todos os membros do sEM aprendemos muita matemática. Cabe ressaltar que se tratava de uma matemática fortemente vinculada com a prática docente em sala de aula. Nesses processos de aprendizagem conseguimos ressignificar muitas noções matemáticas que estudamos durante a formação inicial, vinculando-as com a problemática do seu ensino e aprendizagem na escola.

Referências

BALDIN, Y. Y.; FELIX, T. F. A Pesquisa de Aula (*Lesson Study)* como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula (CO). In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife, PE. *Anais* [....]. Recife, 2011.

BARROS, A. P. R. M. *Práticas culturais (re)constituídas quando aulas de Matemática são mediadas pela internet em um ambiente híbrido.* 218p. Tese (Doutorado em educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2019.

FIORENTINI, D. Grupo de sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M. (org.). *Histórias e investigação de/em aulas de matemática.* Campinas, SP: Alínea, 2006. p.13-36.

FIORENTINI, D. et al. Estudo de uma experiência de Lesson Study Híbrido na formação docente em matemática: contribuições de/para uma didática em ação. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, 13., 2018, Salvador. *Anais* [...]. Salvador de Bahia: UFBA, 2018. p. 2-38.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.; CRISTÓVÃO, E. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO

CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR, 2005, Lisboa. *Anais* [...]. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm>. Acesso em: 13 jan. 2006.

FUJII, T. Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of Lesson Study. *ZDM*, p. 411-423, 2016.

GARCÍA, J.; ZURBANO, P. P., ROMERO, V. *Funciones y función de proporcionalidad directa*. 2016. Informe Final Prácticas Profesionales docentes (Profesorado en Matemática) – Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Córdoba.

LOSANO, L.; FERASSO, T. Negociando sentidos para a observação em sala de aula no contexto de um Lesson Study Híbrido. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, 13., 2018, Salvador. *Anais* [...] Salvador de Bahia: UFBA, 2018. p. 26-38.

QUARESMA, M.; PONTE, J. P. Comunicação, tarefas e raciocínio: Aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula. *Zetetiké*: Revista de Educação Matemática, v. 23, n. 44, p. 297-310, 2016.

UTIMURA, G. Z.; CURI, E. Figuras *Geométricas Espaciais:* alunos de quinto ano e suas professoras aprendendo juntos. Curitiba: Appris, 2016.

PARTE I

Ensino de Trigonometria

CONSTRUÇÃO DE UMA TAREFA SOBRE TRIGONOMETRIA: A COMPLEXIDADE DE FAZER ESCOLHAS... A DIFICULDADE DE FAZÊ-LAS SOZINHA!

Thaís de Oliveira Ferrasso

Cristina Meyer

Esta narrativa faz parte de um projeto[10] que tem como título o "*Lesson Study: conhecimento e desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática*". Nesse projeto, parceiros de profissão reúnem-se aos sábados, no Grupo de Sábado (GdS), com o objetivo comum de estudar a aula e melhorar questões da prática docente, divididos em três subgrupos: um grupo que estuda as particularidades das séries iniciais do Ensino Fundamental; outro, as séries finais do Ensino Fundamental; e, ainda, um terceiro, que estuda o Ensino Médio – o subgrupo do Ensino Médio (sEM) –, do qual fazemos parte.

Durante o projeto houve momentos com trabalhos específicos de cada subgrupo e momentos em que todos se juntaram, analisaram e socializaram as suas aprendizagens. Cada subgrupo contou com a participação de professores da escola básica, estudantes de Licenciatura ou pós-graduação. Juntos, esses participantes aprenderam a desenvolver uma prática de trabalho colaborativo e um fazer matemático com foco na produção de significados e sentidos apoiados na metodologia de formação-pesquisa que denominamos Lesson Study Híbrido (*LS*H).

No *LS*H, seus participantes se dedicam a cumprir um ciclo, no período de um semestre, com três grandes fases: (1) Problematização e Planejamento; (2) Implementação e Observação; (3) Reflexão e Sistematização[11].

O foco desta narrativa privilegia a primeira fase - Problematização e Planejamento – do primeiro ciclo de *LS*H, desenvolvido no segundo semestre de 2017 pelo GdS, momento em que o sEM criou uma tarefa sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo. Temos o objetivo de narrar o trabalho docente de construção dessa tarefa.

A tarefa criada será nomeada como **Tarefa 3** neste texto. Ela foi inspirada em outras duas tarefas que foram estudadas pelos membros do sEM: **Tarefa 1** (OLIVEIRA,

[10] Projeto financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), linha Ensino Público, processo: 2016/25982-9, com duração de quatro semestres a partir de agosto de 2017.

[11] Para mais detalhes sobre as atividades desenvolvidas em cada fase de um ciclo completo do *LS*H, leia o capítulo de Introdução deste livro.

2010, p. 141-153), que desenvolvida pela professora Thaís[12] durante seu mestrado; **Tarefa 2** (MASTRONICOLA, 2014, p. 58-61), proposta em uma dissertação de mestrado e estudada pelo sEM.

Para contar como elaboramos a **Tarefa 3**, organizamos o texto em quatro seções. Na primeira, Thaís detalha as versões de experiências que a constituem nesse processo, situando-as com as tarefas. Na segunda, detalhamos o trabalho docente feito na elaboração ou na análise das tarefas. Na terceira seção, Thaís narra alguns episódios que aconteceram durante a implementação da **Tarefa 3**, momento em que observou a sua implementação na sala de aula e que ilustra a receptividade dos alunos com o planejado. E finalizamos com uma seção que indica nossas aprendizagens, como professoras, em toda essa experiência.

Construindo novas compreensões sobre as razões trigonométricas e o seu ensino

A relação da professora Thaís com a Trigonometria no Triângulo Retângulo passou por alguns estágios. Enquanto aluna e no início da carreira docente, compreendia esse tema como um conjunto de fórmulas que relaciona a razão entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo e a medida de um de seus ângulos agudos. Ao entrar no mestrado, teve contato com o *software* GeoGebra e compreendeu que poderia criar alguns aplicativos usando essa ferramenta, para auxiliar o processo escolar de ensinar e aprender. Ao aprofundar-se nesses estudos e na criação desses aplicativos, foi ampliando seus conhecimentos sobre esse tema, levantando algumas questões, como: o que são as tábuas trigonométricas? Como elas foram construídas? Com qual finalidade elas foram criadas? Aos poucos, se aproximou da História da Matemática e compreendeu quão inteligentes tinham sido os povos antigos por perceberem que, em triângulos retângulos semelhantes, a razão entre as medidas correspondentes de seus lados é sempre constante. Então, de maneira eficiente, registraram esses valores constantes nas Tábuas Trigonométricas, para cada um dos diferentes triângulos retângulos, organizando-os em função de um de seus ângulos agudos. Com esse registro, conseguiram encontrar medidas inacessíveis ou desconhecidas de um triângulo retângulo, sempre que conheciam a medida de um de seus lados e um de seus ângulos agudos, consultando essa tabela construída. Assim, esses grandes matemáticos estabeleceram uma função que relaciona cada ângulo de um triângulo retângulo com um valor constante resultado da razão entre as medidas de dois de seus lados. A partir dessas novas compreensões, as razões trigonométricas passaram a ter outro sentido para ela.

Empolgada com suas descobertas, quis levá-las para a sala de aula. Para isso, durante o mestrado, planejou uma tarefa – Tarefa 1 – com a ideia de apresentar diferentes triângulos retângulos semelhantes aos alunos, pedir para que eles calculassem razões entre a medida de seus lados e estimulá-los a perceberem a regularidade: que a razão entre duas medidas de lados de um triângulo retângulo dava o mesmo valor, se calculado com correspondência

[12] A professora Cristina, segunda autora deste capítulo, juntou-se ao sEM no início da terceira fase do projeto (Reflexão e Sistematização) quando as reflexões sobre experiências vivenciadas ao longo do projeto *LS*H foram sistematizadas e as narrativas que constituem este livro foram escritas. Devido a isso, nos trechos da narrativa referentes a momentos de participações exclusivas de uma das professoras, nos referimos a nós mesmas mencionando o próprio nome.

a diferentes triângulos semelhantes. Além disso, queria que eles enxergassem a função existente entre essa razão do triângulo e um de seus ângulos agudos e se familiarizassem com as três principais razões trigonométricas conhecidas: seno, cosseno e tangente.

Thaís ainda era uma professora nova de carreira e não tinha a dimensão da complexidade dessa proposta: desafio de medir – que instrumento usar? Como lidar com as aproximações? –; desafio de medir coisas diferentes: medir lados e ângulos dos triângulos; desafio de registrar – onde eles colocariam essas medidas coletadas? –; desafio de nomear: como trazer a teoria com os devidos nomes relacionados ao triângulo retângulo, uma vez que o mesmo lado ora é cateto oposto, ora é cateto adjacente, dependendo do ângulo de referência?; desafio de fazer os cálculos das razões – que instrumento usar? Quantas casas decimais considerar? –; desafio de buscar regularidades: quantos triângulos semelhantes seriam necessários? De quantas famílias de triângulos semelhantes precisaria?; desafio de ajustar a gestão da sala de aula para a execução dessa tarefa: tempo necessário para diferentes partes da tarefa – apresentação, execução, socialização dos resultados, avaliação –, material disponível.

A Tarefa 1, que pode ser consultada na sua dissertação de mestrado, ficou dividida em quatro partes: Folha de Atividades – duas páginas com as instruções que deveriam ser seguidas, com um pouco de teoria e um quadro de sistematização das informações e outro com perguntas para reflexão –; Folha de Tabelas, com duas páginas, cada uma com duas tabelas, para registro dos pares de triângulos semelhantes; oito Fichas individuais, identificadas, com orientação das atividades, um triângulo retângulo e uma tabela para registro das medidas desses triângulos; e uma Tábua Trigonométrica.

A Tarefa 1 ficou longa. Ficou confusa. Muitas folhas e informações para os alunos administrarem. Idas e vindas na execução da tarefa, com enunciados longos e confusos. Criar essa tarefa sozinha foi muito difícil! E, quando a levou para a sala de aula, confirmou a necessidade de ajustes e reestruturação, tanto do enunciado quanto da dinâmica envolvida. Thaís terminou a dissertação de mestrado um tanto frustrada com esse "fracasso". Ela compreendia o potencial da ideia proposta – a investigação e a busca de regularidades em diferentes pares de triângulos retângulos semelhantes – para que os alunos percebessem os padrões que definem as razões trigonométricas, mas esbarrava na sua dificuldade em comunicar o seu objetivo de forma compreensível e clara na tarefa planejada.

Quando o primeiro ciclo de *LS*H foi iniciado, possíveis temas para explorar foram discutidos, e a Trigonometria no Triângulo Retângulo estava entre eles. Thaís tinha bastante interesse em trabalhar com o tópico Exponenciais e Logaritmos e pouca vontade de retomar o estudo de Trigonometria. Porém, o sEM manteve o interesse em explorar a Trigonometria, e ela se convenceu da importância de retomar suas questões pendentes, geradas no período do mestrado. Além disso, houve um outro argumento forte favorável à sua aceitação: ela não estava mais sozinha, mas, sim, inserida em um grupo disposto a estudar e planejar junto com ela! Isso fazia total diferença.

Definido o tema, os membros do sEM iniciamos a busca de possíveis materiais que pudessem referenciar nosso estudo, e Leticia nos trouxe, em uma das nossas reuniões, o trabalho de Mastronicola (2014), que tinha a Tarefa 2. Como um primeiro passo, o sEM

decidiu que todos resolveriam a tarefa completa, assumindo a perspectiva de alunos. Thaís resolveu a tarefa. Nesse momento, ela começou a observar as escolhas feitas pela autora e as confrontar com as tantas inquietações pendentes que tinha sobre o assunto. Resumiremos a tarefa nas linhas seguintes, porém, iremos complementar com algumas imagens e outras informações na seção seguinte.

A autora estruturou a tarefa em seis Folhas de Atividades (FA), enumeradas de 1 a 6, das quais apenas as quatro primeiras se relacionam com o recorte estudado aqui. A FA1 traz três perguntas que convidam os alunos a recordarem os critérios de semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras, além de instruí-los na forma de utilizar a FA2. A segunda folha, FA2, tem nove triângulos retângulos desenhados em uma malha quadriculada, identificados por um número em seu interior, de 1 a 9. A FA2 requer aos alunos: contar o número de quadradinhos que representa a medida de cada cateto de cada um dos nove triângulos; registrar essa medida na própria folha; calcular a hipotenusa, usando Teorema de Pitágoras; e pintar com a mesma cor os triângulos semelhantes observados na FA2. A FA3 tem três tabelas para organizar os triângulos pintados de mesma cor na folha anterior e acrescenta a atividade de cálculo de algumas razões entre as medidas dos lados desses triângulos, indicadas nas linhas da tabela. Essa folha finaliza com uma questão para que os alunos concluam que as razões trigonométricas de triângulos semelhantes são as mesmas. Na FA3, havia espaço para preenchimento dos dados de apenas oito triângulos. A autora retoma o triângulo faltante na atividade da FA4, propondo uma aplicação da teoria explorada nas três primeiras folhas.

As Tarefas 1 e 2 são diferentes, mas exploram o mesmo objetivo, com relação à compreensão das razões trigonométricas pela observação de triângulos semelhantes. Para construir a Tarefa 3, o sEM procurou conhecer bem essas duas tarefas, identificar as suas diferenças e semelhanças e fazer escolhas para a nova tarefa: a Tarefa 3.

As escolhas didático-pedagógicas para a Tarefa 3

No planejamento de cada uma das três tarefas, os autores se preocupam em apresentar objetivo, duração da implementação, turma para a qual está orientada a tarefa para aplicação, disposição dos alunos nas atividades e material utilizado. Contrapor e comparar as escolhas feitas pelas autoras das Tarefas 1 e 2 em sua construção ajudou o sEM a decidir sobre suas escolhas para construir a Tarefa 3, como vamos destacar nesta seção.

De forma geral, podemos pensar que as três tarefas tinham como princípio que os alunos investigassem a razão entre a medida dos catetos e/ou hipotenusa correspondentes de triângulos retângulos semelhantes e encontrassem um valor coincidente. Esse valor é associado a uma razão trigonométrica em função do ângulo agudo observado.

Para essa investigação, foi necessário escolher um par ou trio de quaisquer triângulos retângulos semelhantes. Porém, quando planejamos essa tarefa para uma sala de aula, temos que pensar sobre como os triângulos serão dispostos na folha de atividades, que instrumentos os alunos utilizarão para medir seus lados, como farão e registrarão o cálculo das razões, qual será a precisão dessas medidas encontradas, quanto tempo a atividade irá

durar, etc. Enfim, cada escolha sobre detalhes da tarefa tem um sentido e direciona para determinada conduta em sala de aula. Por isso, nos dedicamos a detalhar algumas escolhas que o sEM fez para construir a Tarefa 3.

A escolha de uma tarefa exploratório-investigativa

Escolhemos trabalhar com uma tarefa exploratório-investigativa. O próprio contexto da Trigonometria no Triângulo Retângulo traz essa possibilidade com naturalidade, resgatando elementos da História da Matemática. Nessa perspectiva, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2003), buscamos fugir do tradicional – apresentar teoria e resolver uma lista de exercícios –, com o propósito de permitir que os alunos experimentem a atividade matemática de modo semelhante aos matemáticos: observem regularidades e padrões, formulem conjecturas e estabeleçam conclusões, a ponto de "criar" uma teoria. Para os alunos, é como se ninguém tivesse descoberto isso antes deles.

Nessa perspectiva, uma outra fuga do tradicional, ao preparar as aulas de matemática, foi o desenvolvimento de trabalho em grupo, na perspectiva de que todos os alunos participem ativamente do trabalho e colaborem uns com os outros. Com isso, durante o planejamento, imaginamos maneiras de disponibilizar o material de trabalho de forma que cada aluno do grupo assumisse a sua responsabilidade e todos pudessem executar ações simultaneamente. Desse modo, rompíamos com uma ideia de trabalho em grupo segundo a qual um aluno faz toda a tarefa e os outros se limitam a observar.

Além disso, uma importante ação do matemático é produzir um registro escrito que ajude na visita e revisita do conhecimento encontrado. Por isso, criamos espaços orientados para que os alunos anotassem as informações encontradas. Tal registro serviria tanto para continuarem avançando nas reflexões a posteriori como para a comunicação com o outro. Nessa perspectiva de trabalho colaborativo, o outro é peça fundamental no processo, pois ele interage com o que eu penso e vice-versa, ampliando e refinando as lentes em que todos os envolvidos enxergam o cenário estudado. Os sujeitos envolvidos na atividade, tanto professor quanto alunos, sentem a necessidade de usar uma linguagem adequada, criando uma ou buscando conhecer as que já existem e estão padronizadas pela sociedade.

Essas escolhas vão permear as subseções que seguem, pois elas estão interligadas com todas as variáveis do planejamento da tarefa e da atividade de sala de aula.

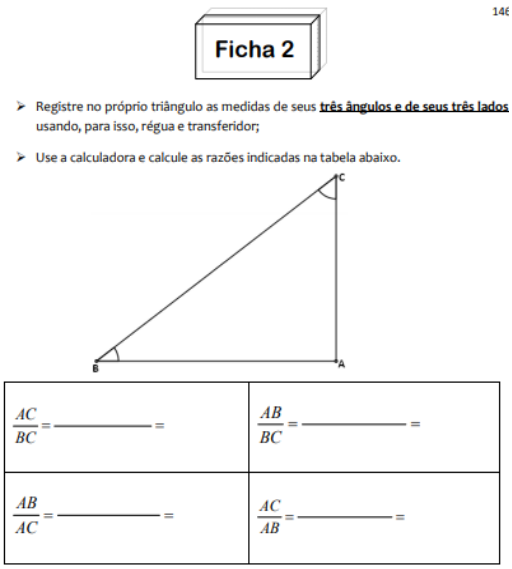
A escolha dos triângulos retângulos

Em cada uma das tarefas – 1, 2 e 3 –, seus autores fizeram escolhas diferentes para os triângulos retângulos explorados. Cada uma dessas escolhas gerou uma demanda para a preparação de material, a forma de medir e, ainda, a possibilidade de gerar mais ou menos erros, conforme descrevo a seguir.

Ao criar a Tarefa 1, Thaís escolheu usar oito triângulos retângulos a partir da medida de seus ângulos agudos, distribuídos em pares de 45º e 45º; 30º e 60°, 20º e 70º; e um

par de triângulos com lados medindo 3k, 4k e 5k com k positivo e não nulo. Ela pensou nos ângulos notáveis, que usamos com frequência nas aulas do Ensino Médio. Não teve a preocupação de construir triângulos com catetos representados por números inteiros, mas sim, que coubessem em uma folha de papel A4 na posição retrato. Em cada folha, que chamou de ficha, havia um desses triângulos desenhados, seguido de uma tabela, como se mostra na figura 1:

Figura 1 - Modelo de ficha usada na Tarefa 1



Ficha 2

- Registre no próprio triângulo as medidas de seus **três ângulos e de seus três lados** usando, para isso, régua e transferidor;
- Use a calculadora e calcule as razões indicadas na tabela abaixo.

$\frac{AC}{BC} = _____ =$	$\frac{AB}{BC} = _____ =$
$\frac{AB}{AC} = _____ =$	$\frac{AC}{AB} = _____ =$

Fonte: Oliveira (2010, p. 146).

Com isso, o aluno precisava de transferidor e régua, para fazer as medições, e calculadora, para os cálculos das razões indicadas na tabela. Os triângulos foram desenhados em folha individual, com o propósito de permitir o trabalho simultâneo dos alunos divididos em grupos de quatro integrantes. Cada aluno se responsabilizava pelo preenchimento de duas fichas.

Na sua dissertação, Thais deixou registradas algumas orientações para professores interessados em fazer uso da tarefa, pois ela já revelava alguns obstáculos em seu enunciado:

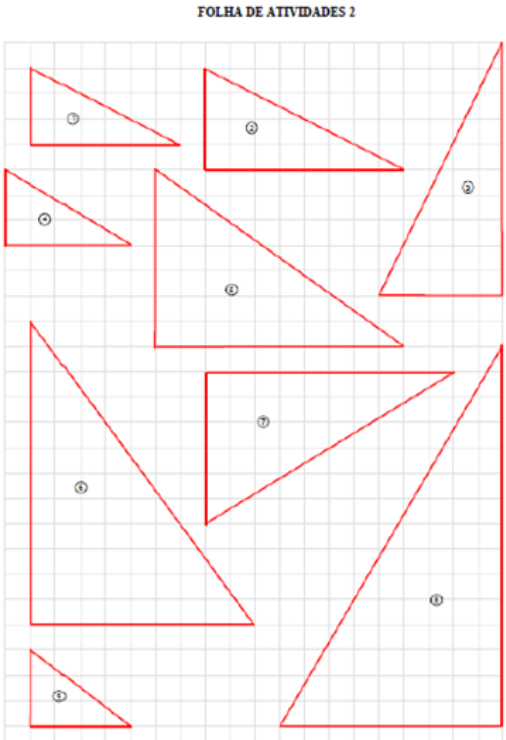
> Oriente bem os alunos de que esta atividade é um experimento; logo, quanto maior o cuidado com a manipulação das ferramentas e atenção aos décimos de medidas, mais precisos serão os dados coletados.Nessa etapa aparecem, por anotações equivocadas dos alunos, triângulos cuja soma dos ângulos internos excede 180º, e assim é preciso que o professor observe se os alunos estão cometendo erros e faça questionamentos que permitam a reflexão e correção dos dados, por exemplo: - Qual o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo? - Qual é o maior lado de um triângulo retângulo? Muitos alunos precisam de instruções de sobre como usar o transferidor e às vezes até a régua! (OLIVEIRA, 2010, p. 139)

Esse trecho já apresenta indícios da necessidade de cuidados com a atividade e destaca a importância de intervenções do professor, relembrando alguns tópicos previamente estudados, para o bom andamento da tarefa. Na prática, a manipulação dos instrumentos para coletar as medidas é um grande desafio, como sinalizam as instruções. Esse ponto se

torna particularmente importante, no caso desta tarefa, visto que o aluno só iria encontrar valores coincidentes para as razões, se o preenchimento das medidas estivesse correto.

A autora da Tarefa 2 optou por colocar nove triângulos retângulos em uma mesma folha, desenhados a partir de uma malha quadriculada, identificados por números de 1 a 9, que ajudariam na identificação das tarefas seguintes, como na figura 2:

Figura 2 - Modelo da Folha de atividades proposto na Tarefa 2



Fonte: Mastronicola (2014, p. 59).

O uso da malha quadriculada descartou o emprego de régua para medir os lados e convidou os alunos a calcularem a hipotenusa pelo Teorema de Pitágoras. Essa escolha trazia maior facilidade em encontrar razões iguais e diminuía erros.

A autora escolheu nove triângulos retângulos com a medida dos catetos representada por números inteiros: 3 e 6, 4 e 8, 5 e 10, 3 e 5, 7 e 10, 9 e 12, 6 e 10, 9 e 15, e 3 e 4. Tais escolhas permitiram o agrupamento de triângulos semelhantes em: um grupo de três triângulos em que um dos seus catetos é o dobro do outro (3 e 6, 4 e 8, 5 e 10); um grupo de dois triângulos que atendem a medida dos lados como 3k,4k e 5k com $k \in IN^*$, (3 e 4, e 9 e 12); um grupo de três triângulos cujos catetos são múltiplos de 3 e 5 (3 e 5, 6 e 10, e 9 e 15); e um triângulo isolado cujos catetos eram 7 e 10. Este último seria utilizado para a atividade de aplicação na FA4, que explorava um problema de cálculo da altura inacessível de uma árvore.

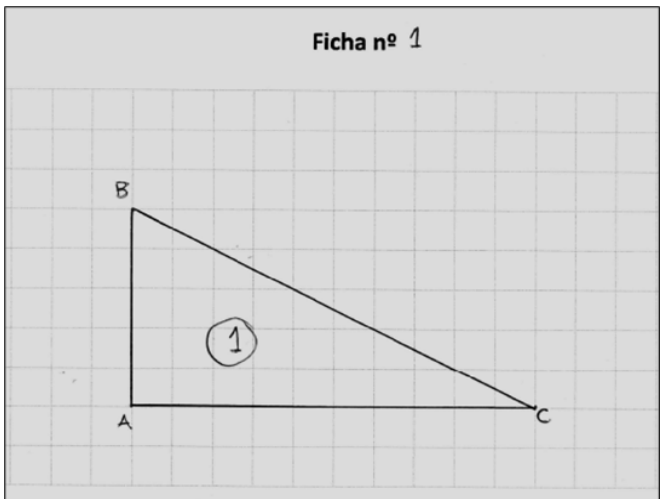
Por outro lado, o enunciado dessa tarefa ainda previa o uso do transferidor para medir os ângulos agudos dos triângulos retângulos, que não eram os ângulos notáveis – etapa importante para relacionar a relação de dependência da razão trigonométrica a um ângulo agudo do triângulo retângulo. Também indicava o uso de lápis de cor para que os

alunos pintassem de uma mesma cor os triângulos semelhantes encontrados, mas, como os triângulos estavam em uma única folha, essa atividade não podia ser desenvolvida por mais de um membro simultaneamente no grupo.

Para constituir a Tarefa 3, o sEM entendeu que o aluno deveria medir todos os lados do triângulo, e não encontrar a medida da hipotenusa pelo Teorema de Pitágoras. Isso porque explorar o Teorema de Pitágoras iria ampliar a tarefa, fugindo do seu objetivo e exigiria lidar com o uso de números irracionais na calculadora básica.

Escolhemos fazer oito fichas individuais para preservar o trabalho simultâneo de cada aluno no grupo. Em cada ficha foi desenhado um triângulo com catetos representados por números inteiros inscritos em uma malha quadriculada de 1 cm por 1 cm, que coubesse em um quadriculado de 19 cm de comprimento por 10 cm de largura e formasse quatro pares de triângulos semelhantes. Porém, o triângulo foi desenhado "à mão", já que os testes de impressão feitos, usando inclusive o software GeoGebra, não geravam malhas quadriculadas com precisão de 1 cm por 1 cm, como na Figura 3:

Figura 3 - Modelo da ficha usada na tarefa 3



Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

Os triângulos escolhidos foram:

Quadro 1 - Tabela com os oito triângulos escolhidos para a Tarefa 3

Triângulo 1	Triângulo 2	Triângulo 3	Triângulo 4
Catetos 5 e 10 cm Ângulos agudos: 63º e 27º Hipotenusa: 11,2 cm	Catetos 6 e 10 cm Ângulos agudos: 59º e 31º Hipotenusa: 11,7 cm	Catetos 6 e 8 cm Ângulos agudos: 53º e 37º Hipotenusa: 10 cm	Catetos 9 e 15 cm Ângulos agudos: 59º e 31º Hipotenusa: 17,5 cm
Triângulo 5	**Triângulo 6**	**Triângulo 7**	**Triângulo 8**
Catetos 4 e 4 cm Ângulos agudos: 45º e 45º Hipotenusa: 5,7 cm	Catetos 4 e 8 cm Ângulos agudos: 63º e 27º Hipotenusa: 8,9 cm	Catetos 6 e 6 cm Ângulos agudos: 45º e 45º Hipotenusa: 8,5 cm	Catetos 9 e 12 cm Ângulos agudos: 53º e 37º Hipotenusa: 15 cm

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

O objetivo era que os alunos agrupassem, depois de corretamente preenchidas as fichas, os seguintes pares de triângulos retângulos semelhantes: Triângulo 1 e Triângulo 6, Triângulo 2 e Triângulo 4, Triângulo 3 e Triângulo 8, Triângulo 5 e Triângulo 7.

Garantir os catetos inteiros foi uma escolha do sEM que gerava aproximações para os ângulos internos e a hipotenusa em alguns triângulos, tal como acontecia na tarefa de Mastronicola (2004). Dessa forma, a medida dos ângulos seria regulada por ser 180º a soma dos ângulos internos de um triângulo. O professor deveria se preparar com essas informações para o momento da implementação, a fim de mediar as aproximações dos alunos para essas medidas não exatas.

É possível perceber que a escolha dos triângulos para construir a Tarefa 3 dialoga diretamente com as Tarefas 1 e 2, na medida em que o sEM entende suas vantagens. Escolhemos quatro pares de triângulos retângulos desenhados em fichas individuais, permitindo o verdadeiro trabalho de busca de regularidades, tanto individual quanto em grupo, como na Tarefa 1. Porém, elegemos triângulos retângulos com os catetos de medidas representadas por números inteiros inseridos em uma malha quadriculada, como na Tarefa 2, o que facilitava os cálculos e diminuía as aproximações para a medida dos lados, que só ocorreria na hipotenusa.

A escolha das Tabelas

Como já apresentado anteriormente, a Tarefa 1 tinha muitas páginas com vários tipos de tabelas extensas e confusas. Por isso, já partiremos para a apresentação das tabelas da Tarefa 2. Nessa tarefa, na FA3 havia duas tabelas como a da Figura 4 e uma tabela com o mesmo formato, porém, com apenas duas colunas para preenchimento, direcionando o aluno a encontrar três grupos de triângulos coloridos.

Figura 4 – Nomenclatura dos catetos

✓ **Triângulos de cor** _____

Números dos triângulos semelhantes			
$\frac{cateto\ menor}{hipotenusa}$			
$\frac{cateto\ maior}{hipotenusa}$			
$\frac{cateto\ menor}{cateto\ maior}$			

Fonte: Mastronicola (2014, p. 60).

Em sua análise, o sEM compreendeu que o aluno poderia se confundir ao completar a tabela, caso decidisse usar a tabela com espaço para três triângulos semelhantes com um grupo de dois triângulos. Por outro lado, essa organização das tabelas indicava a intenção da autora para que o aluno encontrasse três grupos de triângulos semelhantes e sobrasse

um para a atividade da sequência.

A Tarefa 2 tem poucas orientações escritas, mas o formato em que ela foi planejada conduz a atividade dos alunos, deixando-a mais objetiva e clara.

Outra análise feita pelo sEM sobre a comparação das duas tarefas se refere a como nomear os catetos do triângulo retângulo em função de seus ângulos. Encontrar a hipotenusa é uma atividade de menor chance de erro, já que se trata do lado oposto ao ângulo reto e, também, o maior lado do triângulo retângulo. Porém, os outros dois lados do triângulo retângulo são nomeados em dependência de um ângulo agudo de referência – pode ser cateto oposto ao ângulo ou cateto adjacente ao ângulo. Mastronicola (2014) opta pela descrição cateto menor e cateto maior para explorar a nomenclatura dos lados dos triângulos solicitados na tabela a ser preenchida na FA3, como exemplifica a Figura 4. Inicialmente parece ser uma escolha prática. Em discussão no sEM, percebemos que, em um triângulo retângulo isósceles, não haverá cateto menor, nem o maior. E, ainda, o aluno pode associar que a razão em que aparece o cateto menor no numerador seja o seno e a outra, o cosseno. Além disso, com essa nomenclatura se perde a dependência da razão calculada em relação ao ângulo agudo do triângulo retângulo, resultado importante para associar à ideia das razões trigonométricas.

Para compor as tabelas que iriam desafiar os alunos a encontrar as regularidades entre as razões trigonométricas, o sEM nomeou os lados dos triângulos em relação aos seus ângulos, para sustentar os nomes presentes nas razões trigonométricas, sem complicar a compreensão dos alunos. A opção foi de acrescentar várias colunas nas duas tabelas que compunham cada ficha. Nelas, o aluno iria registrando as medidas encontradas, identificando em cada linha os nomes dos segmentos orientados.

Quadro 2 - Fragmento do enunciado da tarefa 3

Imagem das colunas contidas em cada uma das fichas individuais da tarefa 3

Ângulo	Relação catetos	Notação segmentos	Razão	Uso da calculadora
$A\hat{B}C =$	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } B}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	–	
	$\frac{\text{Cateto adjacente do ângulo } B}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	–	
	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } B}{\text{Cateto adjacente do ângulo } B}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$	–	

Ângulo	Relação catetos	Notação segmentos	Razão	Uso da calculadora
$A\hat{C}B =$	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } C}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	–	
	$\frac{\text{Cateto adjacente do ângulo } C}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	–	
	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } C}{\text{Cateto adjacente do ângulo } C}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$	–	

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

Na Tarefa 3, não apresentamos a teoria de forma isolada, mas procuramos direcioná-

la com os nomes de cada coluna, como no Quadro 2. Assim, o aluno preenchia o **Ângulo,** em seguida visualizava a coluna que identificava a **Relação catetos**, com a nomenclatura apropriada de Trigonometria no Triângulo Retângulo; em seguida, essa razão aparecia com **Notação segmento**s. Na quarta coluna, nomeada de **Razão**, deixamos uma barra em cada uma das linhas para representar a razão e não a fração e, por último, com o **Uso da calculadora**, deixamos a quinta coluna para o registro do valor encontrado para o cálculo da razão descrita em cada uma das linhas. Sem grandes explicações, os espaços foram devidamente alocados, planejados para que seu preenchimento levasse o aluno a refletir sobre os nomes – como, por exemplo, "razão" – ou a ação, como a coluna que pede para usar a calculadora.

Nesse momento do planejamento da tarefa Thaís percebeu que tinha aprendido e ensinava as razões trigonométricas para meus alunos, usando a notação sem especificar o ângulo de referência para o cateto: $\cos\theta = \frac{cateto\ adjcente}{hipotenusa}$, ao invés de $\cos\theta = \frac{cateto\ adjcente\ ao\ ângulo\ \theta}{hipotenusa}$. Quando voltamos a refletir sobre esta prática na elaboração desta narrativa, Cristina também se deu conta que utilizava esta mesma escrita com seus alunos. Em um primeiro momento, parece que é apenas uma questão simplificada. Por outro lado, na prática, percebemos que muitos alunos apresentam dificuldade de compreender a relação de dependência da razão trigonométrica em função de um ângulo, o que reitera a importância de marcar de forma correta essa dependência na notação usada.

O sEM decidiu orientar os alunos a fazerem aproximação de duas casas decimais com truncamento, para os resultados encontrados na calculadora. Essa medida era necessária para que, no momento de comparar as razões entre os triângulos semelhantes, os alunos encontrassem valores iguais. Nos testes efetuados no planejamento, se aumentássemos muito a precisão de casas decimais, era mais difícil de as razões dos triângulos semelhantes baterem nos pares de triângulos, haja vista os erros próprios das aproximações das medidas feitas com o uso dos instrumentos.

O produto das escolhas: apresentando a Tarefa 3

A Tarefa 3 foi construída com o objetivo de estabelecer relações entre ângulos-triângulos-razões dos lados em triângulos retângulos, identificar que triângulos semelhantes possuem as mesmas razões trigonométricas e conhecer a linguagem utilizada para nomeá-las.

Para compor a Tarefa 3, o professor deveria preparar previamente um material que seria usado na tarefa: um *kit* para cada grupo, para resolver a primeira e a segunda partes, e cartolina, canetinhas e fita adesiva, além de um computador disponível com projetor, para a terceira parte.

O *kit f*oi o nome que o sEM deu para um envelope cujo conteúdo era: oito fichas, como ilustra a figura 3, em que cada um dos oito triângulos destacados no Quadro 1 seria previamente desenhado à mão, pelo professor; quatro transferidores; quatro réguas; pelo menos duas calculadoras; um conjunto de oito triângulos recortados com folha de gramatura 180mm, com frente e verso da mesma cor; e quatro folhas A4, para que cada aluno fizesse

o registro do que encontrou e pudesse anexá-la no caderno, para posteriores consultas.

A tarefa ficou dividida em três partes: Parte 1 - Apresentação da tarefa, formação dos grupos, entrega dos kits, divisão das oito fichas entre os participantes do grupo. Medição dos ângulos e lados dos triângulos e registro/preenchimento da tabela, contemplando também o cálculo de razões entre os lados dos triângulos. Parte 2 - Busca de regularidades nas fichas anteriores, mediadas por quatro perguntas. Parte 3 - Elaboração de um cartaz e apresentação a toda a sala das aprendizagens construídas pelo grupo durante a atividade.

No Apêndice 1, apresentamos a íntegra do enunciado dessa tarefa construída pelo sEM.

O sEM previu, no planejamento, um momento de socialização – incluindo apresentação dos alunos, mediada pelos cartazes confeccionados pelos grupos, e um fechamento do professor, incluindo o uso do GeoGebra. Também foi elaborada uma tabela de planejamento que continha orientações para o professor no momento de implementar a tarefa: tempo de apresentação, atividade, objetivo, descrição da atividade, questões e orientações para o professor e para os alunos com respostas, ações e reações esperadas. Essa ação de preencher a tabela de planejamento foi bastante exaustiva, porém de fundamental importância para o professor sentir-se seguro e confiante. Afinal, trata-se de uma tarefa em uma atividade bastante desafiadora, de levar os alunos a explorarem e investigarem o problema proposto, sem dar respostas mais fechadas ou estabelecer conceitos de certo ou errado. Ademais, a aula foi organizada de modo sistemático, estudada, revista e refletida pelo grupo de professores.

A Tarefa na Ação da Sala de Aula

Thaís vivenciou esta experiência em sala de aula desde duas perspectivas distintas: como professora, sendo observada pelos colegas do subgrupo, e como observadora das aulas da Prof.ª Salgado na turma da manhã. A diferente experiência como observadora lhe trouxe diferentes pontos de vista: (1.º) conheceu um outro lugar da sala de aula, lugar passivo, silencioso, que marcou uma experiência nova para ela e também a levou a refletir sobre a própria prática; (2.º) distanciou-a da Tarefa 3, favorecendo a observação de item por item, desde o início, do comportamento e da reação dos alunos frente a tudo que foi planejado; (3.º) ajudou-a a compreender uma outra dimensão de complexidade da prática docente.

É interessante dimensionar os diversos tipos de interações que ocorrem durante a implementação da tarefa: os alunos preenchem as suas tabelas, mas eles querem acompanhar como seus colegas estão preenchendo. Olhar apenas o resultado do colega não ajuda, pois os triângulos de cada ficha dos integrantes do grupo são diferentes. Isso os motiva a compreender o raciocínio que o colega está usando, e não simplesmente copiar os valores que o colega encontrou.

Ao mesmo tempo em que há interação entre os alunos do grupo, sempre tem um membro do grupo atento ao que está acontecendo ao seu redor: com quem a professora

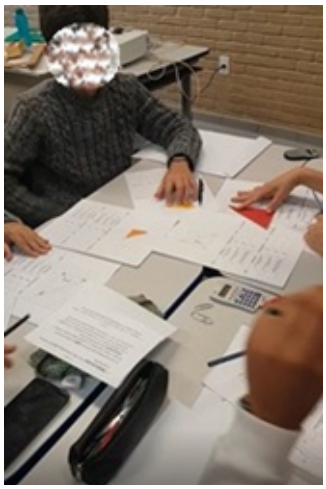
está falando? O que ela está falando? A maneira que ela está orientando outro grupo ajuda o meu grupo?

Quando os alunos se colocam a procurar as regularidades, eles espalham as fichas sobre as carteiras, a fim de enxergar todas elas ao mesmo tempo, ou ainda interagem com os triângulos recortados, como ilustram as imagens seguintes:

Figura 5 – Todas as fichas dispostas sobre a mesa, mas os alunos não manipulam os triângulos recortados

Fonte: Arquivo do GdS.

Figura 6 – Alunos manipulam os triângulos recortados em interação com as fichas



Fonte: Arquivo do GdS.

Na figura 5 temos a ilustração de um modo de organização das fichas sobre a mesa, para que os alunos procurassem as regularidades conforme enunciado, e, na figura 6, os estudantes interagem com os triângulos recortados, colocando-os sobre as fichas e usando movimentos de translação e rotação entre eles, para buscar os padrões propostos no enunciado.

A observação dos alunos interagindo com os diferentes triângulos planejados na tarefa – seja os desenhados nas fichas, seja os recortados em papel – indicava a contemplação

de um dos objetivos do sEM, desenvolvido no planejamento: o de explorar o conteúdo de diferentes maneiras, mediado pela tarefa, de acordo com as assimilações individuais de cada estudante.

A câmera registra um momento de interação de um grupo encontrando as regularidades do item (b) da segunda parte da tarefa (vide Quadro 3).

Quadro 3 – Fragmento do Enunciado da Tarefa 3

Enunciado da segunda parte da tarefa

2.ª PARTE

Trabalho em grupo: Reunir todas as fichas sobre a mesa para visualizá-las simultaneamente.

a) Quais regularidades estão presentes em todos os triângulos analisados?

b) Agora, encontre regularidades em subgrupos desses triângulos. Separe-os e explique, por escrito, como foi cada agrupamento.

c) Para construirmos um novo triângulo que pertença a um dos subgrupos determinados no item "b", que característica(s) deveria ter esse novo triângulo?

d) De acordo com o item "c", quanto(s) novo(s) triângulo(s) poderia(m) ser construído(s)?

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

Os alunos tiveram o seguinte diálogo:

A1: *Tipo assim, o triângulo número 1 e o número 6 têm o mesmo ângulo* $\hat{B}$.

A2: *Você acha que aqui é um subgrupo?*

A1: *É! É um subgrupo.*

A1: *Tinha um triângulo que era 31º também [e procura entre as fichas]. Aqui, olha.*

A3: *Então as fichas em que os ângulos são iguais, vamos separar eles.*

A1: *O triângulo número 2 e o número 4 também têm o mesmo ângulo* $\hat{B}$. *E olha, o* $\hat{C}$ *também é igual. (VÍDEO, 07/05/2018)*

Em um momento seguinte, o mesmo vídeo identifica um trabalho de um grupo com dificuldades de avançar sem a intervenção do professor.

J1: *Eu coloquei assim que nenhum possui todos os lados iguais.*

[Aluno J2, olhando os triângulos das fichas 8 e 4, aponta que eles têm o mesmo formato].

J2: *Todos têm isso aqui [e sinaliza para o ângulo retângulo do triângulo].*

J1: *Mas como é o nome disso? Tem que ter um nome!*

J2: *Eu acho que é triângulo retângulo.*

J1: *Triângulo...?*

J2: *completa: ... retângulo.*

J3: *Ah, mas nem todos são. Olha aqui.*

J3: *está com a ficha 4 que é um triângulo isósceles, e o movimento que ele faz com o lápis é como se tivesse completando o triângulo com outro triângulo igual,*

sobrepondo a hipotenusa, o que faz com que ele visualize um quadrado, e não um retângulo, do seu ponto de vista.

J2: *Mas todos têm esse formato.*

J1: *Não! Não! Mas olha... A gente tá falando tipo assim [e mostra uma ficha]. Existem triângulos que são assim, olha: [em resposta ao J3]. Todos têm esse. Abandona a ficha, pega dois triângulos coloridos da mesa e junta os ângulos retos desses triângulos, mostrando que eles se encaixam, formam um ângulo de 180º.*

J3: *O meu seria um quadrado.*

J2: *Mas tá certo, é esse formato. O formato dele é de triângulo retângulo.*

J1: *O seu pode até ser um retângulo, mas se tiver dois lados iguais vai ficar um quadrado. Não tem como. (VÍDEO, 07/05/2018)*

Apesar de o vídeo não filmar a continuação desse trabalho de negociação de significados no grupo, é possível ouvir que a professora consegue encaminhar essa discussão no grupo:

P: *Você falou que ele é um triângulo retângulo por causa do formato, não é? Vamos olhar todas as fichas e ver aonde é esse formato? [...] A palavra retângulo, vem de qual palavra? Reto! (VÍDEO, 07/05/2018)*

Conforme a professora vai abordando os grupos, ela vai verificando a produção deles e fazendo intervenções que levam os integrantes do grupo a avançarem quanto à produção segundo o objetivo da tarefa.

P: *Aonde elas são iguais?*

S1: *No resultado da calculadora.*

P: *O resultado da calculadora saiu de qual conta?*

S1: *Divisão.*

P: *Divisão! E qual é o nome dessa divisão, qual é o nome que é dado?*

S2: *Razão.*

P: *Razão! Esses resultados saíram da razão. Então o que que são iguais? As razões [com concordância dos alunos]. Agora, só as razões? Olha de novo para as duas fichas. Só as razões são iguais?*

S1*: Os ângulos também. (VÍDEO, 07/05/2018)*

Após a implementação, Thaís e a professora Salgado discutiram, a partir de suas experiências de observação uma da outra, refletindo sobre a complexidade do trabalho docente. Perceberam que quando atuam como professoras, agem "no automático", pois lidam com muitos raciocínios e perguntas simultaneamente. A observação de uma, do trabalho da outra, enquanto faz a gestão da sala de aula, traz essa complexidade para um primeiro plano:

Salgado: *[...] no movimento da sala você chega de uma pergunta a outra pergunta e às vezes você precisa parar mais, entender mais o que o aluno está te perguntando para não sair dando respostas.*

> **Thaís:** *A questão é que você tem que fazer isso em um intervalo de tempo muito pequeno, e esse tipo de interação repetidas vezes. (ÁUDIO, 04/06/2018)*

Esse diálogo acontece, pois, no momento da aula, nossas participações com os alunos são tão intensas, que nem conseguimos compreender tantos fatos que ocorreram, mas eles vão ficando visíveis no processo de sistematização e análise com os observadores e ao visitar os registros feitos durante as aulas.

Aprendizagens

A análise das tarefas evidencia o trabalho docente – de planejamento e elaboração – em que o professor usa seus conhecimentos para selecionar e tratar a informação que levará para a sala de aula, adequando-a ao seu objetivo geral e matemático. Esse tratamento da informação revela as escolhas feitas para favorecer o processo complexo de ensino e aprendizagem que acontece em um coletivo que é a sala de aula, composto de indivíduos únicos, que se expressam de forma heterogênea, com singularidades no processo de aprender e se comunicar. Cenário vivo e real na experiência profissional do professor.

Apesar de nós nomearmos como Tarefa 3, não se trata de uma única tarefa, mas de versões de uma tarefa que foram sendo construídas pelo sEM. Assim, cada versão surgia do trabalho de modificar o enunciado a partir das nossas discussões, corrigindo ou acrescentando informações, em um movimento de trabalho colaborativo dos professores em diálogo com suas práticas de sala de aula, seus alunos e outros interlocutores que auxiliaram esse processo de construção.

Quando nós, professores do sEM, resolvemos as diferentes tarefas, conseguimos ampliar nossas estratégias didático-pedagógicas. Foi bastante produtivo para compreendermos possibilidades de outra prática matemática, além dos cálculos e da memorização de fórmulas. Compreender como as tabelas trigonométricas eram construídas refletia em compreender como usá-las em outras situações. Essa é uma prática valorizada no GdS, pois os professores simulam o trabalho do aluno e discutem as decisões que vão tomar, levando em conta o processo que viveram. Muitas vezes, nesse processo, os integrantes visitam suas memórias e relatam experiências vividas na época escolar, fazendo um esforço para compreender o caminho que fizeram para aprender de forma que os inspire no processo de ensinar.

A experiência de desenvolver e implementar essa tarefa, contemplando as três fases do ciclo do LSH, mediado por prática colaborativa, marca diversos cenários das nossas aprendizagens:

(1.º) A percepção das nossas deficiências como professoras e da pouca importância que dávamos à sistematização e ao tempo necessário para que os alunos façam um registro com uma síntese/resumo do que aprenderam;

(2.º) A compreensão da complexidade dessa tarefa, da importância das escolhas fundamentadas em uma discussão entre professores, contrapondo diferentes modos de

aprender e interagir com o conteúdo e a relevância de simulações e testes, assim como de um planejamento detalhado, para que tarefas exploratório-investigativas sejam cenários mais presentes nas salas de aulas da rede pública paulista.

(3.º) A necessidade de ampliação de vocabulário e mais cuidado na escrita dos enunciados.

(4.º) A riqueza de compartilhar estratégias, raciocínios, práticas de intervenção com os alunos, entre professores engajados em compreender melhor a sala de aula, com o objetivo de transformar positivamente esse cenário.

(5.º) A compreensão da importância do planejar e de quantificar o tempo investido para que haja melhora da atividade de sala de aula.

Boas perguntas geram cenários em que os alunos exploram a criatividade própria de cada um, aprendendo a ter outro tipo de relacionamento com o conhecimento, valorizando o que aprendem. Esses cenários exigem formação, planejamento e, também, análise e sistematização. Dessa forma, cada uma das três fases do ciclo foi importante para dimensionar a complexidade e a riqueza do trabalho docente. Viver essa tarefa sozinha não permitia a Thaís avançar nas questões que ela tinha. Refletir sobre a experiência vivida por Thaís durante o primeiro ciclo do LSH nos permitiu perceber como as diferentes participações ampliavam as lentes para olhar para essa tarefa.

Encerramos esta narrativa com várias frentes para que possamos retornar e investigar. Foi um processo bastante trabalhoso, mas de incontáveis experiências formadoras. Já conseguimos perceber mudanças práticas no nosso fazer docente, como pormenorizado nas linhas acima. Seguimos aprendendo e mudando!

Referências

MASTRONICOLA, N. O. *Trigonometria por apps*. 2014. 66f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

OLIVEIRA, T. TRIGONOMETRIA: *A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos.* 2010. 177f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 149p.

DE PROFESSORA A PESQUISADORA: INVESTIGANDO A COMUNICAÇÃO NA SALA DE AULA

Maria Aparecida de Jesus Salgado

O primeiro ciclo de *Lesson Study* Híbrido (*LS*H)[13] aconteceu no segundo semestre de 2017. Naquela ocasião, o subgrupo do Ensino Médio (sEM)[14], do qual faço parte, se apoiou na proposta de Skovsmose (2014) ao trabalhar com cenários para investigação e elaborou uma tarefa para ensinar e aprender trigonometria no triângulo retângulo, direcionada aos alunos de 1.ª série do Ensino Médio (EM). O trabalho com cenários para investigação requer lidar com questões abertas, proporcionando exploração e construção de raciocínio, levando o aluno a refletir sobre as diferentes respostas para uma mesma questão. Tal proposta envolve deixar de lado o paradigma do exercício (SKOVSMOSE, 2014).

Ao longo dos anos, tenho notado que a comunicação em sala de aula tem sido um desafio para mim. Aprender a ouvir com atenção o que o aluno tem a dizer durante as aulas é algo que me interessa. Percebo que nem sempre consigo desencadear pensamentos reflexivos a partir de perguntas lançadas pelos alunos. Neste caso, aproveito esta análise para explorar como é que estou me comunicando em sala de aula e descobrir: como é que eu faço para interpretar melhor o que meus alunos falam? Quero, assim, elevar a qualidade da minha comunicação em sala de aula.

Portanto, quero com essa narrativa refletir e analisar como se deu a comunicação em sala de aula durante a implementação de um cenário para investigação. Para atingir esse objetivo, selecionei alguns diálogos de um grupo de alunas, coletados durante a implementação da tarefa. Irei analisar em detalhe os diálogos que ocorrem entre o grupo de alunas e a professora e entre as alunas no próprio grupo.

Todas as informações que trago no meu relato são recortes que faço a partir dos registros coletados em formato de vídeos, áudios, fotos, cartazes e produções dos alunos. Os episódios observados aconteceram na Escola Estadual Patriarca da Independência – Vinhedo SP, sendo eu a professora. Tratava-se de uma turma do período da manhã, com 32 alunos presentes, divididos em grupos de 4 alunos. A sala era pequena para essa quantidade de alunos. A implementação teve duração de 4 aulas de 50 minutos cada. Contou com a participação de 2 observadores que são membros Grupo de Sábado (GdS): Wellington, mestrando da Faculdade de Educação – Unicamp, e Thaís, professora do Instituto Federal

[13] Lesson Study Híbrido (LSH) está inserido num projeto proposto pelo Grupo de Sábado (GdS) e é financiado pela FAPESP.

[14] O Grupo de Sábado foi subdividido em três subgrupos – Ensino Fundamental Anos Iniciais, Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio.

de São Paulo – *Campus* São João da Boa Vista.

Apresento o relato em algumas seções: primeiro falo sobre a construção da tarefa; depois sobre o modelo utilizado para analisar o episódio. A seguir, desenvolvo a análise dos diálogos que se produziram durante a implementação da tarefa. Finalizo, tecendo algumas considerações.

Sobre a Construção da Tarefa

A partir do tema Trigonometria no Triângulo Retângulo, estudamos, em nossas reuniões semanais, duas propostas de abordagem em sala de aula, sugeridas nas dissertações de Oliveira (2010) e Mastronicola (2014). Como fruto das nossas discussões, desenvolvemos uma tarefa com o propósito de:

a) Estabelecer relações entre ângulos, triângulos e razões entre as medidas dos lados em triângulos retângulos.

b) Identificar que triângulos semelhantes possuem as mesmas razões trigonométricas.

Ao planejar a tarefa, optamos por construir oito triângulos retângulos desenhados em malha quadriculada de 1 cm x 1 cm, formando quatro pares de triângulos semelhantes. Decidimos que as medidas dos catetos seriam números inteiros. Como consequência, algumas das medidas das hipotenusas eram números decimais. Os ângulos não eram notáveis, exceto para triângulos isósceles com ângulo de 45°.

Os triângulos escolhidos estão indicados no Quadro 1:

Quadro 1 – Tabela com os oito triângulos escolhidos

Triângulo 1	Triângulo 2	Triângulo 3	Triângulo 4
Catetos 5 e 10 cm Ângulos agudos: 63º e 27º Hipotenusa: 11,2 cm	Catetos 6 e 10 cm Ângulos agudos: 59º e 31º Hipotenusa: 11,7 cm	Catetos 6 e 8 cm Ângulos agudos: 53º e 37º Hipotenusa: 10 cm	Catetos 9 e 15 cm Ângulos agudos: 59º e 31º Hipotenusa: 17,5 cm
Triângulo 5	**Triângulo 6**	**Triângulo 7**	**Triângulo 8**
Catetos 4 e 4 cm Ângulos agudos: 45º e 45º Hipotenusa: 5,7 cm	Catetos 4 e 8 cm Ângulos agudos: 63º e 27º Hipotenusa: 8,9 cm	Catetos 6 e 6 cm Ângulos agudos: 45º e 45º Hipotenusa: 8,5 cm	Catetos 9 e 12 cm Ângulos agudos: 53º e 37º Hipotenusa: 15 cm

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

Construímos uma ficha para cada triângulo retângulo, e nela foi disponibilizada uma tabela para registrar suas medidas e observar suas relações, conforme o Quadro 2.

Quadro 2 – Fragmento do enunciado da tarefa

Exemplo de uma ficha contendo um triângulo e uma tabela

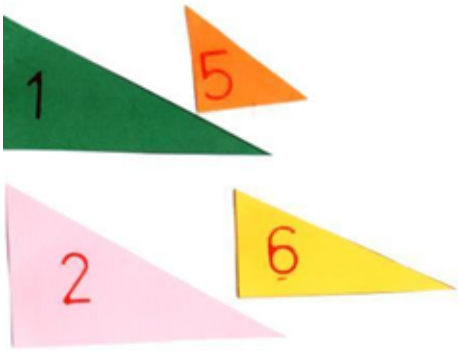
Ângulo	Relação catetos	Notação segmentos	Razão	Uso da calculadora
$A\hat{B}C =$	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } B}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	—	
	$\frac{\text{Cateto adjacente do ângulo } B}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	—	
	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } B}{\text{Cateto adjacente do ângulo} B}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$	—	

Ângulo	Relação catetos	Notação segmentos	Razão	Uso da calculadora
$A\hat{C}B =$	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } C}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	—	
	$\frac{\text{Cateto adjacente do ângulo } C}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	—	
	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } C}{\text{Cateto adjacente do ângulo } C}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$	—	

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

Os mesmos triângulos foram construídos em papel cartão colorido (Figura 1), a fim de o aluno explorar a sobreposição de dois ou mais triângulos e observar suas relações, associando com a tabela.

Figura 1 – Triângulos construídos em papel cartão colorido



Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

A tarefa foi elaborada, prevendo três etapas. Na primeira, os alunos, trabalhando em grupos de quatro integrantes, deveriam usar os instrumentos de medida (régua e transferidor) para encontrar as medidas dos lados e dos ângulos de cada triângulo retângulo e registrá-las no próprio triângulo e na ficha. Em seguida, deviam preencher a tabela com esses valores e,

utilizando a calculadora, fazer a divisão entre as medidas dos lados, conforme solicitado na tabela. A segunda etapa contemplava a identificação dos triângulos semelhantes, a partir de regularidades presentes em todos os triângulos, as quais permitiam reuni-los em subgrupos. A generalização subsequente permitia construir um novo triângulo, pertencente a qualquer um dos subgrupos identificados na tarefa. Por último, os alunos eram convidados a construir um cartaz que permitisse socializar com as demais equipes o trabalho realizado.

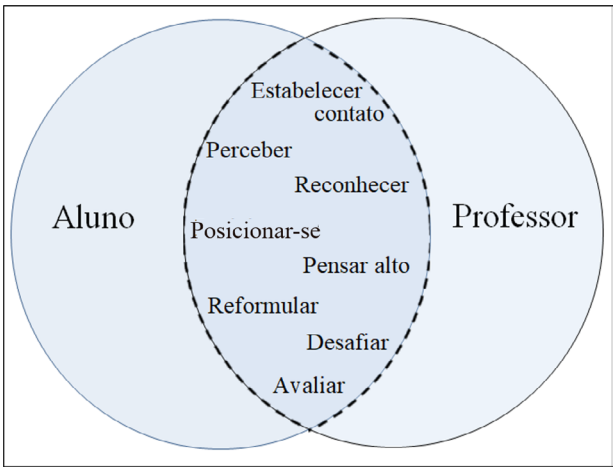
Combinamos que cada grupo receberia um envelope contendo um *kit* com caneta hidrocor, régua, transferidor, calculadora, uma folha com as orientações para desenvolver a atividade, quatro folhas de papel tamanho A4 para responderem as questões, oito fichas e oito triângulos recortados em papel cartão. Cada aluno, dentro do grupo, seria responsável por preencher duas fichas.

No Apêndice 1, apresentaremos a versão na íntegra do enunciado desta tarefa.

Sobre o recurso utilizado para analisar o episódio

Os diálogos foram analisados sob a luz do Modelo de Cooperação Investigativa, proposto por Alrø e Skovsmose (2006). No ensino da matemática tradicional, o professor começa por propor algumas técnicas matemáticas para resolver determinados exercícios. Depois os alunos aplicam tais técnicas para resolver exercícios e chegar a uma resposta esperada. Diferentemente, o Modelo de Cooperação Investigativa foi criado para analisar e descrever o tipo de comunicação que acontece em sala de aula quando se rompe com o paradigma do exercício e os alunos se comprometem com o aprendizado, num cenário para investigação. O modelo é formado por um conjunto de atos de comunicação que permitem reconhecer como se comunicam professores e alunos, e alunos entre si, quando operam juntos ("co-operam") na indagação de uma questão matemática. Fazem parte deste modelo os seguintes atos de comunicação (Figura 2):

Figura 2 – O Modelo de Cooperação Investigativa



Fonte: Alrø e Skovsmose (2006, p. 69).

• **Estabelecer contato:** envolve principalmente criar uma sintonia com o colega. O ouvinte tem a responsabilidade de tentar entender os fatos e os sentimentos envolvidos naquilo que ouve, para começar a cooperar. Requer estar presente e prestar atenção ao outro e às suas contribuições, numa relação de respeito mútuo.

• **Perceber:** significa descobrir alguma coisa da qual nada se sabia ou de que não se tinha consciência antes. Envolve uma atitude de curiosidade para tentar compreender a forma de interpretar certo problema. É um processo de examinar possibilidades e experimentar coisas. Perceber significa aproximar-se de um assunto e insistir nele, antes de rejeitá-lo.

• **Reconhecer:** implica examinar perspectivas e ideias que foram percebidas e abrir o caminho para reconhecer uma perspectiva e fazê-la conhecida por todos os envolvidos na investigação. É tentar delinear as ideias matemáticas para que se dê sentido às atividades e aos cálculos subsequentes. Reconhecer a natureza do problema e apropriar-se dos procedimentos matemáticos permite aprofundar a investigação.

• **Posicionar-se:** é dizer o que se pensa e, ao mesmo tempo, estar receptivo à crítica a suas posições e pressupostos. Compreende fazer declarações ou apresentar argumentos para defender sua posição ou para investigar conjuntamente um assunto ou uma perspectiva.

• **Pensar alto**: significa expressar pensamentos, ideias e sentimentos durante um processo de investigação. É falar em voz alta o raciocínio que se faz mentalmente durante o processo de investigação.

• **Reformular:** envolve repetir o que já foi dito, com palavras ligeiramente diferentes ou com um tom de voz diferente. É esclarecer sua perspectiva com outras palavras e buscar entendimento comum sobre o problema.

• **Desafiar:** compreende tentar desenvolver uma nova proposta em outra direção ou questionar conhecimentos ou perspectivas já estabelecidos. Esclarecer perspectivas é uma precondição para que se possa desafiar de forma "qualificada". O desafio deve estar à altura do entendimento do aluno, nem mais nem menos. O professor também deve estar preparado para ser desafiado pelo aluno.

• **Avaliar:** é chegar a um propósito comum e validar o processo de investigação de maneira contínua. É valorizar as descobertas de forma crítica e construtiva.

Esses atos de comunicação não obedecem a uma ordem de hierarquia. Para sinalizar que houve uma comunicação investigativa, eles podem aparecer mais de uma vez cada um, e também não precisam aparecer todos no mesmo diálogo. De acordo com Alrø e Skovsmose (2006), as formas de comunicação que se estabelecem em sala de aula estão associadas a diferentes qualidades de aprendizagens, ou seja, estão associadas à forma particular de cada um aprender durante o processo de cooperação investigativa. Assim, quando a comunicação na sala de aula passa a assumir as características do modelo de cooperação investigativa, e quando professores e alunos se comprometem nos atos de comunicação previamente elencados, a aprendizagem matemática adquire outros sentidos.

Segundo Skovsmose (2014), um cenário para investigação é um terreno sobre o qual as atividades de ensino-aprendizagem acontecem. Contudo, o convite para participar do cenário investigativo precisa ser aceito pelos alunos. Aceitar o convite implica, tanto para

os alunos como para o professor, sair da zona de conforto – trabalhar com exercícios de respostas prontas – e entrar numa zona de risco: trabalhar com questões cujas respostas são diversas. Sendo assim, tudo depende da natureza do convite. É possível, por exemplo, que ele seja aceito somente por alguns grupos de alunos.

A seguir, voltemos nosso olhar para a análise dos episódios selecionados, os quais ocorreram durante a implementação do cenário para investigação, em minha sala de aula.

Análise de diálogos produzidos durante a implementação da tarefa

Todos os grupos de alunos já tinham efetuado as medidas dos lados e dos ângulos dos triângulos na aula anterior. Sendo assim, a implementação observada teve início com o preenchimento das tabelas, compostas por cinco colunas, conforme mostra o Quadro 2. A primeira coluna deveria ser preenchida com o ângulo em referência. A segunda mostra a relação entre os lados do triângulo e o ângulo em destaque. A terceira utiliza a notação desses lados. A quarta, que é a razão, deveria ser preenchida com as medidas dos segmentos. E a quinta deveria receber o resultado da divisão entre as medidas indicadas na coluna anterior, a ser obtido utilizando a calculadora.

O episódio que vou destacar aconteceu em três momentos diferentes, num grupo de quatro meninas: Estela (E), Jéssica (J), Marina (Ma) e Mayara(M)[15]; eu, como professora (P); e a professora Thaís (T), como observadora. Para reconstruir esses episódios utilizei como recursos a filmagem captada pela câmera de celular da professora observadora Thaís, a filmagem captada pela filmadora que estava nas mãos do observador Wellington e o áudio do gravador que estava sobre a mesa do grupo.

A complexidade da sala de aula diante de ações que não estavam previstas

O grupo estava tentando preencher a última coluna da tabela do triângulo n.º 6, cujos catetos mediam 4 cm e 8 cm e a hipotenusa, 8,9 cm. Embora tivessem a calculadora em mãos para efetuar as divisões solicitadas, recorreram a um aplicativo do celular, Photomath[16], para realizar a divisão entre o cateto de 4 cm e a hipotenusa de 8,9 cm. Quando digitaram $\frac{4}{8{,}9}$ no aplicativo, ele transformou 8,9 em uma fração, obtendo $\frac{4}{\frac{89}{10}}$. Depois, utilizou o procedimento de divisão entre frações e deu $\frac{40}{89}$ como resultado. Perante esse resultado, o grupo me chamou para obter maiores esclarecimentos, conforme ilustra o diálogo:

> **M:** *Professora, a gente estava com problema, porque aqui era 4 dividido por 8,9 [mostra na tabela]. Como a gente não estava lembrando...*
>
> **P:** *Isso.*
>
> **M:** *Como a gente não estava lembrando muito... [mostra a anotação* $\frac{40}{89}$ *que estava na ficha para professora].*

[15] Os nomes das alunas foram trocados por pseudônimos escolhidos por elas.

[16] https://play.google.com/store/apps/details?id=com.microblink.photomath&hl=pt_BR

> **P:** *[Interrompendo e olhando para ficha] Não, não é 40. É 4, cuidado. É a medida que está aqui [aponta para o triângulo] ... quatro.*
>
> **M:** *Como a gente não estava lembrando, a gente colocou no aplicativo. E ele deu que tinha que multiplicar esse pelo de baixo. Então ficaria 89 dividido por 40 [mostra as anotações da ficha para professora].*
>
> **P:** *[Pega a calculadora] Não. Mas olha aqui na calculadora. É que é 8,9 e não 89. Ah, entendi, entendi... Tudo bem. Isso tá certo, mas você poderia ter feito na calculadora direto, 4 dividido por 8,9 [A professora resolve na calculadora 4 dividido por 8,9].*
>
> **M:** *É que assim fica mais fácil para entender na hora de fazer a conta.*
>
> **P:** *Ah, você entende melhor. É que na realidade você está tirando a vírgula. Mas você entendeu o que o aplicativo te falou? Na verdade, é isso aqui [vira a ficha no verso e escreve a fração* $\frac{4}{8,9}$ *]. Não sei fazer conta de dividir, eu multiplico por 10 em cima e multiplico por 10 embaixo [escreve a conta* $\frac{4 \times 10}{8,9 \times 10} = \frac{40}{89}$ *]. 40 e 89. É isso que o aplicativo mandou você fazer, deu para entender? Mas, como você tem calculadora, não precisava usar aquilo ali.*
>
> (VÍDEO, 30/10/2017)

Quando Mayara me chamou para dizer que o grupo estava com um problema, ela estava tentando **estabelecer contato** comigo. E eu respondo: "*Isso*", que foi a maneira que encontrei para expressar meu interesse e encorajá-la a continuar. Ou seja, eu também estava tentando **estabelecer contato**. Mayara, mais uma vez, tenta **estabelecer contato** e não consegue completar sua frase, devido a minha interrupção. Isso ocorreu porque, dessa vez, eu estava prestando atenção às notações da ficha. Ao olhar aqueles valores, interfiro: "*Não, não é 40. É 4, cuidado. É a medida que está aqui... quatro*". Confesso que naquele momento levei um susto, de onde tinham aparecido aqueles números, se as medidas do triângulo eram 4 cm, 8 cm e 8,9 cm? E alertei que estavam usando valores incorretos. Ou seja, eu estava mais preocupada em corrigir o que eu achei que poderia ser um erro da aluna do que em perceber o que ela tinha feito. Em seguida, Mayara conseguiu dizer que fez uso de um aplicativo e disse: "*E ele deu que tinha que multiplicar esse pelo de baixo*". Segundo minha compreensão, Mayara utilizou a expressão "*esse*" *no lugar de 4 e "de baixo"* no lugar de 10. Talvez a dúvida de Mayara fosse querer esclarecer por que o aplicativo fez 4 × 10, ficando então $\frac{40}{89}$. Iniciei minha fala, sem entender o que Mayara queria me dizer. Eu insisti para utilizar a calculadora, que era o procedimento que eu e o sEM tínhamos previsto. Jamais imaginamos que alguém fosse utilizar um aplicativo para fazer uma divisão, tanto é que fornecemos uma calculadora como material de apoio. Só quando comecei a explicar para ela que era 8,9 e não 89, me deu um clique. Vi que, multiplicando 8,9 por 10 daria 89. Isso me levou a pensar que o aplicativo tinha multiplicado os dois elementos da razão por 10, obtendo 40/89. Na sequência, insisto para a aluna usar da calculadora. Mayara não aceita minha sugestão. Ela se posiciona, defendendo o procedimento que ela seguia. Usar o aplicativo lhe permitia compreender melhor como realizar a conta. Então, procuro **reestabelecer** contato com a aluna e **reformulo** minha explicação sobre como o aplicativo chegou em $\frac{40}{89}$.

Agora percebo que, naquele momento, em lugar de dialogar com Mayara, comecei

a ter um diálogo comigo mesma. Assim, fui expondo inquietações que eu mesma respondia: "*Não sei fazer conta de dividir, eu multiplico por 10 em cima e multiplico por 10 embaixo*". Desse modo, as inquietações serviam apenas para direcionar minhas próximas falas. No final, eu **avalio** o procedimento do aplicativo, dando a entender que seu uso foi desnecessário, pois ela tinha em mãos uma calculadora.

A partir da análise desse episódio, é possível perceber que não é tão simples estabelecer uma cooperação investigativa, quando o professor encontra uma resolução inesperada. Nesse momento da tarefa eu estava preparada para responder perguntas relacionadas com o uso do transferidor, da régua ou da calculadora, mas jamais imaginei que fosse responder perguntas relativas ao uso de um aplicativo para fazer a divisão entre um número natural e um decimal. Eu não conhecia o aplicativo, e elas também não o mostraram para mim. Fiquei desestruturada e sequer deixei a aluna concluir a sua pergunta inicial. Nunca saberei qual era o problema que mobilizou o grupo a me chamar. Além da dificuldade em manter um diálogo com as características de uma cooperação investigativa, hoje percebo que houve também, por minha parte, uma má interpretação do uso da barra. A barra utilizada na ficha não estava representando uma fração. Ela simbolizava a razão entre duas medidas do triângulo. Ao escrever e explicar que poderiam multiplicar as duas medidas por dez, passei a tratar a razão entre as medidas como se fosse uma fração, e não era o caso. Para ser uma fração, numerador e denominador precisam ser números inteiros, e o denominador, necessariamente, diferente de zero.

Quero ressaltar que o sEM tinha combinado que não iria permitir o uso do celular em sala de aula, a fim de evitar distrações com redes sociais. No entanto, o grupo utilizou, sem pedir permissão, porque os alunos já sabiam que em aulas normais eu autorizo seu uso, desde que seja em benefício da nossa aula. Sendo assim, não fiquei desestruturada porque fizeram uso do celular, e sim porque durante o planejamento não havia sido cogitada essa possibilidade. Nenhuma de nós, membros do sEM, conhecia esse aplicativo. Porém, quero destacar que ele foi uma contribuição importante, pois nos mostrou que é possível utilizar as novas tecnologias em sala de aula, a nosso favor.

Momento de cooperação investigativa na equipe

Nessa fase o grupo já tinha descoberto as regularidades que permitiam agrupar os triângulos, ou seja, seus ângulos tinham que ser congruentes e seus lados proporcionais. A partir desse trabalho, as alunas tinham formado quatro subgrupos, cada um composto por dois triângulos semelhantes. Nesse momento, cada aluna tinha sobre sua carteira as fichas correspondentes a um dos subgrupos. Elas se colocaram a responder o item "c" da segunda parte da tarefa (Quadro 3):

Quadro 3 – Fragmento do enunciado da segunda parte da Tarefa

Segunda PARTE
Trabalho em grupo: Reunir todas as fichas sobre a mesa para visualizá-las simultaneamente. **a)** Quais regularidades estão presentes em todos os triângulos analisados? **b)** Agora, encontre regularidades em subgrupos desses triângulos. Separe-os e explique, por escrito, como foi cada novo agrupamento. **c)** Para construirmos um novo triângulo que pertença a um dos subgrupos determinados no item "b", que característica(s) deveria ter esse novo triângulo? **d)** De acordo com o item "c", quanto(s) novo(s) triângulo(s) poderia(m) ser construído(s)?

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

Segue o diálogo que Mayara e Estela tiveram quando tentaram resolver essa questão:

> **M:** *Só que aqui... se quiséssemos um novo triângulo que pertença a um dos subgrupos. No caso vai ter que mexer no tamanho, porque, se ele aumentou de tamanho, os dois devem ser diferentes, só que o ângulo vai ter que ser o mesmo, não vai mudar. [inaudível] Tem que ser a mesma coisa de ângulo.*
>
> **E:** *Então é só fazer um com os mesmos ângulos, só que: como fazer? Tem que ter os mesmos ângulos dos dois? É. Porque é igual, né?*
>
> **M:** *Isso. Tem que ser um terceiro triângulo com os mesmos ângulos. A razão tem que ser idêntica.*
>
> **E:** *Pensa comigo...*
>
> **M:** *Sim, amiga, eu entendi, é só mexer na medida [dos lados]. Agora a gente tem que entender como é que mexe.*
>
> **E:** *A gente só muda a hipotenusa. A gente pode fazer um triângulo de qualquer tamanho, mudando as medidas, a gente só vai mexer na hipotenusa. É aonde a gente vai mexer.*
>
> **M:** *Entendi. Agora, como a gente vai mexer isso, minha amiga?*
>
> (ÁUDIO, 30/10/2017)

Mayara começa lendo em voz alta o enunciado da questão: "*se quiséssemos um novo triângulo que pertença a um dos subgrupos*". Em seguida, começa a refletir sobre o que fazer para construir tal triângulo: "*porque se ele aumentou de tamanho os dois devem ser diferentes, só que o ângulo vai ter que ser o mesmo, não vai mudar*". Os dois triângulos, o de referência e o novo, seriam diferentes devido às medidas dos lados, mas deveriam manter o ângulo. Assim, ao **pensar alto**, formaliza uma das características para triângulos semelhantes, que é ter ângulos congruentes. Mayara e Estela continuam a discutir a respeito da construção de um novo triângulo que seja semelhante a outro dos triângulos propostos pela tarefa. Estela reconhece que o novo triângulo precisa ter ângulos de mesma medida para pertencer ao subgrupo e lança um **desafio**: "*como fazer?*". Mayara **pensa alto** novamente e formaliza outra característica própria dos triângulos semelhantes: a razão entre dois lados de um dos

triângulos deve ser igual à razão entre os dois lados correspondentes do outro triângulo. Desse modo, ela **reconhece** as características que descobriu, ao resolver a questão anterior.

Vale recordar que cada grupo recebeu oito triângulos iguais aos que estavam nas fichas, porém recortados em papel cartão colorido (Figura 01). Com esses triângulos em papel cartão, o grupo poderia sobrepor dois triângulos semelhantes e validar de maneira concreta que tinham ângulos congruentes. Então, quando Mayara diz "*eu entendi é só mexer na medida. Agora a gente tem que entender como é que mexe*", imagino que ela estivesse fazendo a sobreposição de dois triângulos. Em seguida, Estela complementa: "*A gente só muda a hipotenusa. A gente pode fazer um triângulo de qualquer tamanho, mudando as medidas, a gente só vai mexer na hipotenusa*". Foi nesse momento que Estela **percebeu** que, fixando o ângulo reto e prolongando a reta suporte de cada cateto, poderia traçar infinitas hipotenusas paralelas à que já existia. Mayara concorda com Estela, mas não parece estar muito convencida e faz outro **desafio:** "*Entendi. Agora, como a gente vai mexer nisso?*" – "*nisso*" significa nas medidas dos lados. Nestas falas entendo que Mayara e Estela estão tentando reconhecer um procedimento matemático.

As alunas continuam trabalhando de forma colaborativa. Mayara e Estela, juntas, se dispõem a responder o desafio com uma nova proposta.

> **E:** *A gente não media aqui com a régua? [se refere a medir a hipotenusa]. A hipotenusa não deu 10? [se refere ao triângulo n.º 3, cujas medidas são 6 cm, 8 cm e 10 cm].*
>
> **M:** *Deu 15 [se refere à medida da hipotenusa do triângulo n.º 8, que Mayara estava olhando, cujas medidas eram 9 cm, 12 cm e 15 cm] ... Não 8, mas 8 + 5 não é 12. Então, não está aumentando regularmente. Amiga, eu não estou discordando. Caaaalma, tá? Olha... eu mexi aqui na razão [se refere à razão que tinham completado na tabela desse triângulo, ou seja* $\frac{9}{15}$*. Se eu aumentar duas vezes o número, teria que ser 18 esse aqui [se refere ao comprimento de um dos catetos do novo triângulo] e 30 esse daqui [se refere ao comprimento da hipotenusa do novo triângulo]. Se eu fizer isso, o ângulo permanece o mesmo, mas a minha hipotenusa vai mudar. Então, só que eu não sei como a medida do lado de fora pode ser, eu posso pôr 18 e 30, mas esse aqui [se refere ao outro cateto] eu poderia colocar 50. Tem que descobrir o que eu vou mexer nesse daí. Aqui daria 18 e aqui daria 30, o 12 eu ia mexer... se eu multiplicar por 2, dá 24 também, então eu estaria aumentando ele de tamanho. A mesma coisa eu faria com esse [se refere ao triângulo n.º 3 que estava com Estela], aqui deu 10 [se refere à medida da hipotenusa desse triângulo] ... aqui viraria 20, aqui viraria 16 e aqui viraria 12. O meu ângulo ia continuar o mesmo. A razão também, porque, se eu fizer 18 dividido por 30, vai dar 0,60. Dá pra aumentar, sim, o tamanho dele. Tenta fazer o seu.*
>
> (ÁUDIO, 30/10/2017)

Por um instante parece que Estela sugere medir com a régua a nova hipotenusa, ao dizer "*A gente não media com a régua?*", mas essa proposta não se fortaleceu. Mayara, **pensando alto**, começou a testar algumas hipóteses. A partir da disposição dos triângulos sobre a carteira, ela observou o subgrupo de triângulos n.º 3 e n.º 8, cujas medidas das

hipotenusas são, respectivamente, 10 cm e 15 cm, e percebeu que, somando 5 cm à medida de uma hipotenusa, encontrava a medida da outra (10 + 5 = 15). Mas essa relação rapidamente foi excluída, visto que não era válida para os catetos. Assim, ela somou 5 cm ao cateto de 8 cm e não teve como resultado a medida do cateto do outro triângulo, que era 12 cm. Portanto, Mayara descartou o procedimento de somar certa quantidade a cada um dos lados de um dos triângulos do subgrupo para formar um triângulo semelhante. Diante de sugestões que não foram válidas, Mayara busca **reestabelecer contato**, ao dizer: "*Amiga, eu não estou discordando. Caaaalma, tá*". É possível perceber que Mayara assumiu uma postura investigativa. Ela parecia verdadeiramente envolvida numa pesquisa. Isso fica evidente quando coloca hipóteses e as testa para ver o resultado; quando percebe que a hipótese não era certa e sai à procura de uma nova. Continuando suas explorações, Mayara faz outra descoberta. Ela deixa de se focar na representação geométrica dos triângulos e passa a buscar outro caminho, a partir da tabela. Focando na razão que está disposta na tabela $\frac{9}{15}$, multiplica as duas medidas por dois, obtendo 18 cm e 30 cm. Assim, 18 cm seria o comprimento de um dos catetos do novo triângulo e 30 cm o da hipotenusa. Porém, ainda não compreende o que fazer para encontrar a nova medida para o outro cateto. De repente, **reformulou** sua ideia: "*Aqui daria 18 e aqui daria 30, o 12 eu ia mexer... se eu multiplicar por 2, dá 24 também*". Então, Mayara **percebe** que, ao multiplicar todas as medidas do triângulo n.º 8 por 2, obteria um novo triângulo semelhante. É nesse momento que ela **reconhece** o procedimento matemático que lhe permitia resolver o problema. E, assim que faz o reconhecimento, ela o testa para o triângulo n.º 3, que era aquele no qual Estela estava trabalhando. A seguir, volta sua atenção novamente ao triângulo n.º 8 e ao triângulo semelhante correspondente que tinha acabado de construir. Verifica que, ao dividir 18 por 30 (correspondentes às medidas de um cateto e a hipotenusa) obtém 0,60. Ou seja, obtém a mesma razão que entre as medidas 9 cm e 15 cm, que eram as medidas do triângulo n.º 8 original, conforme constava na tabela. Assim, nesse momento ela avaliou o procedimento. Mais uma vez, desafia Estela a verificar se é possível formar novos triângulos, usando o mesmo procedimento, agora para o subgrupo de triângulos que estava com ela.

Na última etapa do trabalho, o grupo deveria apresentar um cartaz explicativo sobre o caminho que havia percorrido para atingir o objetivo. Sem perder a colaboração do grupo, Mayara organiza o trabalho, fazendo uma proposta que vai além do que estava solicitado na tarefa. Desse jeito, ela lança um desafio para o grupo.

> **M:** *Agora, tem que anotar no rascunho o que a gente achou de interessante. Cada um com o seu, e daí a gente descobre se dá para fazer de todo mundo assim.*
>
> **E:** *Tem que fazer rascunho do quê? Do que a gente acabou de falar?*
>
> **M:** *Na hora de explicar... eu tenho que anotar, a gente tem que anotar... só que aí assim, cada um faz o seu, porque ele vai pedir quantas possibilidades têm disponíveis. Eu faço o meu, dá certo. Você faz o seu, dá certo. Por exemplo, o da Jéssica não dá.*
>
> **E:** *Ahhh... entendi tipo, a gente vai fazer esse negócio que você fez, vai fazer nos dois?*
>
> **M:** *Isso. Cada um com a medida com o seu triângulo.*
>
> **E:** *Aí, se der o mesmo resultado, é porque dá para formar um novo triângulo.*

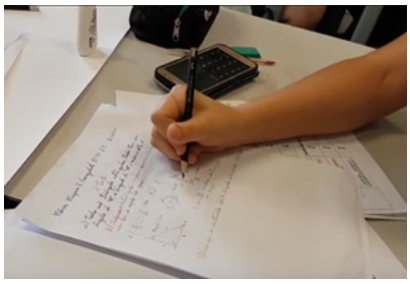
> **M:** *Exatamente, aí cada um faz o seu, porque, por exemplo, o nosso deu certo, às vezes o dela não dá. Se o dela não dá, tem que anotar que não deu certo.*
>
> (ÁUDIO, 30/10/2017)

Foi pensando na apresentação final do trabalho para os demais grupos da sala que Mayara **percebeu** que era necessário ter registros sobre os procedimentos referentes às descobertas do grupo. Assim, ela propõe: "*Agora, tem que anotar no rascunho o que a gente achou de interessante*". Mayara está **reformulando** o enunciado. Estela tenta **perceber** a proposta de Mayara: "T*em que fazer rascunho do quê?*" Aí, Mayara **reformula** novamente: "*Na hora de explicar... eu tenho que anotar, a gente tem que anotar...*". Neste ponto, Mayara traz outra ideia para justificar o uso de anotações. Todas deveriam deixar registrado, no papel tamanho A4, se o procedimento que elas tinham identificado para construir novos triângulos era eficaz para todos os subgrupos de triângulos. Ela lança um **desafio** para o grupo, ao pedir para as demais meninas construírem um novo triângulo a partir das fichas com as quais cada uma delas estava trabalhando: "*Cada um com o seu, e daí a gente descobre se dá para fazer de todo mundo assim*". Caso o procedimento desse certo, ele ganharia validez. Caso falhasse em algum dos subgrupos, seria preciso revisar o procedimento ou procurar um novo. Elas **percebem** que registrar os procedimentos seguidos para encontrar os novos triângulos em todos os subgrupos dará sustentação às suas argumentações durante a apresentação final. Em seguida, Estela e Mayara entram num **jogo de perguntas** e **reformulações**. Elas estavam buscando o entendimento comum sobre o problema e querendo validar o procedimento que foi descoberto por elas.

Reconhecendo e avaliando os procedimentos

Neste terceiro momento o grupo estava pronto para iniciar a construção do cartaz, havendo respondido a todas as perguntas da atividade. Eu passei pelo grupo, e elas me explicaram cada passo com muita propriedade, dizendo que, para construir um novo triângulo, bastava manter os ângulos e multiplicar todas as medidas dos lados do triângulo pelo mesmo valor. Explicavam apontando para as anotações que tinham feito no papel A4 (Figura 3).

Figura 3 – Mayara explicando os procedimentos matemáticos para professora



Fonte: Arquivo do GdS.

Elas tinham desenhado dois triângulos semelhantes com lados proporcionais e ângulos de mesma medida. Então, me entusiasmei e lancei um novo desafio ao grupo: perguntei se era possível multiplicar por zero vírgula cinco. Gostei da rapidez e espontaneidade com que Estela respondeu. Em seguida chamei a professora Thaís, que estava observando a aula, para mostrar a evolução das descobertas feitas pelo grupo.

A seguir transcrevo o diálogo entre a professora Thaís, a aluna Mayara e eu:

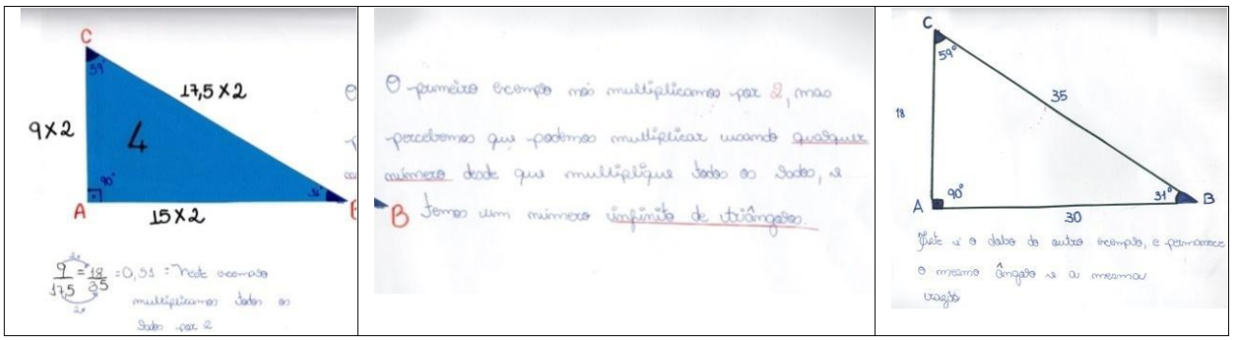
> **M:** *Assim, a gente estava vendo para formar um novo triângulo. Então eu dupliquei de tamanho. Se aqui [aponta para um dos catetos do triângulo n.º 3] era 6, passou a ser 12 [aponta para o respectivo cateto do novo triângulo]; o 10 [aponta para hipotenusa do triângulo n.º 3] ..., 20 [aponta para a hipotenusa do novo triângulo]; e o 8 [aponta para o outro cateto do triângulo nº 3] ..., 16 [aponta para o respectivo cateto do novo triângulo]. Aí eu percebi que multipliquei por 2, e a razão continua sendo 0,6. E, se multiplicar por 3, a mesma coisa. Se fizer por 4, é a mesma coisa. Posso multiplicar por infinitos números, dá pra fazer por muitos valores.*
>
> **T:** *Então, você tem que multiplicar sempre todos os lados pelo mesmo valor?*
>
> **M:** *Isso, todos os lados pelo mesmo valor.*
>
> **P:** *Então eu perguntei pra ela [aponto pra Mayara]: "Posso multiplicar por 0,5?". Ela [aponto pra Mayara] ficou em dúvida, mas ela [aponto pra Estela] disse: "Claro que pode!".*
>
> **T:** *Por que você tem tanta certeza?*
>
> **E:** *Porque é um número normal, desde que multiplique em cima e embaixo, não tem restrição de quais números eu posso.*
>
> **T:** *Por que tem que multiplicar em cima e embaixo?*
>
> **E:** *É. Essa é a regra. Tem que multiplicar em cima e embaixo. Não importa qual é o número.*
>
> (ÁUDIO, 30/10/2017)

Neste diálogo, Mayara, ao explicar para Thaís que, para formar um novo triângulo, ela duplicou o tamanho das medidas dos lados do triângulo n.º 3, **reconhece** e **reformula** o procedimento matemático que tinham descoberto. Em seguida, aplica o procedimento para formar outro triângulo, multiplicando, dessa vez, as medidas dos lados do triângulo de n.º 3 por 2. **Percebeu** que a razão trigonométrica entre 6 m e 10 cm era igual à razão entre 12 cm e 20 cm, ou seja, 0,60. Novamente, Mayara **reformula** e generaliza o procedimento, dizendo que poderia multiplicar por infinitos números. Thaís **reformula** e pergunta se é sempre que tem que multiplicar todos os lados do triângulo pelo mesmo valor. Mayara posiciona-se e valida o procedimento sem nenhuma dúvida, dizendo: "I*sso, todos os lados pelo mesmo valor*". Como os exemplos que Mayara havia dado para fazer a proporcionalidade entre os lados eram números naturais, resolvi lançar um **desafio**, questionando Mayara se poderia multiplicar por 0,5. Mayara demorou a responder e Estela rapidamente **estabeleceu contato** e **avaliou**: "*Claro que pode!*". Então se inicia um **jogo de perguntas** entre Thaís e Estela, procurando identificar quais os argumentos que Estela tinha para explicar. Estela aceita o **desafio** e **reconhece** o procedimento dizendo que 0,5 é "*um número normal*", "*não tem*

restrição de quais números eu posso", ou seja, as medidas dos lados do triângulo podem ser multiplicadas por qualquer número. Porém, Estela utilizou como condição "*multiplique em cima e embaixo*", no lugar de multiplicar todos os lados do triângulo pelo mesmo número. Thaís tenta perceber como Estela chegou a essa conclusão. Mas Estela apenas diz que "*essa é a regra*", não disse como chegou à "*regra*" e não menciona **reconhecer** a proporcionalidade entre os lados dos triângulos.

O grupo construiu o cartaz para finalizar a tarefa, usou como referência o triângulo de número 4, de medidas 15 cm, 9 cm e 17,5 cm. Anotou no próprio triângulo a multiplicação de seus lados por 2. Calculou a razão entre os lados, comprovando que são iguais (Figura 04). E elas ainda produziram um texto para concluir a tarefa: "*No primeiro exemplo, nós multiplicamos por 2, mas percebemos que podemos multiplicar usando qualquer número desde que multiplique todos os lados do triângulo e temos um número infinito de triângulos*". Assim, elas construíram o novo triângulo, destacando que as medidas dos ângulos internos foram mantidas, e anotaram as novas medidas dos lados. Com todas essas anotações, o grupo reformulou e avaliou as aprendizagens, atingindo assim, todos os objetivos propostos pela tarefa.

Figura 4 – Cartaz produzido pelo grupo



Fonte: Arquivo do GdS.

Considerações finais

Um cenário para investigação exige que o professor se coloque numa zona de risco. Devido à fragilidade de estabelecer uma comunicação investigativa, é possível que ela possa se romper a qualquer momento. Cenas inesperadas sempre podem acontecer, ao trabalhar com cenários para investigação, e é possível voltar muito rapidamente ao esquema de comunicação mais tradicional, em que o professor fala de maneira mais retórica e o aluno se preocupa mais em descobrir o que o professor deseja do que em pensar por si mesmo. Ao fugir do paradigma do exercício, dificilmente será possível prever tudo o que vai acontecer. Esse fato ficou evidente no primeiro diálogo apresentado nesta narrativa; tive dificuldade para entrar numa cooperação investigativa. A análise do episódio enfatizou que não é tão simples manter uma cooperação investigativa quando o professor encontra uma resolução inesperada.

Com base na análise dos demais diálogos, é possível perceber que Mayara e Estela se envolveram em uma cooperação investigativa. Elas se comprometeram num diálogo que normalmente não acontece em aulas tradicionais (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006): levantaram hipóteses, testaram, descartaram, reformularam, reconheceram e avaliaram os procedimentos matemáticos necessários para cumprir aquela tarefa. Ou seja, emergiu um diálogo que as levou a uma aprendizagem diferenciada da matemática – desde meu ponto de vista, uma aprendizagem de maior qualidade.

A análise desenvolvida nesta narrativa me permitiu estudar a qualidade da comunicação durante a participação das alunas no cenário para investigação, conforme previsto por Alrø e Skovsmose (2006). Houve uma comunicação que ampliou o poder de argumentação. Também fica evidente nesses diálogos o respeito entre as alunas, ao discutirem dúvidas que surgiram no decorrer da tarefa, o que permitiu leveza na negociação de significados e viabilizou a comunicação em sala de aula. Elas romperam com o paradigma do exercício e se envolveram em um cenário para investigação.

Estar dentro da sala de aula, vivenciar com cada grupo a implementação da tarefa, vê-los produzindo e sentir a energia deles foi algo que me deixou muito satisfeita. Eu vibrei com eles em cada etapa concluída. Uma vez finalizada a aula, analisar o que de fato eles produziram proporciona outro tipo de satisfação, bastante diferente. O exercício analítico que eu fiz ao analisar o caminho percorrido pelo grupo das meninas, do início ao fim da tarefa, revela a grandeza dessa análise. É um trabalho árduo, porém traz uma satisfação imensurável. Eu só consegui ver o que eles produziram e pude sentir também a alegria com as descobertas que o grupo fez, quando analisei frase a frase. Considero que estar na sala de aula e vivenciar o momento da implementação é muito singular, quando comparado ao momento da análise. Foi possível vibrar por cada descoberta e validação que o grupo fez. Sem contar que ampliei minha postura investigativa, ao ter que fazer e refazer diferentes versões para esta narrativa, a fim de esclarecer, esmiuçar cada fato mencionado.

Quero finalizar com uma frase de Paulo Freire (2015, p. 24) que tem tudo a ver com a tarefa que nós, do sEM, desenvolvemos: "Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua produção ou sua construção". Com certeza conseguimos abrir espaço em nossa tarefa, de modo a produzir conhecimento.

Referências

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia:* saberes necessários à prática educativa. 51. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2015.

MASTRONICOLA, N. O. *Trigonometria por apps*. 2014. 66 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

OLIVEIRA, T. *Trigonometria:* A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos, 2010. 177 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

SKOVSMOSE, O. *Um convite à Educação Matemática crítica*. Campinas: Papirus, 2014.

REINVENÇÃO DE UMA PROFESSORA DE MATEMÁTICA: PRIMEIRAS EXPERIÊNCIAS COM TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

Juliet Sarkis

Carteiras alinhadas, matéria na lousa, listas de exercícios e avaliações. Essa sou eu – ou era eu, antes da narrativa que apresento a seguir, para revelar que agora sou uma nova professora. Não porque minha prática tenha mudado 100%, isso não aconteceu. Mas porque aprendi que posso e devo me reinventar e me aperfeiçoar sempre como professora.

Nesse sentido, escrevo esta narrativa com o objetivo de mostrar um pouco das experiências que vivenciei quando optei por sair da minha zona de conforto, como professora de uma prática mais tradicional, e buscar novos meios para o ensino e a aprendizagem da matemática.

Usarei como ferramenta de análise as noções de alguns conceitos que aparecem na Teoria da Aprendizagem Situada (LAVE; WENGER, 1991), como Comunidades de Prática (CoP), participação periférica legitimada e participação legítima (LAVE; WENGER, 1991).

Para uma melhor organização do texto, o dividirei em quatro seções. Na primeira apresentarei um pouco da minha prática docente, contando o que me impulsionou a buscar novas formas de ensino e aprendizagem. Depois farei um relato sobre a implementação de um Ciclo Piloto[17] de *Lesson Study* Híbrido (*LS*H) e como ele me instigou a rever minha prática. Na terceira seção, narrarei minha experiência como observadora de uma aula exploratório-investigativa num ciclo de *LS*H, destacando as influências e os impactos dessa experiência no meu desenvolvimento profissional. Finalizo com uma breve síntese dessas experiências.

Meu ponto de partida

Sou professora na rede pública estadual há 12 anos e sempre mantive a mesma prática em sala de aula: aplicação de técnicas matemáticas para a resolução de exercícios que eram extraídos de livros didáticos – em sua maioria, descontextualizados, formulados por autoridades externas à sala de aula, ou seja, que não estão engajadas no cotidiano da sala da aula, que não vivem sua complexidade (SKOVSMOSE, 2000).

[17] O Ciclo Piloto foi desenvolvido no primeiro semestre de 2017, no projeto "Lesson Study: Conhecimento e desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática". Nesse período os membros do GdS buscaram se apropriar da estrutura e da metodologia do LS. Mais detalhes podem ser encontrados no capítulo de Introdução deste livro.

Além disso, constantemente os estudantes me interpelavam com perguntas como: "*Para que aprender isso?*", "*Onde vou usar esse monte de fórmulas?*". Esses questionamentos me incomodavam, mas já estava acostumada com aquela forma de trabalhar, já me via como professora encaixada naqueles moldes e pensava não poder ser diferente. Porém, com o passar do tempo, as perguntas dos meus alunos, a dificuldade na aprendizagem e a crescente falta de interesse deles pela matemática, passaram a me incomodar cada vez mais, e foi então, que decidi deixar minha tão cômoda zona de conforto e buscar um grupo de formação continuada onde pudesse refletir mais sobre meu papel docente e, dessa forma, contribuir com meus alunos, melhorando minha prática e discutindo novos caminhos para o ensino da Matemática. Cheguei assim, ao Grupo de Sábado (GdS)[18].

O GdS era uma Comunidade de Prática (CoP) docente. Segundo Lave e Wenger (1991), as CoP são grupos de pessoas que compartilham diferentes contextos e diversas experiências. Esse grande embate de ideias distintas gera negociações de significados que vão se alterando a cada novo argumento, a cada novo participante e, consequentemente, gerando aprendizagens variadas. "Portanto, quando falamos de CoP, falamos de um grupo que se renova sempre, e que obtém suas aprendizagens a partir de uma prática compartilhada e negociada" (SARKIS, 2020, p. 50).

> A estrutura de uma CoP compreende três elementos: domínio, comunidade e prática. O domínio de uma CoP é seu elemento fundamental, consiste numa área de conhecimento ou de interesse da comunidade. A comunidade por sua vez, diz respeito às pessoas que integram uma CoP, que interagem e constroem relações entre si. Por fim, a prática consiste no conhecimento compartilhado pelos membros de uma CoP; são as estruturas, as ideias, as ferramentas, as histórias, os documentos compartilhados pelos integrantes dela. (SARKIS, 2020, p. 50)

Nesse sentido, O GdS era uma CoP docente, já com sua maneira de trabalhar bem definida. Encontrei pessoas engajadas em enfrentar o que eu estava descobrindo: que as práticas de ensinar e aprender matemática eram complexas. Problematizá-las, para melhor compreendê-las, era o modo característico de o grupo lidar com o desafio de melhorá-las. Encontrei um espaço aberto ao novo e a novos membros e me identifiquei com ele.

Iniciei minha participação no GdS em fevereiro de 2017 e, qual não foi minha surpresa, quando, ao invés de encontrar uma receita pronta de como dar aula e ensinar matemática de forma eficiente, encontrei novos desafios. O GdS se encontrava em meio a elaborações de tarefas para a implementação de um Ciclo Piloto de *LS*H.

Por estar chegando em meio a um processo no qual o grupo já estava inserido, iniciei com uma participação mais periférica. Segundo Lave e Wenger (1991), quando um indivíduo começa a participar de uma CoP ele assume uma participação periférica que eles chamam de legitimada, enquanto vai conhecendo aquela comunidade. Gradualmente sua participação aumenta, em engajamento e complexidade, levando o indivíduo a dominar as habilidades daquela comunidade e, assim, a exercer nela uma participação legítima.

No início da minha participação, nem sempre me sentia à vontade para me posicionar

[18] GdS é uma comunidade de aprendizagem docente que reúne professores de escolas públicas e privadas, estudantes dos cursos de Licenciatura em Pedagogia e Matemática, pesquisadores e formadores de professores que investigam o ensino e a aprendizagem da matemática. Mais informações sobre o GdS podem ser encontradas no capítulo de Introdução deste livro.

diante das questões mais polêmicas e preferia ouvir a falar. Entendia que estava mais ali para aprender do que para ensinar. Busquei compreender o que estavam estudando, como trabalhavam e, aos poucos, fui participando de forma mais ativa. Por atuar no Ensino Médio, me identifiquei com o subgrupo do Ensino Médio (sEM)[19], no qual me inclui. Novamente, comecei com uma participação mais periférica, observando o movimento dos membros desse subgrupo e, às vezes, opinando em algumas coisas. Conforme ganhei segurança e compreendi melhor o processo, minha participação foi crescendo, passando a ser central, até me encorajar, de fato, a me reinventar como professora.

Minha primeira experiência: conhecendo a prática exploratório-investigativa

Como já dito anteriormente, quando cheguei ao GdS, eles estavam organizando um Ciclo Piloto de *LS*H, em que cada subgrupo elaboraria sua tarefa. Nós, do sEM, optamos pela elaboração de uma tarefa que fosse exploratório-investigativa, ou seja, uma tarefa aberta, que permitisse aos alunos explorarem diversas possibilidades de tratamento e significação (FIORENTINI, 2006), de forma criativa e o mais independente possível.

Nesse Ciclo Piloto foram escolhidas três tarefas diferentes, que contemplavam a introdução de função, já que as três professoras implementadoras iam iniciar o mesmo conteúdo nas suas aulas. Dedicamos alguns encontros para fazer algumas modificações nos enunciados, de forma colaborativa, e, depois, cada uma das três professoras implementadoras do Ciclo Piloto, Thaís, Salgado e Ana Paula, se dedicou a uma das três tarefas. Eu optei, inicialmente, por apenas acompanhar as reuniões, ajudando na elaboração dos enunciados e ouvindo os relatos delas de como tinham sido as implementações. Ainda não me sentia segura para implementar uma aula dessas nas minhas turmas. Não entendia como seria possível passar uma tarefa e deixar que os alunos a resolvessem, sem explicar o conteúdo antes e, muito menos, sistematizar várias respostas diferentes.

Porém, após participar da socialização da implementação da professora Thaís[20], durante uma de nossas reuniões presenciais do subgrupo, pude compreender melhor como me organizar num cenário exploratório-investigativo, e perceber de que forma os alunos participavam dessas aulas. Isso me instigou a implementar também nas minhas turmas a mesma tarefa – a tarefa da Matemáquina.

Ela abordava o tema de introdução à função. Em seu enunciado apresentava uma máquina que transformava o número 2 no número 5. Cabia aos alunos, divididos em quartetos, descobrirem qual era o segredo da máquina, ou seja, qual operação ou quais operações eram realizadas dentro dela para que houvesse a transformação. Para isso, eles podiam usar os números e as operações que quisessem. Uma vez que descobrissem a regra de transformação, o grupo devia fazer seus registros e apresentar para os demais colegas.

Meus alunos, embora já estivessem acostumados a trabalhar em grupos, não estavam

[19] O sEM era formado por professoras da rede pública (Thaís, Salgado, Milda e Ana Paula) que lecionavam para o Ensino Médio, um mestrando (Wellington) e uma professora acadêmica, que era nossa coordenadora (Leticia).

[20] A professora Thaís implementou a tarefa da Matemáquina em sua aula. Em reunião do sEM ela socializou os resultados da sua implementação.

familiarizados com tarefas exploratório-investigativas – nem eu. Conhecer a experiência da Thaís me deu algumas pistas de como implementar a tarefa, mantendo uma postura questionadora e respondendo às perguntas de meus alunos com outras indagações. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), esse tipo de gestão da implementação caracteriza tarefas dessa natureza. Este foi um grande desafio para mim. Quando os alunos me chamavam para tirar dúvidas ou perguntar se o que faziam estava certo, procurava responder com indagações do tipo: "O que vocês acham?", "Tem algum exemplo que não daria certo?", entre outros questionamentos. Mas nem sempre eu mantinha essa postura. Diversas vezes, até mesmo por força do hábito, dei respostas diretas como "sim" ou "não".

Também a socialização e a sistematização das produções dos alunos foram desafiadoras. Elaborei uma ordem de apresentação, reunindo os casos em que os grupos chegaram a uma mesma conclusão, porém tive dificuldades em sistematizar todas aquelas aprendizagens.

A sistematização não foi algo que fluiu naturalmente, até mesmo porque aquela era minha primeira experiência. Porém, mesmo com dificuldades, consegui converter as produções dos meus alunos no conteúdo matemático objetivado, que eram as funções. Até aqui, eu já havia dado outro passo importante na minha formação continuada como docente, levando para minha sala de aula, ainda que de maneira insegura, uma tarefa diferente. Isto gerou uma vontade de mudar minha prática docente. E essa mudança foi acontecendo, embora tímida, em minhas aulas.

Essa primeira experiência me apresentou outra forma de pensar o ensino e a aprendizagem da matemática. Porém foi uma vivência mais solitária. Esse era um Ciclo Piloto, então não estávamos, ainda, nos organizando para uma observação das aulas, pois somente os próximos ciclos teriam observadores nas implementações das tarefas. Entretanto, é prática do GdS e do sEM a socialização das experiências e a discussão coletiva sobre elas. Mas eu ainda não havia me apropriado do trabalho colaborativo realizado pelo GdS, o que me levou a não abrir espaço para discussões sobre minha implementação.

A vivência desse Ciclo Piloto foi, por fim, um marco para minha docência, ao passo que me apresentou outra forma de ser professora e me despertou para um trabalho mais próximo ao subgrupo do Ensino Médio.

Minha segunda experiência: apropriando-me do trabalho colaborativo

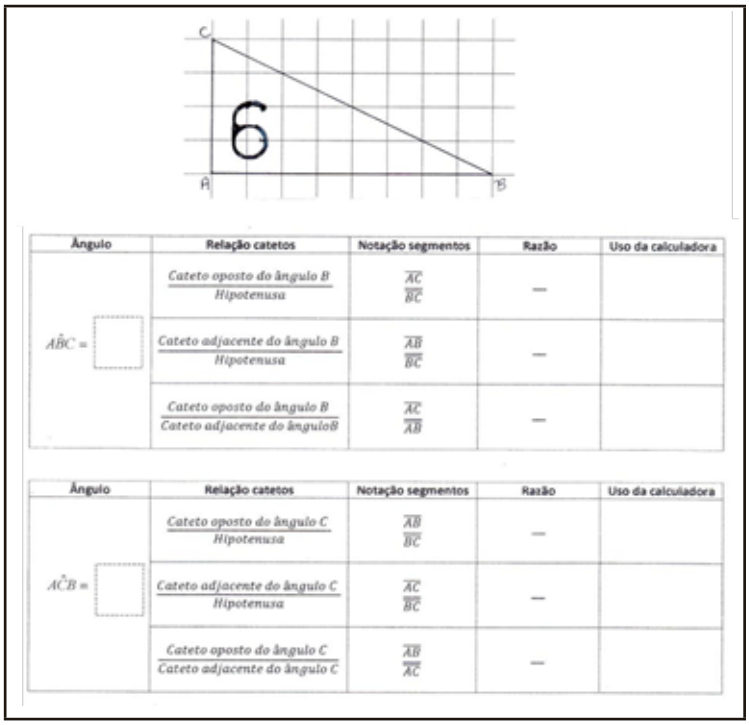
Tendo terminado o Ciclo Piloto, o GdS passou a se dedicar à elaboração e à implementação do Primeiro Ciclo de *LS*H. Nós, do sEM, optamos por explorar a trigonometria no triângulo retângulo, apresentando para os alunos uma tarefa[21] com um enunciado claro, que desse a eles a maior autonomia possível.

A tarefa consistia em oito fichas que continham um triângulo retângulo diferente em cada, desenhado em uma malha quadriculada de 1 cm x 1 cm, e formavam quatro pares de triângulos semelhantes (Quadro 1).

[21] Apresento nessa narrativa apenas a parte da tarefa que contemplarei na escrita. A tarefa na íntegra pode ser encontrada no Apêndice 1, ao final da pri-meira parte deste livro.

Cada ficha continha também uma tabela para registrar as medidas dos triângulos e as relações trigonométricas referentes a um ângulo – discriminado na ficha.

Quadro 1 – Fragmento do enunciado da tarefa com exemplo de uma ficha



Ângulo	Relação catetos	Notação segmentos	Razão	Uso da calculadora
$A\hat{B}C =$	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } B}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	–	
	$\frac{\text{Cateto adjacente do ângulo } B}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	–	
	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } B}{\text{Cateto adjacente do ângulo} B}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$	–	

Ângulo	Relação catetos	Notação segmentos	Razão	Uso da calculadora
$A\hat{C}B =$	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } C}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	–	
	$\frac{\text{Cateto adjacente do ângulo } C}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	–	
	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } C}{\text{Cateto adjacente do ângulo } C}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$	–	

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

Também foram confeccionados, em papel cartão, oito triângulos iguais aos das fichas (Figura 1), para que os alunos pudessem manusear, a fim de verificar as semelhanças.

Figura 1 – Triângulos construídos em papel cartão coloridos

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

A tarefa tinha, então, como objetivo, estabelecer relações entre triângulos, entre ângulos, entre as razões das medidas dos lados em triângulos retângulos; identificar que triângulos semelhantes possuem as mesmas razões trigonométricas; e conhecer a linguagem utilizada para nomear essas razões.

Após várias reuniões de elaboração do enunciado da tarefa e a realização do Seminário-Piloto no GdS[22], na fase de *Problematização e Planejamento* do Primeiro Ciclo de *LS*H, eu não havia ainda me apropriado da tarefa, por isso, optei por atuar como observadora nesse Primeiro Ciclo, junto com outros professores, entre eles, a Leticia.

No sEM negociamos que a observação deveria centrar-se

> na descrição do acontecido em sala de aula, evitando formular juízos de valor e deixando a análise e a reflexão para outro momento. A respeito do papel dos observadores foi acordado que cada observador iria focar em um grupo de alunos e Leticia iria observar o trabalho da professora. (RIBEIRO; FIORENTINI, 2018, p. 29)

Sendo assim, o observador não deveria intervir nos grupos, mas fazer as anotações do que acontecia e, conforme combinado, chamar a professora aplicadora e informá-la a respeito de alguma dúvida, quando necessário.

A aula que observei foi implementada numa turma de primeiro ano do Ensino Médio, do período noturno, da professora Salgado, numa escola da rede estadual de São Paulo, no município de Vinhedo. Nessa aula estávamos a Leticia, o Wellington, a Milda e eu como observadores. Destaco aqui que era a primeira vez que eu atuava como observadora e que a Salgado atuava como professora implementadora de um ciclo de *LS*H, diante de câmeras e gravadores de áudios. Portanto, era uma experiência nova para nós duas e cheia de surpresas.

A aula iniciou com os alunos adentrando a sala, que já tinha as carteiras organizadas em quartetos. Eles se sentaram em grupos, escolhidos livremente, e eu me aproximei de um deles, formado por três meninas e um menino (Amanda, Carla, Beatriz e André[23]). Antes mesmo de a Salgado tomar a palavra, eles perguntaram meu nome e por que eu estava ali. Eu me apresentei, disse que iria observar a aula e que a professora deles iria explicar melhor. E ela assim o fez. Quando todos haviam se organizado, a professora Salgado iniciou a aula, apresentando os observadores, explicando por que estávamos ali e como seriam aquelas aulas.

Ela, então, entregou aos alunos o enunciado da tarefa impresso, junto com todo o material manipulativo, e dedicou-se a explicar a tarefa. Notei que alguns alunos, bastante motivados e interessados, acabaram por se distrair, manipulando o material de forma curiosa, e, assim, deixaram de prestar atenção nas orientações da professora.

Quando ela terminou de explicar a tarefa, os alunos do grupo observado por mim estavam um pouco perdidos, pois não haviam prestado atenção na explicação feita anteriormente. Decidiram então ler o enunciado e chamaram a professora para tirar as dúvidas sobre o que deviam fazer. Embora a configuração da sala – sete grupos de quatro alunos – facilitasse o trabalho, ainda assim eram muitos grupos para serem atendidos; portanto, os alunos precisavam aguardar um pouco até a chegada da professora. Quando

[22] O Seminário-Piloto é uma das atividades desenvolvidas na primeira fase do Lesson Study Híbrido (LSH). Nela, a tarefa elaborada pelo sEM foi implementada em uma das reuniões do GdS, para discussão e análise, antes de sua implementação em sala de aula. Mais detalhes sobre as fases e as atividades do LSH podem ser encontrados no capítulo de introdução deste livro.

[23] Os nomes utilizados para os alunos, nessa narrativa, são fictícios.

ela se aproximou, esclareceu as dúvidas e eles começaram a resolver a tarefa.

Decidiram iniciar dividindo as fichas, de forma que cada um ficasse responsável por preencher duas delas. Logo no começo da atividade, Amanda chamou a professora novamente, com a intenção de perguntar como deveria medir os lados de um triângulo – com régua ou contando os quadradinhos da malha quadriculada. Porém, quando a professora se aproximou do grupo, ela perguntou como medir o ângulo do triângulo que tinha em mãos. A professora Salgado então explicou, novamente, como utilizar o transferidor. Amanda disse que tinha entendido e Salgado se afastou do grupo.

Amanda olhou para os demais colegas e disse que ainda não tinha entendido como medir aqueles ângulos. Ali, notei que, enquanto ela perguntava sobre como medir um ângulo, ela apontava para um lado e não para um ângulo do triângulo. Chamei então a Salgado e expliquei a ela a confusão, dizendo que a aluna que a havia chamado estava confundindo as nomenclaturas. A professora se aproximou novamente do grupo e pediu que explicassem a dúvida. Amanda repetiu a pergunta, apontando para os lados do triângulo. A professora Salgado esclareceu que o que aluna apontava era o lado do triângulo, e não o ângulo. Explicou que eles poderiam usar como instrumento de medida o que fosse mais conveniente, e eles continuaram a atividade, anotando no desenho do triângulo as medidas dos lados e dos ângulos. Nesse momento, bateu o sinal, encerrando a aula, que continuou outro dia, mas sem a presença de observadores.

No episódio que apresentei, ocupar a posição de observadora se mostrou algo muito desafiador. Ao me deparar com a confusão dos alunos, meu primeiro impulso foi de chamar a atenção deles e dizer que estavam se confundindo. Porém, como negociado pelo subgrupo, chamei a professora Salgado e expliquei o que estava acontecendo. O fato de não intervir era um tanto quanto agoniante, mas era, ao mesmo tempo, importante, pois só assim, podíamos pontuar discussões importantes entre os alunos e deles com a professora, bem como destacar partes do enunciado ou da tarefa que precisavam ser modificadas para melhorar a tarefa proposta. Comprometer-me com o que havia sido negociado com o sEM, quanto à questão da intervenção, apesar da minha angústia, me permitiu desenvolver aprendizagens sobre as práticas da professora-observadora. E, ao revisitar este episódio, pude compreender que o papel da professora responsável pela implementação da tarefa difere daquele da professora que a observa. E ambos são muito importantes para promover a melhoria das práticas de ensinar e aprender matemática.

Destaco ainda que observar a aula me levou também a uma apropriação maior da tarefa. Foi através da observação que compreendi de fato a proposta, seu objetivo e como executá-la na sala de aula. Embora não haja uma maneira única, eu, antes, não sabia nem como começar. Decidi, então, após as aulas da professora Salgado, que iria aplicar essa tarefa nas minhas turmas, embora eu não atuasse ainda como professora aplicadora. Não me sentia segura em ser observada, mas já começava a despertar em mim a vontade de mudar minha prática.

Atuar como observadora me ajudou a me apropriar do trabalho colaborativo do GdS. À medida que observava a implementação, fazia meus registros para compartilhar em discussões do sEM sobre a adequação da tarefa e as análises das produções dos alunos.

Com essa prática conjunta, não só aprendia sobre as tarefas exploratório-investigativas e as suas potencialidades e dificuldades, mas também me dava conta da riqueza que existe no trabalho colaborativo. Poder discutir possibilidades, analisar o que os alunos produziram e compartilhar experiências foi me conduzindo pouco a pouco em direção a uma participação mais central no sEM, junto das demais participantes, encorajando-me a uma busca constante de aperfeiçoamento.

O resultado dessas experiências

A participação no Ciclo Piloto e no Primeiro Ciclo de *LS*H foi um marco importante na minha formação continuada e influenciou o meu modo de ser professora. Aplicar a tarefa do Ciclo Piloto e participar como observadora na sala de aula proporcionou experiências diferentes e únicas, ajudando-me a enxergar a sala de aula e sua complexidade através de lentes diferentes.

Aplicar uma tarefa exploratório-investigativa me fez ouvir com mais atenção a voz dos meus alunos, suas dúvidas e dificuldades, quando faço intervenções em aulas. Experimentei e compreendi que o fato de não dizer simplesmente que está certo ou errado me permitiu ter acesso a algumas ideias de resolução deles e, dessa forma, ajudá-los a construir suas próprias aprendizagens.

Além disso, pude constatar que abordar um conteúdo a partir desse tipo de tarefa despertou o interesse dos alunos, que se dedicaram à atividade.

O trabalho colaborativo, o fato de conhecer a experiência do outro e escutar o relato dos colegas, durante as reuniões do subgrupo do Ensino Médio, me encorajaram e animaram a fazer essa primeira experiência de implementar, ainda sem observadores, uma tarefa exploratório-investigativa. Isso me permitiu dar um primeiro passo para sair da zona de conforto na qual eu me encontrava e conhecer uma nova forma de aprender e ensinar matemática.

Essa aproximação com o novo se fortaleceu com a experiência vivida no Primeiro Ciclo como observadora da aula da professora Salgado, embora não me sentisse ainda confortável para assumir, no grupo, o papel de professora implementadora da tarefa.

Minha atuação como observadora me levou a reflexões mais profundas sobre minha postura como professora. A forma como vinha ministrando minhas aulas não proporcionava um bom espaço de aprendizagem para meus alunos. Era preciso romper com o comodismo e sair da zona de conforto. Trazer para a minha prática as tarefas exploratório-investigativas implicava em deixar de usar apenas os exercícios descontextualizados dos livros didáticos e elaborar enunciados abertos, que despertassem a curiosidade dos alunos e lhes permitissem investigar possibilidades. Numa tarefa exploratório-investigativa podem aparecer resoluções e soluções diversas, e eu teria que estar pronta a analisá-las com meus alunos.

Mas isso tudo só percebo hoje, enquanto escrevo esta narrativa. Por ter sido uma primeira experiência e estar tão envolvida e ainda bastante perdida, não conseguia ver, de fato, o potencial da elaboração colaborativa de uma tarefa exploratório-investigativa, tampouco

o alcance deste tipo de tarefa. Produzir este relato me leva a perceber a diferença entre o trabalho coletivo e o trabalho mais individualizado, uma vez que a tarefa do Ciclo Piloto, embora tenha sido elaborada colaborativamente, foi implementada de maneira solitária, por mim. Voltar aos meus poucos registros e às minhas memórias, algum tempo depois e após vivenciar outras experiências no GdS, me permite olhar todo o trabalho desenvolvido com outra lente, uma lente um pouco mais analítica e com um menor envolvimento com o momento, percebendo que o trabalho coletivo agrega muito à prática pedagógica do professor.

As experiências vivenciadas, tanto no Ciclo Piloto, quanto na observação da aula da professora Salgado, no Primeiro Ciclo de *LS*H, influenciaram minha forma de participação no GdS ao longo do projeto. Esses momentos foram determinantes para que eu tomasse a decisão de implementar uma tarefa sobre Educação Financeira no Terceiro Ciclo do projeto, agora como professora implementadora em uma das minhas turmas. Na perspectiva da Teoria Social da Aprendizagem (LAVE; WENGER, 1991), este novo modo de participar assumido pode ser entendido como um movimento de migração da periferia para o centro da comunidade do sEM – GdS.

No Primeiro Ciclo não me sentia preparada para ser observada, para ministrar uma aula diante de outras professoras. Tinha receio de, no nervosismo, dizer algo errado, ou não saber como implementar uma tarefa exploratório-investigativa. Nesse momento, mantinha uma participação periférica legitimada. Porém, participando das práticas comuns ao GdS e ao sEM – no Ciclo Piloto e como observadora – e considerando as aprendizagens produzidas sobre tarefas exploratório-investigativas e sua implementação, fui sendo conduzida, por um processo de transformação – que não finaliza aqui, mas é contínuo –, a uma posição mais central dentro do sEM: a de professora de matemática capaz de assumir, perante o grupo, a implementação de tarefas desta natureza.

Reconheço o impacto desta experiência vivida na minha trajetória profissional. Participar tanto do Ciclo Piloto, quanto do Primeiro Ciclo de *LS*H me levou a tomar outra decisão importante sobre meu desenvolvimento profissional. Decidi escrever um projeto para pleitear uma vaga na primeira turma do Mestrado Profissional em Educação Escolar, na Faculdade de Educação da Unicamp. Em janeiro de 2018 ingressei nessa turma, e meu tema de pesquisa abordou justamente as aulas exploratório-investigativas.

Enfim, revisitar minhas memórias como professora aplicadora do Ciclo Piloto e minha atuação como observadora, nesse Primeiro Ciclo de *LS*H, me permitiu olhar para uma nova prática, para uma professora que entrou em um grupo colaborativo tendo uma participação tímida, e que, ao se apropriar das práticas dele, se reinventou como uma nova professora que está em constante mudança e aprendendo sempre.

Referências

FIORENTINI, D. Grupo de sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M. (org.). *Histórias e investigação de/em aulas de matemática*. Campinas, SP: Alínea, 2006.

LAVE, J.; WENGER, E. *Situated learning:* legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RIBEIRO, C. M.; FIORENTINI, D. *Melhoria do conhecimento profissional e da prática do professor que ensina matemática no contexto de um Lesson Study Híbrido.* In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO - ENDIPE, 19., 2018, Salvador. Salvador: UFBA, 2018. p. 2 a 13. Painel.

SARKIS, J. *Aprendizagens de alunos que participam de aulas exploratório-investigativas com foco na educação financeira.* Dissertação (Mestrado Profissional) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2020.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema*, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

APÊNDICE 1

Apresentação

Esta tarefa foi planejada no Primeiro Ciclo do *Lesson Study* e teve como tema a trigonometria no triângulo retângulo. Foi elaborada para alunos do 1.º Ano do Ensino Médio. Teve como objetivos:

- Explorar as relações entre ângulos-triângulos-razões dos lados de triângulos retângulos;

- Identificar que triângulos semelhantes possuem as mesmas razões trigonométricas e conhecer a linguagem utilizada para nomeá-las.

Enunciado da tarefa

Trigonometria no Triângulo Retângulo Orientações: A equipe receberá oito fichas: cada uma com um triângulo desenhado em uma malha quadriculada, seguido de uma tabela a ser preenchida. Irão receber, também, um triângulo colorido, recortado em cartolina, do mesmo tamanho dos triângulos das fichas, e instrumentos para medir e calcular: transferidor, régua e calculadora. Para otimizar o trabalho e promover uma maior exploração e participação de vocês, alunos, na atividade, dividam entre si as fichas.

PRIMEIRA PARTE Cada integrante será responsável por: 1. Medir os três ângulos do triângulo. Utilize o transferidor para medir os ângulos dos respectivos triângulos que se encontram em suas fichas, podendo representar suas medidas na própria figura do triângulo, para que, em sequência, registrem essas medidas nas fichas. 2. Medir os três lados do triângulo. Utilize a régua para medir os lados dos triângulos que se encontram em suas fichas, podendo representar suas medidas na própria figura do triângulo, para que, em sequência, registrem essas medidas na ficha. 3. Completar a tabela que aparece embaixo do triângulo. Para fazer os cálculos use a calculadora e trabalhe com duas casas decimais, sem fazer arredondamentos.
SEGUNDA PARTE Trabalho em grupo: Reunir todas as fichas sobre a mesa para visualizá-las simultaneamente. a) Quais regularidades estão presentes em todos os triângulos analisados? b) Agora, encontre regularidades em subgrupos desses triângulos. Separe-os e explique, por escrito, como foi cada agrupamento. c) Para construirmos um novo triângulo que pertença a um dos subgrupos determinados no item "b", que característica(s) deveria ter esse novo triângulo? d) De acordo com o item "c", quanto(s) novo(s) triângulo(s) poderia(m) ser construído(s)?
TERCEIRA PARTE Elaborem um cartaz para compartilhar com os demais grupos o trabalho realizado. Registrem as explicações e explorações desenvolvidas pelo grupo.

Orientações para o professor

A tarefa foi realizada em grupos de até quatro alunos. Para implementação da tarefa foi elaborado um kit com instruções e materiais, que foi entregue a cada grupo. Detalharemos a seguir os materiais contidos neste kit:

- 8 fichas individuais com um triângulo retângulo desenhado em cada uma delas

- 1 caixa de seis canetas hidrocor

- 4 réguas

- 4 transferidores

- 1 calculadora

- 4 folhas de papel tamanho A4

- 8 triângulos recortados em papel cartão

- Folha com as orientações para desenvolvimento da atividade

Os triângulos escolhidos estão discriminados no Quadro 1.

Quadro 1 – Tabela com os oito triângulos escolhidos

Triângulo 1	**Triângulo 2**	**Triângulo 3**	**Triângulo 4**
Catetos 5 e 10 cm Ângulos agudos: 63º e 27º Hipotenusa: 11,2 cm	Catetos 6 e 10 cm Ângulos agudos: 59º e 31º Hipotenusa: 11,7 cm	Catetos 6 e 8 cm Ângulos agudos: 53º e 37º Hipotenusa: 10 cm	Catetos 9 e 15 cm Ângulos agudos: 59º e 31º Hipotenusa: 17,5 cm
Triângulo 5	**Triângulo 6**	**Triângulo 7**	**Triângulo 8**
Catetos 4 e 4 cm Ângulos agudos: 45º e 45º Hipotenusa: 5,7 cm	Catetos 4 e 8 cm Ângulos agudos: 63º e 27º Hipotenusa: 8,9 cm	Catetos 6 e 6 cm Ângulos agudos: 45º e 45º Hipotenusa: 8,5 cm	Catetos 9 e 12 cm Ângulos agudos: 53º e 37º Hipotenusa: 15 cm

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

Em cada ficha foi desenhado um triângulo, inscrito em uma malha quadriculada de 1 cm por 1 cm, conforme apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 – Exemplo de uma ficha contendo um triângulo e uma tabela

Exemplo de uma ficha contendo um triângulo e uma tabela

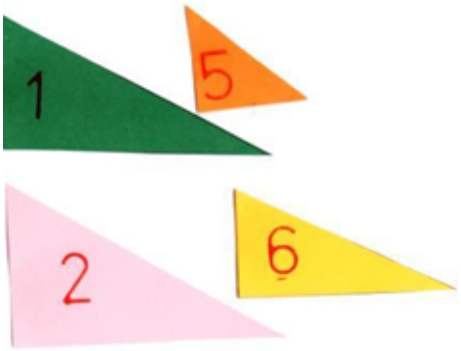
Ângulo	Relação catetos	Notação segmentos	Razão	Uso da calculadora
$A\hat{B}C =$	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } B}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	—	
	$\frac{\text{Cateto adjacente do ângulo } B}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	—	
	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } B}{\text{Cateto adjacente do ângulo} B}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$	—	

Ângulo	Relação catetos	Notação segmentos	Razão	Uso da calculadora
$A\hat{C}B =$	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } C}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	—	
	$\frac{\text{Cateto adjacente do ângulo } C}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$	—	
	$\frac{\text{Cateto oposto do ângulo } C}{\text{Cateto adjacente do ângulo } C}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$	—	

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

Os mesmos triângulos das fichas individuais foram construídos em papel cartão coloridos (Figura 1).

Figura 1 – Triângulos construídos em papel cartão coloridos



Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

PARTE II

Ensino das Funções

DA SALA DE AULA PARA UM PASSEIO NA ESCOLA: INTRODUZINDO O ESTUDO DE FUNÇÃO POR MEIO DE UMA TAREFA EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA

Ana Paula Rodrigues Magalhães de Barros

Ana Leticia Losano

É certo que em aulas de Matemática ocorrem muitas aprendizagens, dentre elas, as docentes. Compreendemos a importância de percebê-las, de forma que possamos refletir e ressignificar sempre nossas práticas. Ademais, o compartilhamento de tais aprendizagens com professores e futuros professores pode endossar os processos formativos que ocorrem nas comunidades docentes. Com essa intenção, narramos algumas das nossas aprendizagens como participantes do Subgrupo do Ensino Médio (sEM) durante o ciclo piloto do projeto "*Lesson Study (LS)*: Conhecimento e desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática" desenvolvido pelo GdS[24]. Tais aprendizagens emergiram ao nos apropriarmos criticamente e, posteriormente, implementarmos em sala de aula uma tarefa exploratório-investigativa com foco no estudo de Função, a qual requeria o planejamento, a produção e a análise de dados por parte dos alunos. Essa apropriação crítica refere-se ao nosso processo de identificação com a tarefa, no qual nos posicionamos como autoras e a transformamos. Portanto, nosso objetivo configurou-se em narrar esse processo de apropriação da tarefa, no qual também estudamos as potencialidades do processo do estudo de Função em uma perspectiva aberta, exploratória e investigativa em que ela foi implementada.

A tarefa foi inicialmente proposta pela Professora Leticia, segunda autora do capítulo. Depois do processo de apropriação, a nova versão da tarefa foi implementada pela Professora Ana Paula, primeira autora do capítulo, em uma de suas turmas do primeiro ano do Ensino Médio integrado ao Técnico em Automação do Instituto Federal de São Paulo. Devido a essa autoria dupla, em alguns trechos da narrativa fazemos menções a nós pelos próprios nomes.

Inicialmente, discorreremos sobre como surgiu a tarefa dentro do sEM e, em seguida, relataremos os processos de sua apropriação crítica e suas modificações nesse subgrupo. Então, apresentaremos a implementação na turma de Ana Paula e analisaremos as potencialidades do processo de estudo de Função com essa tarefa. Concluiremos a narrativa, trazendo algumas considerações finais.

[24] Projeto financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – Linha Fapesp Ensino Público (Processo 17/17418-9).

O surgimento e o percurso da tarefa dos trajetos no sEM

No primeiro semestre de 2017, o GdS iniciou o ciclo piloto do projeto no qual, pela primeira vez, tentou se apropriar da metodologia do *Lesson Study* (LS). Naquele período, o sEM era composto pelos seguintes professores: Juliet, Salgado, Leticia, Ana Paula, Wellington, Marcos, Marília, Thaís, Milda e Dario. Iniciamos o trabalho, buscando identificar um conteúdo de Matemática que fosse desafiador na prática docente de todos nós. Partindo de tal conteúdo, faria sentido planejar colaborativamente uma tarefa comum para todos. Nesse âmbito, a partir das trocas de nossas experiências, concordamos sobre os desafios relacionados à Educação Algébrica, os quais podem ser vistos no ensino do conceito de Função, uma vez que, no contexto desse estudo, é frequente que nossos alunos demonstrem dificuldades para interpretar as representações algébricas.

Nesse cenário, Leticia compartilhou uma experiência que teve atuando como docente da disciplina *Metodología y Práctica de la Enseñanza* da Licenciatura em Matemática na Universidade Nacional de Córdoba (Argentina): um grupo de estagiários, que devia introduzir o conceito de Função para alunos do 3.º ano da *Educación Secundária*[25], tinha criado uma tarefa cujo objetivo era *matematizar* o trajeto percorrido pelos estudantes durante o tempo de intervalo na escola. No primeiro momento, os alunos deveriam relatar o trajeto que costumeiramente percorriam no tempo do intervalo escolar (por exemplo, os alunos poderiam dizer: "saímos da sala de aula, vamos ao banheiro nos arrumar, depois vamos para a cantina, onde ficamos conversando com os colegas da outra turma e, finalmente, voltamos para a sala"). Em seguida, os alunos deveriam realizar experimentalmente tal trajeto, medindo o número de passos necessários para realizar cada parte do trajeto e o tempo empregado, utilizando um cronômetro. Os dados produzidos deveriam sistematizar-se numa tabela cujas colunas eram: denominação da parte do trajeto, tempo (segundos), tempo acumulado (segundos), distância (passos) e distância acumulada (passos). Por fim, os alunos introduziam suas tabelas numa planilha do GeoGebra e construíam um gráfico do seu trajeto, que relacionava o tempo acumulado e a distância acumulada. A tarefa finalizava com algumas perguntas orientadas a interpretar o gráfico e a determinar certas condições que todos os gráficos tinham que satisfazer para serem reconhecidos como gráficos que descrevessem trajetos: o traço deveria ser contínuo, e não era possível que num mesmo tempo fossem consideradas duas distâncias diferentes. Então, essa última característica foi aproveitada para introduzir a noção de Função[26]. Essa tarefa passou a ser chamada, dentro do sEM, como a "tarefa dos trajetos".

Justamente naquela época, Ana Paula tinha acabado a produção de dados da sua pesquisa de doutorado, cujo objetivo era compreender práticas culturais de ensinar e aprender, (re)constituídas quando aulas de Matemática são mediadas pela internet, em um ambiente híbrido. A produção dos dados ocorreu na perspectiva de um trabalho colaborativo

[25] Na Argentina, a Educación Secundária tem seis anos de duração, abarcando alunos da faixa etária de 12 a 17 anos. Os alunos do 3.º ano possuem 14 anos de idade.

[26] A tarefa completa, os detalhes da sua implementação e sua análise podem ser encontrados em García, Zurbano e Romero (2016).

em duas escolas públicas do estado de São Paulo, em duas turmas do primeiro ano do Ensino Médio, sendo a professora Salgado também participante do sEM, responsável por uma delas. O assunto estudado foi o conceito de Função. A condução das aulas para a investigação contava com o pressuposto do ambiente híbrido[27], o qual combinava o uso da internet com o ensino presencial para propiciar maior liberdade aos estudantes no processo de aprendizagem, e para "oportunizar, a partir de uma atividade, que os alunos vivenciassem uma experiência empírica, a qual fomentasse um pensamento teórico sobre a essência do conceito de Funções" (BARROS, 2019, p.147).

Para tanto, os alunos, trabalhando em grupo, deviam realizar e registrar certos experimentos físicos, para depois compartilhá-los com o restante da turma em um grupo de discussão no Facebook. A partir de indagações das professoras dentro desse ambiente virtual, os estudantes poderiam se engajar em discussão, destacando percepções de matemáticas envolvidas em tais experimentos. Essas discussões embasavam a constituição das aulas seguintes, as quais tinham por objetivo a sistematização do conceito de Função envolvido nos experimentos. Viver essa experiência docente na investigação de doutorado conduziu Ana Paula a uma ressignificação do conceito de Função, constatando que seu papel essencial em diversos fenômenos físicos poderia ser melhor aproveitado nos processos de ensino e aprendizagem. Desse modo, quando Leticia compartilhou sua experiência com a tarefa dos trajetos, Ana Paula logo se identificou e viu potencialidades na tarefa para tal aproveitamento.

É importante ressaltar que a tarefa dos trajetos não foi a única a ser discutida nessa fase inicial. Outros membros do subgrupo se identificaram com outras tarefas que também envolviam o conceito de Função. Como professores atuantes em sala de aula, respondíamos em nossas ações docentes ao movimento orgânico que caracterizava a complexidade daquelas comunidades (BARROS; SIMMT; MALTEMPI, 2017). Em um olhar retrospectivo, percebemos que privilegiar a especificidade das necessidades, das compreensões e dos interesses de cada membro foi uma decisão importante que marcou o trabalho naquele ciclo piloto. Estávamos vivenciando os desafios da emergência de uma nova comunidade no contexto do *Lesson Study* Híbrido (*LSH*): o sEM. Tal comunidade refletia as identificações de cada membro e permitia o encontro de várias ideias produzidas em diversas comunidades. O sEM emergia como um sistema auto-organizado e adaptativo às identificações de seus membros, ou seja, emergia, segundo Davis e Simmt (2003), como um sistema complexo.

Apropriando-nos da tarefa dos trajetos

A partir da decisão sobre as tarefas que iríamos trabalhar, começou o processo de apropriar-nos delas de forma crítica. Os membros do sEM que concordaram em trabalhar com tarefa dos trajetos foram as professoras Marília, Ana Paula e Leticia. É importante ressaltar que Marília e Ana Paula lecionavam na mesma instituição. A troca de ideias e as discussões

[27] Um ambiente constituído pela fusão de elementos dos submodelos sala de aula invertida, rotação de estação e rotação de laboratório (BARROS, 2019). Tais submodelos foram propostos por Christensen, Horn e Staker (2013) em programas blended learning. Para tanto, a sala de aula é compreendida por Barros (2019) além da sua estrutura física, de forma que abrange os espaços online, como o grupo no Facebook que foi utilizado pela autora como ambiente de aprendizagem.

logo surgiram. Algumas delas se desenvolveram por meio do compartilhamento de um documento no *Google Drive* do sEM. Outras ocorreram durante as reuniões do subgrupo e até mesmo na escola onde Marília e Ana Paula trabalhavam. A partir dos diferentes olhares que tínhamos sobre a tarefa, fomos propondo alterações para ela. Uma delas foi introduzir um momento de socialização para que os alunos produzissem interpretações do fenômeno dos trajetos, tendo a tabela como principal suporte[28]. Perante essa proposta, Leticia comentou:

> Quando implementamos a atividade na Argentina, primeiro construímos os gráficos e depois fizemos esta socialização. Assim, as perguntas sobre o tempo que ficaram parados ou as diferentes velocidades foram pensadas em função do gráfico, isto é, em função das inclinações dos segmentos de cada etapa do trajeto. Não tinha pensado em fazê-la [socialização] antes do gráfico, trabalhando só com a tabela. Entre várias, sempre pensamos coisas novas!!! (DRIVE, 25/04/2017)

Assim, o trabalho colaborativo ia revelando as potencialidades da tarefa e as consequências dessas mudanças nas oportunidades de aprendizagem que planejávamos para os estudantes. Outra grande mudança, que explicaremos com mais detalhes na próxima seção, foi que, ao invés de disponibilizarmos para os alunos a tabela pronta para os registros dos dados – tal como os estagiários da Argentina fizeram –, deixamos que eles mesmos construíssem a tabela, decidindo quais seriam as grandezas que considerariam. O objetivo da tarefa ficou estabelecido como: compreender e relacionar diferentes representações de Função.

Assim, surgiu uma nova versão da tarefa, que foi implementada na sala de aula de Marília e simulada por Marcos, outro membro do sEM, o qual realizou o trajeto como se fosse um aluno. Depois disso, tivemos uma reunião do sEM em que essas experiências foram socializadas. Esse foi um momento importante para o subgrupo, pois permitiu novas reflexões sobre a tarefa. Por exemplo, a professora Thaís comentou em seu relato de experiência:

> Na última reunião, vi a apresentação da Marília sobre a tarefa das trajetórias. Quanta transformação aconteceu dentro de mim. Saí do encontro motivada a aplicar a tarefa. Ver as experiências dos outros professores no grupo, nos ajuda a ter mais segurança, a imaginar algo que era tão inatingível [...] Momentos ricos de formação docente. [DRIVE, 31/05/2017]

Achamos interessante destacar o olhar de Thaís em seu relato, pois, inicialmente, ela não tinha se identificado com a tarefa: "percebi que as experiências da Ana Paula a aproximavam da tarefa dos trajetos e eu pensava: não tenho nem noção de como fazer isso. Não dá. Livre demais. Assim não consigo" (DRIVE, 31/05/2017). De fato, naquela comunidade do sEM que emergia no contexto *LSH*, ia surgindo uma nova prática cultural (BARROS, 2019): planejar colaborativamente tarefas de natureza exploratório-investigativa. Estávamos todos inseguros devido a essa nova realidade, por isso a dificuldade de decidirmos por uma única tarefa. Mas o fato é que, no ciclo piloto, o sEM ia se constituindo a partir da inter-relação entre aprendizagens que trazíamos de outras comunidades, as quais nos deixavam

[28] Na versão da tarefa aplicada na Argentina, esse momento de socialização e interpretação só foi realizado depois da construção do gráfico do trajeto e utilizando essa representação como principal suporte.

seguros; mas também a partir da produção de novas culturas (novas aprendizagens) naquela comunidade, o que certamente trazia, em alguns momentos, tensões e inseguranças e, em outros, confiança para o subgrupo.

Durante a socialização no sEM, novas sugestões de mudanças para a tarefa foram colocadas pelos diversos membros. Levando em consideração tais sugestões, Ana Paula deu início à implementação da tarefa na sua sala de aula. Entretanto, no mesmo processo de implementação, ela foi introduzindo novas modificações na tarefa, a partir das necessidades particulares da sua turma. Nessa direção, Ana Paula dividiu a tarefa em sete atividades, que foram realizadas ao longo de quatro dias letivos, com duas aulas (100 min) em cada dia. Na próxima seção, apresentaremos cada uma dessas atividades, descreveremos sua implementação e destacaremos a potencialidade do estudo de Funções por meio de uma tarefa de natureza exploratório-investigativa como a proposta.

A tarefa dos trajetos no contexto da turma da Ana Paula

A tarefa iniciou-se com a Atividade 1, que requeria que os alunos relatassem o trajeto percorrido durante o intervalo (Quadro 1).

Quadro 1 – Enunciado Tarefa dos Trajetos - Atividade 1

Atividade	*Relatar um trajeto:* pensar e escrever um relato sobre o trajeto que geralmente percorrem durante os 15 minutos de intervalo. O relato deve conter quanto tempo aproximadamente gastam em cada etapa, desde a saída da sala até seu retorno. Cada etapa é caracterizada pela saída de um ponto até a chegada em outro ponto, por exemplo: Etapa 1: sala de aula – cantina.
Objetivo	Propiciar que os alunos comecem a matematizar uma situação simples do cotidiano que inicialmente é representada pela linguagem natural.

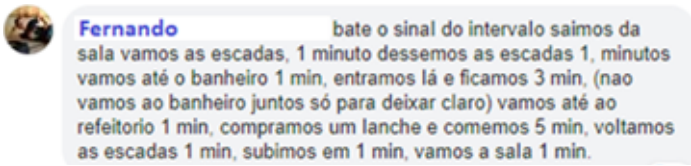
Fonte: Autoria própria.

Devido à experiência vivenciada por Leticia na Argentina, ao planejar essa atividade consideramos importante que a professora destacasse que a Matemática pode ser uma ferramenta de análise de atividades diárias e orientasse os alunos a fazerem um relato mais próximo possível da realidade, pois, na atividade seguinte, eles teriam que reproduzir o trajeto.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) ressaltam que a linguagem natural também é uma forma de expressar o pensamento algébrico. Nessa direção, entendemos a relevância do uso desse tipo de linguagem no processo de "matematizar" uma situação cotidiana. Assim, essa atividade permite que os alunos estabeleçam relações dialéticas entre a linguagem natural, a algébrica, a geométrica e o pensamento algébrico, não havendo subordinação, conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) destacam.

Na sala de aula de Ana Paula, a Atividade 1 foi introduzida dentro de um grupo de Facebook que havia sido criado como plataforma de aprendizagem para as aulas de Matemática daquela turma. Assim, anteriormente à primeira aula presencial, os grupos compartilharam relatos tais como o do grupo de Fernando (Figura 1).

Figura 1 – Relato do grupo de Fernando[29]



Fonte: Grupo de Facebook.

Ressaltamos que Ana Paula propôs, aos 20 estudantes da turma, a realização da tarefa em grupos de quatro alunos, uma vez que eles costumam passar o intervalo escolar em companhia dos colegas. Trabalhar em grupo, desde o início da tarefa, permitiria que, ao longo de toda a sua implementação, os alunos estabelecessem uma relação de negociação e de aprendizagem. O próximo passo consistia na seleção das grandezas a serem medidas e na criação, por parte dos alunos, de uma tabela que permitisse sistematizar os dados produzidos durante a realização do trajeto. Com esse objetivo, na aula seguinte, primeira aula presencial, Ana Paula provocou os grupos com a Atividade 2 (Quadro 2).

Quadro 2 – Enunciado tarefa dos trajetos – Atividade 2

Atividade	*Construção da tabela.* Trabalhando em grupo e considerando os trajetos que relataram no Facebook, respondam as seguintes perguntas: I) Quais grandezas podem ser consideradas? II) Com quais instrumentos as mediriam? III) Quais seriam as unidades de medidas? IV) Como organizar esses dados? Depois do trabalho em equipes realizamos uma socialização com a turma toda.
Objetivo	Compreender quais são as grandezas envolvidas e interpretar, a partir do contexto, quais são os instrumentos e as unidades de medidas mais adequadas. Compreender a importância da construção da tabela para matematizar o relato do trajeto.

Fonte: Autoria própria.

Os questionamentos da atividade 2 propiciaram um rico momento de pesquisa nos – e entre os – grupos. Para tanto, a professora permitiu o uso da internet acessada pelos dispositivos móveis dos alunos. Nesse contexto, alguns estudantes sentiram a necessidade de pesquisar o significado da palavra "grandeza", assim como buscaram informações sobre os tipos de instrumentos ou unidades de medidas.

Inicialmente, alguns alunos consideraram metros e quilômetros como unidades de medida, mas a partir da inter-relação com outros grupos da sala, perceberam que essas unidades não eram adequadas para a situação prática que eles experimentariam. Outros consideraram que o pé poderia ser uma unidade de medida. Perante essa sugestão, a professora propôs que testassem essa hipótese, medindo, em pés, o perímetro da sala. Tal proposta levou todos os estudantes a discutirem a diferença entre pé e passo como unidades de medida. Finalmente, os alunos concluíram que o passo seria a unidade mais adequada. Para medir o tempo, todos concordaram em utilizar o cronômetro do celular, sendo adotado o segundo como unidade de medida. Também, os alunos concluíram que o uso de uma tabela seria a melhor maneira de organizar os dados.

[29] Os estudantes foram identificados com pseudônimos.

Uma das potencialidades da atividade foi, então, promover discussões matemáticas que não se restringiam aos grupos, mas ocorriam entre os diversos grupos e na turma toda, atuando a professora como favorecedora de tais discussões. A liberdade de usar a internet para aquele momento de investigação trouxe mais informações para os estudantes, fomentando a discussão. Usar o próprio corpo também foi importante para o processo de compreensão da diferença entre pés e passos como unidades de medida.

Ana Paula iniciou o momento da socialização, solicitando que os grupos falassem quais as grandezas que eles achavam que deveriam ser consideradas e as respectivas unidades de medida. Nessa oportunidade, ela construiu uma tabela no quadro, considerando todas as sugestões levantadas pelos estudantes. Todos os alunos propuseram tempo e distância como grandezas, e alguns incluíram a velocidade e/ ou a aceleração. Então, a professora questionou o porquê daquelas grandezas consideradas. Os estudantes argumentaram que provavelmente eles percorreriam cada etapa do trajeto com velocidades diferentes, mas não conseguiram explicar muito bem a escolha da aceleração. Alguns estudantes levantaram as fórmulas de velocidade média $(v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t})$ e de aceleração $(a = \frac{\Delta v}{\Delta t})$, porque se remeteram às aulas de física ou consultaram na internet. A partir dessas informações e de algumas indagações da professora, eles perceberam que a velocidade relacionava distância e tempo; e a aceleração, velocidade e tempo. Portanto, no momento em que eles percorressem o trajeto, não precisariam preencher essas informações na tabela, pois elas poderiam ser calculadas posteriormente a partir dos dados da distância e do tempo. A professora ressaltou que, no desenvolvimento da tarefa, eles voltariam a discutir sobre velocidade e aceleração. A partir dessas discussões, a turma conseguiu negociar as principais caraterísticas da tabela para sistematizar os dados que seriam produzidos, ficando acordado que as células correspondentes à primeira coluna da tabela seriam preenchidas utilizando a denominação "etapa 1", "etapa 2", etc., acrescentando uma legenda onde cada grupo discriminaria as correspondências dos caminhos percorridos (Por exemplo, etapa 1: sala de aula – banheiro).

Para introduzir as ideias de tempo acumulado e distância acumulada, Ana Paula perguntou para os estudantes o que eles imaginavam que seria feito com os dados sistematizados na tabela. Rapidamente alguns responderam que achavam que iriam construir um gráfico. Então, a professora perguntou se era preciso mais alguma informação, além de distância e tempo para isso. Após algumas sugestões, um estudante, que tinha um aplicativo de cronômetro em mãos, levantou a hipótese de tempo acumulado, justificando que o aplicativo dava essa informação. Foi então que a professora problematizou o significado de tempo acumulado e distância acumulada com toda a turma. Para isso, analisaram o que o cronômetro daquele aluno fazia para dar esses resultados e concluíram que, para a construção do gráfico, faria sentido o uso dessa informação. No Quadro 3 apresentamos a tabela com as grandezas negociadas pela turma.

Quadro 3 – Tabela que sistematiza as grandezas negociadas pela turma

Etapa	Distância	Distância Acumulada	Tempo	Tempo acumulado	Velocidade	Aceleração
1						
...						

Fonte: Autoria própria.

Após esse momento de negociação de significados entre a professora e os estudantes, ficou estabelecido que as únicas colunas que seriam preenchidas durante a produção dos dados – quando os alunos efetivamente realizariam o percurso – eram as do tempo, do tempo acumulado, da distância e da distância acumulada, configurando um único tipo de tabela para todos. Então, alguns estudantes apagaram as colunas de velocidade e aceleração, e outros somente não as preencheram. Mas Ana Paula não interferiu nessa decisão dos alunos, pois considerou que, mais adiante, as informações dessas colunas contribuiriam para a interpretação das representações geométrica e algébrica da Função estudada.

Achamos muito frutífera a abertura da tarefa que se produz quando solicitamos que os alunos construam a tabela, ao invés de entregá-la pronta para o preenchimento. Esse momento propiciou a emergência de múltiplas investigações e discussões que puderam ser exploradas pela professora naquele momento e ao longo do estudo. Algumas dessas discussões permitem estabelecer vinculações significativas com noções fundamentais que os alunos estudam em Física. Outras permitem uma compreensão aprofundada do fenômeno que se quer investigar, ganhando ciência das grandezas que permitem sua descrição. Nessa direção, a professora percebeu que a tarefa possibilitava o envolvimento profundo dos estudantes nos processos de tomada de decisões, produção e negociação de significados. A atividade 1 propiciou que os alunos já começassem a interpretar o fenômeno, e a atividade 2, que eles pudessem prever quais informações deveriam ser sistematizadas na tabela, de maneira que pudesse ser construído um gráfico a partir delas. Essas possibilidades decorrentes da natureza exploratório-investigativa da tarefa já permitiam um pensamento algébrico, mesmo antes do uso simbólico da álgebra.

Com a tabela construída, no segundo dia, Ana Paula propôs a atividade 3, a qual envolvia a produção e a sistematização dos dados a partir da realização dos trajetos escolhidos pelos estudantes (Quadro 4). A Figura 3 mostra uma imagem dos alunos desenvolvendo essa atividade.

Quadro 4 – Enunciado da tarefa dos trajetos: Atividade 3

Atividade	*Medir as distâncias e os tempos.* Utilizar 5 minutos para preparação e 15 para reproduzir o trajeto do relato. Em duplas, os alunos farão o trajeto de 15 minutos do intervalo, de acordo com o relato apresentado. Um aluno contará os passos dados e o outro cronometrará o tempo. Devem anotar as informações na tabela.
Objetivo	Ressignificar o trajeto que faz parte do cotidiano deles a partir de uma perspectiva Matemática.

Fonte: Autoria própria.

Figura 2 – Momentos de investigação da atividade 3

Fonte: Arquivo pessoal das autoras.

Dando continuidade, os alunos se engajaram no desenvolvimento da atividade 4 (Quadro 5), interpretando a tabela preenchida e refletindo sobre a relação de interdependência entre as grandezas distância e tempo.

Quadro 5 – Enunciado da tarefa dos trajetos: Atividade 4

Atividade	Em pequenos grupos, responder questões que os levem a refletir sobre relações de interdependência entre grandezas envolvidas: 1) Quanto tempo ficaram parados? Como perceberam isso olhando a tabela? 2) Houve alguma etapa em que andaram mais devagar que a outra? Em quais? Como perceberam isso apenas olhando na tabela? 3) Além da distância e do tempo, é possível perceber outras grandezas? Como essas grandezas se relacionaram?
Objetivo	Perceber as relações entre as grandezas envolvidas, particularmente observar a ideia de velocidade, que é a noção que relaciona a distância percorrida e o tempo.

Fonte: Autoria própria.

Nesta atividade, os estudantes tiveram que continuar refletindo sobre as grandezas envolvidas, desta vez, com os dados já produzidos. Por exemplo, ao pensar sobre a pergunta 1, os alunos notaram que, nos intervalos em que permaneceram parados, a distância permanecia a mesma e o tempo continuava correndo. Devido à discussão sobre velocidade iniciada anteriormente ao preenchimento da tabela, alguns estudantes utilizaram a fórmula da velocidade para testar os dados de algumas partes da tabela e descobrir se houve etapas em que eles andaram mais devagar que em outras. Por consequência, muitos estudantes demonstraram ter produzido sentido sobre como a velocidade era uma grandeza envolvida no trajeto, principalmente aqueles que na atividade 2 não a consideraram.

A partir da realização da atividade 4, as atividades seguintes foram desenvolvidas conforme uma dinâmica de auto-organização da turma de Ana Paula, a qual ocorreu a partir das necessidades percebidas por ela no contexto das discussões e das aprendizagens coletivas.

A atividade 5 tinha como foco a construção de um gráfico dos pontos sistematizados nas tabelas (Quadro 6). Para iniciar a abordagem desta atividade, Ana Paula seguiu o

caminho tomado por Marília. Então, solicitou aos estudantes que construíssem um gráfico com os dados da tabela primeiro no caderno e, depois, no GeoGebra. Tal decisão foi tomada porque Ana Paula esperava que nesse momento a compreensão da necessidade do tempo acumulado e da distância acumulada se tornasse mais clara para todos. Assim, durante a construção do gráfico no caderno, a professora pôde responder algumas perguntas dos alunos sobre os tempos e as distâncias a serem considerados: deveriam ser os tempos e as distâncias acumulados ou os tempos e as distâncias correspondentes a cada etapa do trajeto?

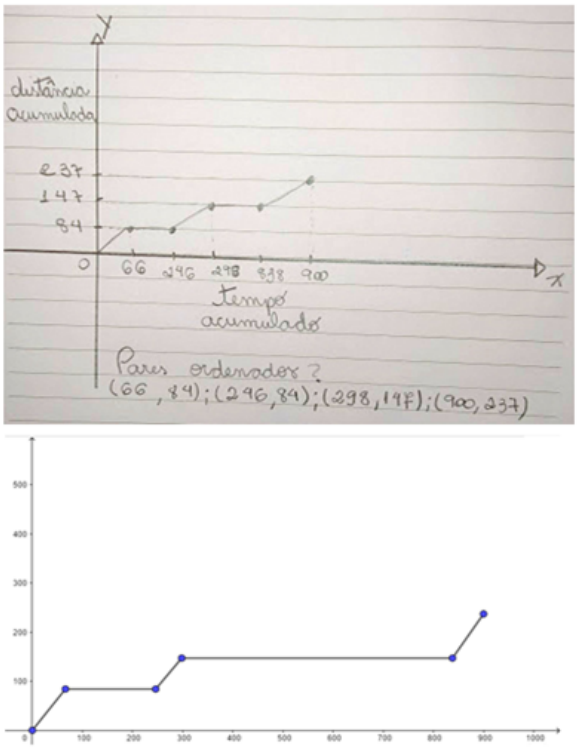
Além disso, Ana Paula decidiu não estabelecer qual grandeza deveria ser considerada no eixo das ordenadas ou das abcissas para a construção do gráfico. Essa foi uma ação da professora que tornou a tarefa ainda mais aberta, para que os alunos investigassem e refletissem sobre o motivo dessa decisão, de forma que eles associassem essa escolha à relação de interdependência entre as grandezas. Assim, Ana Paula apenas compartilhou informações técnicas sobre o uso do GeoGebra para a construção do gráfico.

Quadro 6 – Apropriação da tarefa dos trajetos pelo sEM: Atividade 5

Atividade	Construir o gráfico nos seus cadernos e utilizando o software GeoGebra. Trabalhando em equipes, respondam as seguintes perguntas: 4) Quanto tempo vocês ficaram parados? Como percebem isso olhando no gráfico? 5) Houve alguma etapa em que andaram mais devagar que outra? Em quais? Como percebem isso, olhando no gráfico? 6) Além da distância e do tempo, é possível perceber outras grandezas? Como essas grandezas se relacionam? (Depois do trabalho nas equipes foi realizada uma socialização com a turma toda).
Objetivo	Interpretar os elementos do gráfico.

Fonte: Autoria própria.

Figura 3 - gráfico



Fonte: Arquivo pessoal das autoras.

Ana Paula percebeu algumas dificuldades dos estudantes na construção dos gráficos. Dentre elas, que nos gráficos construídos no caderno os alunos apenas identificaram os eixos como "x" e "y", e não foi possível saber como os alunos associaram essas variáveis às grandezas envolvidas no trajeto, nem aceder à forma como compreendiam a relação de interdependência entre elas. Portanto, Ana Paula fomentou reflexões sobre a representação das grandezas no plano cartesiano, as variáveis que representariam tais grandezas e as variáveis dependentes e independentes. Foi necessário também sanar dúvidas sobre o conceito de par ordenado e sobre os eixos do plano cartesiano e as escalas consideradas. Ana Paula também ressaltou que, no plano cartesiano, a grandeza independente é comumente representada no eixo das abscissas e a dependente no das ordenadas.

É importante considerar que, em um gráfico de distância vs. tempo em um movimento uniforme, ou seja, um movimento com velocidade constante, o coeficiente angular da reta é a velocidade. Nessa direção, a percepção das grandezas envolvidas – discutida na atividade 2 –, o preenchimento da tabela durante a realização do trajeto na atividade 3 e a análise dos dados na atividade 4, foram importantes para a produção de sentido da representação geométrica que estava sendo desenvolvida neste ponto da tarefa.

Nesse sentido, Ana Paula percebeu a relevância de mobilizar os estudantes a darem mais atenção para a identificação das variáveis do gráfico, visto que ela compreendia a relevância de que seus alunos percebessem a relação entre as diferentes linguagens envolvidas na tarefa. Tal percepção contribuiria para o desenvolvimento do pensamento algébrico e, por consequência, para a produção de sentido da representação algébrica da Função que seria abordada nas atividades seguintes. Mas o tempo da aula já estava se encerrando, e a socialização daquela discussão aconteceria somente no terceiro dia. Então, Ana Paula decidiu iniciar a socialização, dando continuidade à discussão via o grupo do Facebook, com as seguintes indagações: "E aí pessoal, vamos continuar nossa conversa aqui? Quais são as grandezas envolvidas na situação do trajeto do nosso intervalo? Como essas grandezas se relacionam? Compartilhem aqui as possibilidades que vocês percebem". Nove dos 20 alunos da turma responderam ao convite de Ana Paula, registrando sua resposta no Facebook; entre elas estavam as respostas de Kátia e de Leonardo:

> **Kátia:** *As grandezas envolvidas são: distância, tempo e depois de pensarmos um pouco, a velocidade. O tempo depende da distância, por exemplo: se eu tenho um percurso de 45 passos, demoro aproximadamente 32 segundos para realizar o percurso e se aumentar a distância, aumentaria o tempo para a realização [...].*
>
> **Leonardo:** *Dessa vez é possível considerarmos o tempo, a distância e a velocidade. Quase todas elas relacionam-se entre si, uma de acordo com a outra, porém o tempo por si só é independente. Parados ou não, ele continuará [...] (FACEBOOK, 05/06/2017)*

Foram 19 alunos que visualizaram a discussão. Os 9 que responderam concordaram em que a distância, o tempo e a velocidade eram grandezas que estavam envolvidas no experimento dos trajetos. Entretanto, havia algumas contradições entre as respostas, por exemplo, algumas expressavam que o tempo dependia da distância e outras, que a distância

dependia do tempo. Também podemos notar algumas confusões entre conceitos físicos e matemáticos envolvidos na tarefa, muitas das quais podem ter sido provocadas pelos termos utilizados até aquele momento. Assim, na Física existe diferença entre os termos posição (S), deslocamento $(\Delta S = S_f - S_0)$, distância percorrida $(|\Delta S_1| + |\Delta S_2| + \cdots)$, tempo (t) e variação do tempo $(\Delta t = t_f - t_i)$. Na resposta de Kátia, por exemplo, o que estava sendo considerado de fato eram o deslocamento e a variação do tempo. Hoje consideramos que estas diferenças poderiam ter sido discutidas no momento de socialização da atividade 2, que culminou com a construção da tabela, pois a tarefa envolvia interpretações de fenômenos físicos. Por outro lado, uma tarefa aberta proporciona muitas informações a serem consideradas na modelagem de um fenômeno, o que exige que o professor faça escolhas para a finalidade pedagógica.

A professora iniciou a aula seguinte, dando continuidade à discussão iniciada no Facebook. Foi um momento com muito engajamento dos estudantes. Ela pediu que a aluna Kátia explicasse para o grupo o que ela quis dizer em sua resposta. Kátia começou a explicar que a distância depende do tempo, e o tempo, da distância; e os demais estudantes a indagaram, até que ela sentiu a necessidade de ir até o quadro esclarecer para o restante da turma o que queria dizer. Ana Paula sentiu muita satisfação, ao ver os estudantes envolvidos naquela discussão sobre conceitos matemáticos implicados no desenvolvimento daquela tarefa de natureza exploratório-investigativa. Era de fato um processo de matematização!

Ana Paula, então, indagou os estudantes, ressaltando a perspectiva do fenômeno físico: "*O que aconteceu com o tempo no momento em que vocês estavam parados na cantina ou banheiro, por exemplo?*". Foi quando Leonardo disse que o tempo não parou, e a professora aproveitou para acrescentar que matematicamente a explicação de Kátia fazia sentido. Contudo, quando se pensa no fenômeno físico, o que mais faz sentido é assumir o tempo como a grandeza independente, conforme observado por Leonardo. Esse foi um momento em que Ana Paula permitiu que os estudantes negociassem e produzissem sentidos para a noção de variável dependente e independente.

Os alunos também notaram que em algumas das etapas do trajeto era possível que os passos tivessem sido menores, visto que, em intervalos iguais de tempo, em etapas diferentes, o número de passos correspondente aos deslocamentos era diferente. A continuidade da discussão envolveu interpretações sobre a velocidade, especialmente na busca de resposta para a questão 5, quando o conceito de velocidade média $\left(v_M = \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ foi utilizado para a interpretação dos trechos do gráfico, produzindo sentido para a inclinação dos segmentos de reta, ou seja, o coeficiente angular da Função. Nessa direção, a professora explorou o conceito da taxa de variação, destacando a interpretação geométrica no gráfico e introduzindo a representação algébrica da função.

É fácil constatar que a tarefa do trajeto envolveu várias ideias e representações do conceito de Função, antes mesmo de uma explicação formal sobre tal conceito. Isso porque buscávamos nos distanciar do enfoque segundo o qual primeiro se introduzem as generalizações e as regras e depois se apresentam os problemas e exercícios (SANTANA FILHO, 2016). Na busca por uma abordagem exploratória e investigativa, a tarefa dos trajetos permitiu que discussões sobre diversas representações de uma função – em linguagem

natural, em uma tabela, em um gráfico – ocorressem juntamente com a realização e a interpretação de dados produzidos em uma experiência que envolvia um fenômeno físico. Ressaltamos que os alunos tinham a liberdade de responder as questões na ordem que desejassem, então a professora seguia para o quadro, buscando socializar a resposta de todos. A atividade 6 colocava novas inquietações (Quadro 7).

Quadro 7 – Enunciado da tarefa dos trajetos: Atividade 6

Atividade	Análise matemática dos gráficos. Trabalhando em equipes, respondam às seguintes perguntas: 7) Vocês conseguem fazer corresponder o gráfico com a descrição do trajeto realizado? Como? Se não conseguem fazer, em quais partes do gráfico ocorrem inconsistências? 8) Por que o gráfico termina quando atingem 15 minutos (900s)? 9) Por que não há gráfico para valores à esquerda do eixo y e abaixo do eixo x? 10) Em alguma etapa o gráfico fica decrescente? Por quê? 11) Por que os pontos foram unidos com segmentos de retas?
Objetivo	Compreender a representação geométrica das funções envolvidas.

Fonte: Autoria própria.

As perguntas da atividade 6 problematizam o modelo construído sobre o fenômeno e permitem contrastá-lo com a realidade. Por exemplo, foi assumido que no banheiro e na cantina os alunos ficavam "parados" – ou seja, que não houve deslocamento – quando, na realidade, é difícil que eles permaneçam exatamente no mesmo ponto durante sua estadia nesses espaços. Portanto, nessa parte do trajeto, o modelo representava de maneira simplificada o fenômeno estudado. Outra hipótese considerada foi supor que a velocidade média era constante, ou seja, que os alunos realizavam um movimento uniforme. Eles perceberam que esse era outro aspecto do modelo em que o fenômeno era considerado de maneira simplificada, visto que a sua velocidade não permaneceu constante em cada etapa. Foi a partir dessas explorações que a professora ressaltou para os alunos que o objetivo de matematizar o trajeto era fazer uma modelagem Matemática de um fenômeno físico; por isso, adicionar alguns dos detalhes considerados agregaria uma complexidade desnecessária para sua construção e interpretação. As questões 8, 9 e 10 propiciaram a discussão de mais ideias relacionadas ao conceito de Função que estavam envolvidas no modelo, principalmente as noções de imagem, domínio e crescimento da função.

No decorrer da tarefa a professora havia percebido que os estudantes uniram os pontos do gráfico com retas, de forma automática e sem reflexão, o que já havia sido apontado por Leticia a partir da experiência que viveu na Argentina com a tarefa. Mas, como Ana Paula não havia problematizado isso na construção do gráfico, decidiu acrescentar a questão 11 na atividade 6 (Quadro 7), para provocar a reflexão dos estudantes sobre essa decisão. Assim, a hipótese da velocidade constante pôde ser explorada nessa questão, fazendo sentido para a união dos pontos com retas. Embora a exploração das diferentes possibilidades de interpolações entre pontos pudesse ter sido realizada anteriormente à união dos pontos na construção do gráfico, a discussão neste momento da tarefa permitiu aprofundar a compreensão sobre a complexidade e a exatidão do modelo construído.

O quarto dia de trabalho teve por foco desenvolver uma interpretação algébrica do fenômeno estudado na tarefa (Quadro 8). Assim, com a atividade 7, a representação

algébrica da função decorreu da sua interpretação física e geométrica. Por exemplo, cada trecho do gráfico representava uma etapa do trajeto e era descrito por algum caso particular da função polinomial do primeiro grau, ou seja, uma função afim representada por f(x) = b + ax, com a e b reais e a≠0 e x∈ $\mathbb{R}$. A inclinação da reta representada por "a", já havia sido amplamente discutida em outros momentos, e os alunos já haviam associado à taxa média de variação ou velocidade média. As variáveis f(x) e x também se associaram com os símbolos d e t utilizados na tarefa.

Quadro 8 – Enunciado da tarefa dos trajetos: Atividade 7

Atividade 7	Análise algébrica. Estudar as representações algébricas de trechos do gráfico.
Objetivo	Compreender o conceito de Função a partir da representação algébrica de cada trecho, estabelecendo uma relação com o trajeto descrito na linguagem natural e a sua representação geométrica.

Fonte: Autoria própria.

Ana Paula solicitou que, em cada etapa, os alunos encontrassem o valor do coeficiente angular pelo cálculo da velocidade média. Também foi explorado o coeficiente linear, por meio da análise do ponto onde o gráfico da reta correspondente a cada parte do trajeto intercepta o eixo da distância (d). Desse modo, os alunos encontraram a representação algébrica de cada etapa do trajeto, descrita por algum caso particular da função polinomial do primeiro grau – função afim, função linear ou função constante. Os alunos puderam, assim, estabelecer relações entre essa representação e as representações em linguagem natural e gráfico, que tinham desenvolvido anteriormente.

Ademais, os estudantes perceberam que a função constante – representada por f(x) = b – representava as etapas em que eles estavam parados, ou seja, aquelas etapas em que a velocidade (inclinação) era zero $\left(V_M = \frac{0}{\Delta t}\right)$ Também observaram que a primeira etapa podia ser representada por uma função linear f(x) = ax, com a≠0 e x∈ $\mathbb{R}$, visto que o trajeto partia da origem do gráfico. Também foram discutidos quais eram os conjuntos domínio e imagem das funções que representavam cada etapa. Finamente, se realizou uma interpretação do crescimento da função nas distintas etapas do trajeto. As discussões da atividade 7 serviram para sistematizar ideias fundamentais do conceito de Função.

Considerações finais

Neste capítulo narramos nossas aprendizagens no processo de apropriação da tarefa dos trajetos no sEM e na implementação na sala de aula de Ana Paula, evidenciando as potencialidades do estudo de Função por meio de uma tarefa exploratório-investigativa.

Entendemos que a análise e a discussão em torno de uma tarefa num contexto colaborativo implicam que a implementação dessa tarefa em sala de aula considere mais alternativas para discussões matemáticas, uma vez que muitas já foram observadas por outros professores. No caso da tarefa dos trajetos, especialmente o olhar das professoras Leticia e Marília, que a aplicaram, contribuiu para o processo de apropriação crítica da

tarefa pelo sEM e, principalmente, por Ana Paula, que a implementou em sua sala de aula. A apropriação da tarefa se deu num processo de identificação com a – e transformação da – tarefa, no qual resultaram modificações que ampliaram as oportunidades de discussões sobre os conceitos envolvidos no estudo de Funções.

A natureza aberta, exploratória e investigativa da tarefa propiciou um leque de oportunidades para que Ana Paula buscasse atender as dificuldades reveladas pelos seus alunos e oportunizar investigações e discussões em grupos – e entre grupos – de estudantes. As ações docentes da professora refletiam a avaliação formativa e contínua que emergia nas discussões que ocorriam nas aulas. Entendemos que, para isso, também foi importante o olhar da professora para a complexidade da sala de aula, valorizando os imprevistos e buscando atender as necessidades que surgiam (BARROS; SIMMT; MALTEMPI, 2017).

Compreendemos que fenômenos físicos têm potencial para serem analisados em aulas de Matemática, produzindo diversos modelos matemáticos. Nesse sentido, a tarefa partiu da representação de um fenômeno na linguagem natural e, em seguida, foram desenvolvidas, comparadas e analisadas pelos estudantes a sua representação geométrica e algébrica. Conhecer essa potencialidade da tarefa foi importante para que, desde seu início, as ações da professora buscassem mobilizar o pensamento algébrico dos estudantes, o que foi importante para a produção de sentido nos momentos de sistematização do conceito de Função por meio de representações simbólicas algébricas. Por exemplo, os estudantes puderam analisar a relação de interdependência entre as grandezas tempo e distância, na descrição do trajeto, na elaboração da tabela, na construção do gráfico e na representação algébrica, bem como puderam compreender o coeficiente angular de uma função afim como velocidade média na análise das tabelas e na interpretação das inclinações das etapas representadas geometricamente. Foi-lhes possível também fazer conexões entre diferentes representações que são essenciais para compreender o conceito de Função.

A tarefa tem características que podem favorecer diferentes tipos de abordagens pedagógicas, por exemplo, o desenvolvimento de um projeto interdisciplinar entre Física e Matemática, explorando talvez mais conceitos físicos relacionados com noções matemáticas. Vimos aqui uma aplicação na aula de Matemática, o que nos permite perceber o grande potencial da tarefa no envolvimento de noções matemáticas complexas, as quais foram ressignificadas pelos alunos numa análise, sob uma perspectiva da física, de uma prática vivenciada por eles. Entendemos que análises de experimentos físicos podem ser caminhos para que o professor ajude o aluno produzir sentido para conceitos matemáticos.

Foi possível discutir e analisar a taxa média de variação – inclinação da reta, coeficiente angular da uma Função –, conjuntos de domínio e imagem e intervalos de crescimento de uma Função, antes mesmo da formalização desses conteúdos. Após os quatro dias de exploração dessa tarefa, as aulas tiveram o objetivo de aprofundar na formalização do conceito de Funções e suas aplicações, mas, ainda assim, contaram com as aprendizagens produzidas na tarefa dos trajetos.

As modificações feitas sobre a tarefa dos trajetos aplicada na Argentina no contexto do *LSH* a enriqueceram, sobretudo, devido aos momentos de problematizações, a partir de novas perguntas e criação de mais atividades, e socializações, os quais geraram discussões

aprofundadas sobre conceitos envolvidos no estudo de Funções. Viver essa experiência de apropriação da tarefa trouxe muitos aprendizados para os participantes do GdS, e esperamos que este capítulo também contribua para a produção de sentido às práticas docentes do leitor.

Referências

BARROS, A. P. R. M. *Práticas culturais (re)constituídas quando aulas de Matemática são mediadas pela internet em um ambiente híbrido.* 2019. 218p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2019.

BARROS, A. P. R. M.; SIMMT, E.; MALTEMPI, M. V. Understanding a Brazilian high school blended learning environment from the perspective of complex systems. J*ournal of Online Learning Research,* Waynesville, NC USA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE), v. 3, n. 1, p. 73-101, 2017. Disponível em: https://www.learntechlib.org/primary/p/173329/. Acesso em: 04 set. 2020.

CHRISTENSEN, C. M.; HORN M. B.; STAKER, H. Is K-12 *blended learning disruptive?*: An introduction of the theory of hybrids. [S.l.]: Clayton Christensen Institute, 2013. 47 p. Disponível em: http://www.christenseninstitute.org/wpcontent/uploads/2014/06/Is-K-12-blended-learning-disruptive.pdf. Acesso em: 17 out. 2013.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 34, n. 2, p. 137-167, 2003.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. *Pro-Posições*, Campinas, v. 4 n.1(10), p. 78-91, mar. 1993.

GARCÍA, J.; ZURBANO, P. P., ROMERO, V. *Funciones y función de proporcionalidad directa.* 2016. Informe Final Prácticas Profesionales docentes (Profesorado en Matemática) – Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, 2016.

SANTANA FILHO, F. S. O conceito de função nos livros didáticos de matemática. In: *ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, Educação matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades. 2016, São Paulo, SP.

E O GRÁFICO DO CRESCIMENTO SURPREENDEU: APRENDIZAGENS DOCENTES SOBRE A DERIVADA, VIVENCIADAS AO EXPLORAR UMA TAREFA INVESTIGATIVA

Maria Aparecida de Jesus Salgado

Quero, com esta narrativa, transformar meu olhar em lentes de aumento, a fim de privilegiar as discussões que permearam o subgrupo do Ensino Médio (sEM)[30], durante o Segundo Ciclo do *Lesson Study* Híbrido (*LS*H)[31], no primeiro semestre de 2018. O sEM se comprometeu a produzir uma tarefa capaz de relacionar, com a sala de aula, fenômenos que acontecem na vida real. Para isso, contou com a participação das professoras: Cláudia, Juliet, Leticia (coordenadora do grupo), Milda, Salgado (eu), Thaís e o mestrando Wellington. Pertinente à fase *Problematização e Planejamento* do ciclo de *LS*H, eu escolhi detalhar o processo de desenvolvimento do planejamento da tarefa. Quero mostrar como as discussões colaborativas e formativas, ao redor de uma tarefa aparentemente simples, nos proporcionaram avanços em nossa formação profissional, abriram espaço para boas reflexões e contribuíram para o desenvolvimento do conhecimento que o professor precisa mobilizar para ensinar matemática. Para tanto, não posso desprezar as discussões que antecederam o planejamento da tarefa. Considero pertinente compartilhar com você, leitor(a), quais caminhos nosso grupo percorreu até chegar a uma problemática para ser estudada e desenvolver uma tarefa.

Todos nós fomos convidados pela Leticia a procurar situações que permitissem desenvolver o pensamento crítico dos nossos alunos, fazendo-os compreender como a matemática se faz presente em nossas vidas e constatar que, a partir dela, é possível tomar decisões sobre situações do dia a dia. O convite significou um grande desafio e foi bem aceito pelos participantes. Ao embarcarmos nesse desafio, prontificamo-nos a participar assiduamente das reuniões de planejamento, às quintas feiras de cada semana, impreterivelmente das 9h às 12h, via Hangouts[32]. E quem não pode participar se comprometeu a ler as atas e envolver-se ativamente nas discussões que ocorreram pelo grupo de Whatsapp. Esta narrativa foi construída a partir dos áudios de tais reuniões, de suas respectivas atas e registros de conversas trocadas via Whatsapp.

[30] Subgrupo do Ensino Médio (sEM), faz parte do Grupo de Sábado (GdS) e é formado por professores que lecionam para o Ensino Médio e se reúnem para refletir sobre a própria prática.

[31] Um dos ciclos do Projeto Lesson Study, desenvolvido no GdS, financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), linha Ensino Público, processo: 2016/25982-9.

[32] O Hangouts é um aplicativo do Google que serve para troca de mensagens de texto, áudio, vídeo e também o envio de fotos e emoticons.

Em busca de uma problemática

Pensando no convite feito pela Leticia no início do ciclo, para buscar uma matemática presente em nossas vidas e que ao mesmo tempo estivesse inserida na proposta do currículo oficial do Estado de São Paulo para a 1.ª série do Ensino Médio (EM), decidimos que cada um de nós iria buscar em livros, jornais e revistas uma problemática que contemplasse o assunto de funções. Para nortear nossa busca, Leticia propôs algumas questões: 1) Que tipo de funções nossos alunos deveriam conhecer para compreender melhor o mundo onde vivem? 2) Que tipo de modelo matemático baseado em funções é utilizado para tomar decisões sobre as vidas dos nossos alunos, das suas famílias, da sua escola? Que situações poderiam evidenciá-las? 3) Quais situações, envolvendo funções, poderiam ser interessantes para apresentar aos alunos, procurando ajudá-los a reconhecer que a matemática é uma disciplina que estrutura suas vidas cotidianas? 4) Quais situações, envolvendo funções, poderiam contribuir para que nossos alunos se tornem cidadãos mais conscientes e possam participar responsavelmente na vida democrática? Além dessas questões, ela nos orientou que precisávamos de "uma grande delicadeza na escolha da problemática, deveria ser suficientemente próxima para eles se envolverem, e ao mesmo tempo suficientemente longe deles para que eles não se exponham" (Ata da reunião *online*, 23/02/2018). Ou seja, deveríamos procurar cuidadosamente assuntos que pudessem contemplar os alunos que tínhamos em sala de aula, porém evitar assuntos que pudessem constrangê-los, como, por exemplo, questões que os obrigassem a revelar sua renda familiar.

Após essa busca individualizada, tivemos uma reunião destinada a discutir os diferentes assuntos selecionados. O primeiro deles foi sobre o problema da obesidade. Poderíamos trabalhar com: a comparação entre as quantidades de calorias de dois alimentos; a variação do metabolismo, que vai ficando mais lento com o passar do tempo; o cálculo do Índice de Massa Corpórea (IMC)[33] e, nesse caso, vale ressaltar que existem vários fatores que podem influenciar no cálculo. Depois falamos sobre o lixo radioativo produzido por usinas nucleares, laboratórios médicos, centros de pesquisas, indústrias e pela agricultura. Poderíamos trabalhar com a meia-vida de materiais radioativos e explorar a quantidade de lixo tóxico, que inclui pilhas e baterias, que contêm ácidos e metais pesados em sua composição, além de resíduos industriais. Nesse caso seria necessário ampliar nosso conhecimento para podermos identificar com facilidade um lixo tóxico e um lixo radioativo. Em seguida, surgiu a importância de trabalhar o lixo reciclável, visto que o caso da febre amarela que aconteceu nesse ano (2018) em São João da Boa Vista foi influenciado pela quantidade de lixo acumulado. Verificamos, na internet, o tempo de decomposição estimado para diversos materiais, o que nos levou a discutir sobre compostagem, chorume, dentre outras coisas. Quanto mais aprofundávamos nossas discussões para compreender os temas sugeridos, mais esbarrávamos em caminhos diferentes, com muitas variáveis complexas. Por outro lado, antes de fazer uma opção, era necessário discutir, para compreender os temas sugeridos. Por fim, fizemos uma pausa e nos perguntamos: O que queríamos trabalhar com nossos alunos? Queríamos analisar dados? Interpretar tabelas? Relacionar grandezas

[33] IMC – parâmetro adotado pela Organização Mundial de Saúde para calcular o peso ideal de cada pessoa. O índice é calculado dividindo-se o peso do paciente pela sua altura elevada ao quadrado.

para introduzir funções? Foi quando Leticia teve a ideia de explorar as grandezas idade e altura. Inicialmente ela pensou apenas que os alunos deveriam desenhar uma linha de como seria sua altura de acordo com o tempo. E, para analisar os gráficos que surgissem, lançaríamos desafios. Foi uma ideia convidativa, pois seria possível trabalhar a construção gráfica, sua respectiva análise e expectativa de vida, lançando questionamentos sobre a idade máxima para traçar esse gráfico. E assim teve início nosso encanto pelo assunto. Nesse dia tivemos a honra de finalizar nossa reunião com Thaís destacando a importância desse encontro, ao usar as seguintes palavras: "só conseguimos definir um tema a partir de nossas discussões colaborativas sobre diferentes temas" (Ata da reunião *online*, 09/03/2018). Essa fala identificou o quanto estivemos envolvidos em discussões colaborativas: cada um trouxe um tema de interesse e, ao ser colocado em discussão, foram surgindo variáveis que ainda não tinham sido pensadas. Consideramos que o olhar, o respeito pelo outro e as discussões em conjunto foram e são importantes para guiar nossas decisões.

Desenvolvendo conhecimento matemático ao planejar a tarefa

Mais adiante, nosso desejo pelo tema foi reforçado e consolidado quando Milda postou no nosso grupo de Whatsapp um vídeo referente à resolução de uma tarefa do ENEM (2010)[34] que visava determinar qual gráfico, dentre um conjunto deles, representava melhor a variação da altura de um filho de um casal. E, a partir da próxima reunião *online*, nos colocamos a estruturar a tarefa, tendo como referência o enunciado que emergiu no final da última reunião: "Pedir para os alunos que façam um gráfico que representa a evolução da sua altura ao longo de toda a sua vida".

Começamos as discussões pensando em quais ideias poderíamos desenvolver com essa atividade. Por onde começar esse gráfico, a partir de qual altura? Seria a partir do nascimento ou a partir da barriga da mãe? Refletimos sobre como é que as pessoas medem a duração de sua vida. Discutimos que existe uma diferença na contagem desde a gestação. Quando a mãe está grávida, a contagem é em semanas; depois, quando o bebê nasce, até completar um ano de vida, contam-se os meses. Somente a partir de um ano é que a contagem é feita de ano a ano. Sendo assim, pensar a partir do período da gravidez envolveria considerar diversas escalas para a variável tempo: semanas, meses e anos. Entendemos, então, que seria viável associar o início do gráfico com o dia do nascimento, inclusive esse é um marco social, o dia em que se comemora o aniversário. Ao usar a variável ano para idade, costumamos utilizar, também, números inteiros. Por exemplo, quando perguntamos a idade de alguém ela apenas responde "tenho tantos anos" e não menciona a quantidade de meses.

Fechada essa discussão, surgiu outra dúvida: será que o aluno sabe com quantos centímetros ele nasceu? Fácil de resolver. Seria permitido ligar e conversar com a mãe para saber a sua altura no momento em que nasceu. E, se ela também não soubesse, o aluno poderia consultar a internet sobre com quantos centímetros, em média, nasce uma criança; ou, ainda, poderíamos ter uma tabela impressa em mãos. A ideia de usar a internet para

[34] https://www.youtube.com/watch?v=M1tiYFqulWs

pesquisa foi considerada importante, pois o aluno teria oportunidade de pensar nas diferentes situações que poderiam acontecer – por exemplo, existe uma diferença do tamanho de meninos para o de meninas, desde a gestação. O aluno precisava tentar compreender o que é considerado natural acontecer.

Em seguida surgiu mais uma dúvida: e se eles marcassem dois pontos, um na altura inicial (ao nascer), outro na altura atual e depois ligassem esses dois pontos com uma reta? Nesse caso, deveríamos lançar questionamentos, a fim de levar o aluno a refletir que unir esses dois pontos não representaria a vida toda, conforme solicitava a tarefa. O fato de perguntar para o aluno em que lugar do gráfico seria possível identificar sua altura após os quarenta anos o faria pensar em como expressar graficamente a altura de uma pessoa mais velha. Por outro lado, se o aluno desse continuidade à reta desenhada, significaria que nunca iria parar de crescer. Devíamos levá-lo a considerar que existem momentos da vida nos quais o crescimento é mais acelerado, outros em que é mais lento e que, a partir de certa idade, a pessoa para de crescer. Se uníssemos os dois pontos com uma reta, significaria que o crescimento é sempre igual, em qualquer período da vida.

Tudo que estava surgindo em nossas discussões era muito desafiador. Estávamos tentando construir um modelo matemático[35] para representar a evolução da altura ao longo da vida. Quando elaboramos o enunciado da tarefa, pensamos que seria algo muito singelo, mas ao longo do planejamento nos surpreendemos com o potencial da tarefa. Ela era ampla, trouxe muitas discussões matemáticas, envolvia conhecimentos e habilidades matemáticas em nível aprofundado. Por isso, era muito importante envolver nossos alunos na construção desse modelo. Precisávamos pensar em oportunidades nas quais eles também passassem pelos questionamentos que nós enfrentamos. Nesta fase do planejamento estávamos prevendo diversas possibilidades de execução e dúvidas que poderiam surgir no momento da implementação, visto que a tarefa era de natureza aberta. Tínhamos que ter muitas "cartas na manga", para decidir o que oferecer ao aluno e ajudá-lo a se desenvolver no momento da sua dúvida.

Fomos, então, aprofundando nossas reflexões e, de forma colaborativa, ampliamos nossa compreensão do significado das representações gráficas no plano cartesiano. O que o gráfico nos traz que a tabela não evidencia claramente? Qual a diferença entre usar um gráfico e usar uma tabela para representar o fenômeno? Numa tabela, é possível ter acesso a valores pontuais com facilidade e precisão. Assim, seria possível fazer uma tabela com as alturas de uma pessoa no primeiro, no segundo, no terceiro e no quarto anos de vida. Já o gráfico cartesiano do fenômeno de crescimento traria a ideia de curva contínua. Ou seja, o gráfico evidencia o movimento, o caminho percorrido, dando oportunidade de estimar o que vai acontecer em determinados pontos não abordados por uma tabela. Nesse caso, usar o gráfico trouxe a ideia de valores reais, porque associa todos os valores possíveis da variável independente a todos os valores possíveis da variável dependente.

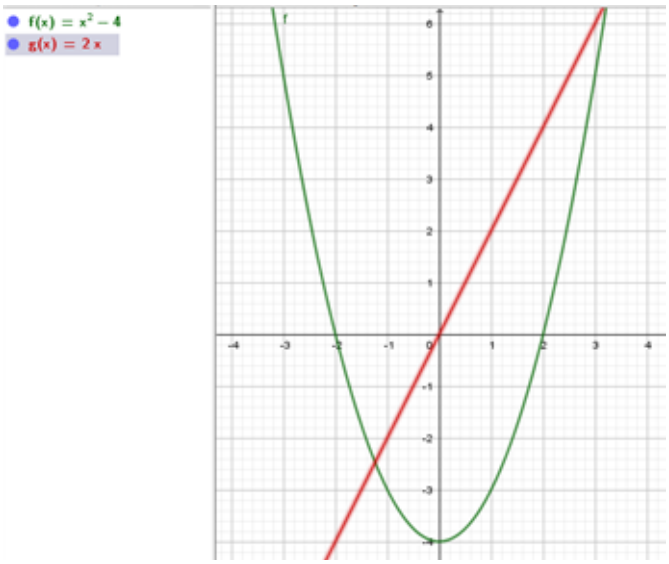
Além disso, um gráfico é um instrumento que permite analisar o comportamento das variações da taxa de crescimento ou decrescimento de um dado fenômeno. Olhar para cada

[35] Um modelo matemático é uma representação simplificada da realidade, sob a ótica daqueles que a investigam. Ele visa fomentar a solução de algum problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2019, p.13).

variação que ocorre no eixo horizontal, onde se representa a variável idade, e associá-las com a variação indicada no eixo vertical – que corresponde à variável altura –, é importante para poder discutir com os alunos sobre quais são os períodos nos quais uma pessoa cresce mais ou menos. Por exemplo, uma variação de um ano de vida no eixo horizontal corresponde a qual variação em centímetros no eixo vertical? Essa variação é a mesma para todos os anos de vida? De que maneira unir os pontos? O que significa uma curva com concavidade voltada para cima ou voltada para baixo? A partir desses questionamentos nos deparamos com a seguinte pergunta: como deveria ser a curva para representar os primeiros anos de vida? Ao refletir, entendemos que a curva deveria ser com concavidade voltada para baixo. Nos primeiros anos de vida, a criança cresce de forma acelerada, em seguida vai diminuindo o ritmo de crescimento. Então, percebemos que isso ocorria porque a taxa de variação, de um ano para outro, era decrescente. Essa taxa de variação tem a ver com a derivada. Nós, professores, não teríamos que falar sobre derivada para nossos alunos, mas precisávamos compreender sobre os significados envolvidos.

E, nesse momento da discussão, eu, em particular, me defrontei com questões que não compreendia. Eu sabia calcular a derivada da função, mas não conseguia associar seu significado a sua representação gráfica. Foi quando pedi ajuda ao grupo. Pedi para me explicarem como eu poderia compreender essa representação a partir da função $f(x)=x^2-4$, cuja derivada era $f'(x)=2x$. A imagem que eu fazia, inicialmente, para essa nova função (derivada), era de uma reta passando pela origem e que iria cruzar a função original em dois pontos diferentes (Figura 1).

Figura 1 – Ideia inicial da autora para a função derivada



Fonte: Autoria própria.

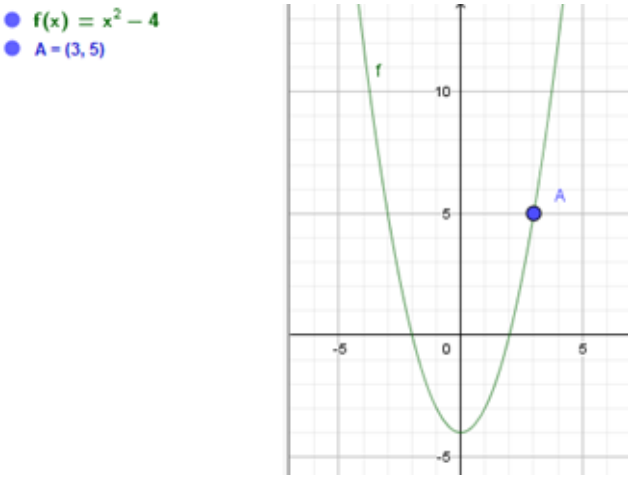
Então nos envolvemos num processo de desconstruir e reconstruir a interpretação de derivada. Thaís dizia: "*A ideia da derivada é que para cada ponto da curva eu encontre uma tangente a ela*" (Áudio da reunião *online*, 06/04/2018). Ótimo, mas eu continuava presa àquela imagem de uma reta passando pela origem, não estava conseguindo visualizar como

a função f'(x)=2x poderia ser uma reta tangente, com apenas um ponto em comum com a função inicial $f(x) = x^2 - 4$. O que eu não sabia era que a função derivada nos permitia calcular o coeficiente angular da reta tangente num determinado ponto. Então Leticia fez uma busca rápida na internet e leu para nós a definição que encontrou sobre derivada:

> *No cálculo, a derivada em um ponto de uma função, representa a taxa de variação instantânea de y em relação x, neste ponto. Um exemplo típico é a de função velocidade que representa a taxa de variação (derivada) da função espaço. Do mesmo modo, a função aceleração é a derivada da função velocidade. Geometricamente, a derivada no ponto x=a e y= f(x) representa e inclinação da reta tangente ao gráfico dessa função no ponto (a, f(a)).* (Áudio da reunião *online*, 06/04/2018)

Em seguida concluiu que a derivada num ponto representava a inclinação da reta tangente naquele ponto; e, na sequência, Thaís argumentou que uma reta precisa de dois pontos, e só tínhamos o ponto (a, f(a)). Leticia posicionou, na câmera do seu notebook, o desenho que fez em suas anotações, quando pensou em que, para passar ao nível gráfico, a primeira coisa que precisava fazer era determinar um ponto na curva. Sendo assim, na função $f(x) = x^2 - 4$, para x=3, teríamos $f(3) = 3^2 - 4$, então f(3)=5 (Figura 2). Continuou com suas explicações verbais e de repente passamos por um momento de silêncio. Ele significou que ainda não havia compreensão do que a derivada representava graficamente. Eu entendia que existiam diferentes taxas de variação, mas eu não conseguia relacionar as diversas taxas de variação com a função derivada (f'(x)=2x).

Figura 2 – Função $f(x) = x^2 - 4$)=5

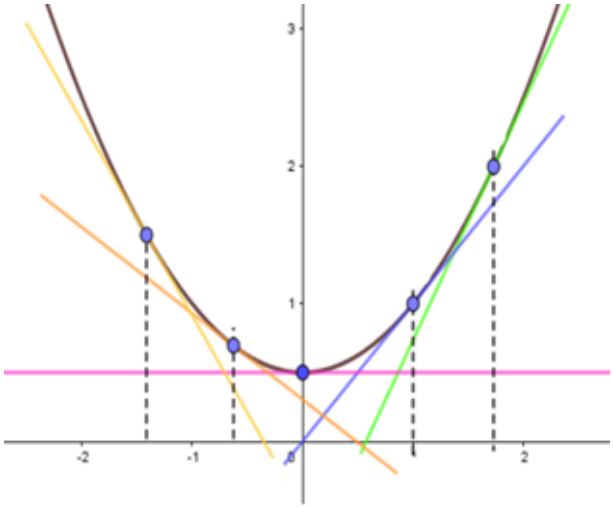


Fonte: Autoria própria.

Leticia resolveu fazer um desenho de uma curva qualquer (Figura 3), para explicar que, para cada par ordenado pertencente à curva, seria possível traçar uma reta que passasse por esse ponto e que fosse tangente à curva. Nesse caso, teríamos muitas retas tangentes, com inclinações diferentes (ângulo formado entre o eixo das abscissas e a reta tangente). Logo, cada reta teria um coeficiente angular (tg α) e seria possível construir uma tabela,

especificando o coeficiente angular para cada valor de x pertencente à curva.

Figura 3 – Diferentes retas tangentes a uma curva

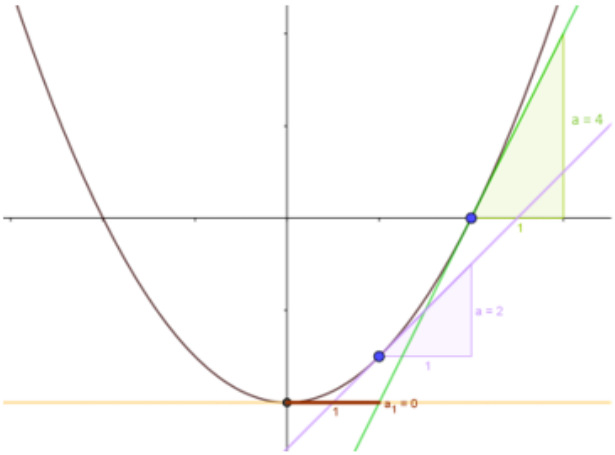


Fonte: Autoria própria.

Em seguida, voltou ao exemplo da função $f(x) = x^2 - 4$. A partir de sua derivada, calculou o coeficiente angular para x=0, para x=1, para x=2, e assim sucessivamente, conforme mostra a tabela seguinte. Depois nos apresentou um novo desenho, associando os coeficientes encontrados com a função quadrática proposta. (Figura 4)

Figura 4 – Inclinações de retas tangentes para a função $f(x) = x^2 - 4$

x	$f'(x) = 2x$	Coeficiente angular
0	$f'(0) = 2(0)$	$f'(0) = \mathbf{0}$
1	$f'(1) = 2(1)$	$f'(1) = \mathbf{2}$
2	$f'(2) = 2(2)$	$f'(2) = \mathbf{4}$



Fonte: Autoria própria.

Foi nesse momento que tudo fez sentido. Compreendemos que, substituindo um valor da variável independente na função derivada, iríamos obter somente o coeficiente angular (m ou tg α). Por exemplo, voltando na Figura 2, o par ordenado destacado na curva era (3,5), e sabíamos que por aquele ponto passava uma reta tangente à curva, cujo coeficiente angular seria 6 (f'(3)=2.3=6).

Se quiséssemos encontrar a equação para a reta tangente nesse ponto, bastava utilizar o par ordenado (3,5) e igualar o coeficiente angular à razão entre a variação de duas ordenadas pela respectiva variação de suas abscissas, ou seja, $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}}$ ou

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\textit{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\textit{cateto adjacento ao ângulo } \alpha}$$

Se considerarmos a primeira fórmula, temos:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}}$$

Multiplicando ambos os membros por $x - x_0$, obtemos:

$$y - y_0 = m\,.(x - x_0)$$

Somando y_0 em ambos os membros, obtemos a expressão da reta tangente:

$$y = m\,.(x - x_0) + y_o$$

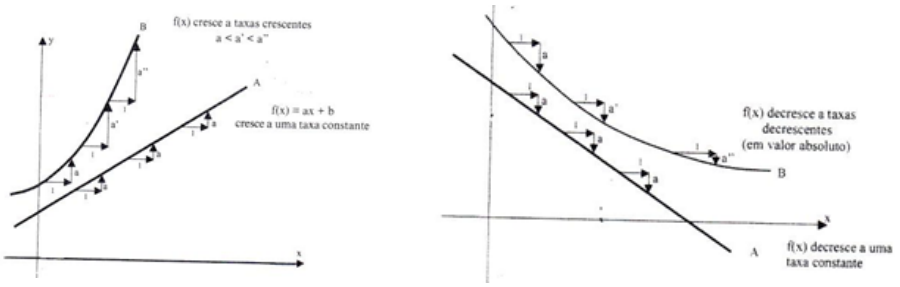
Agora, se queremos saber a equação da reta tangente no ponto (3,5), já vimos que m=6. Substituindo os valores, obtemos:

y=6x-13

Essa é a equação da reta tangente à curva $f(x) = x^2 - 4$ no ponto (3,5).

Para finalizar essa reflexão, concluímos que, para a função $f(x) = x^2 - 4$, para valores positivos de *x* (*x*>0), à medida que a função cresce, o coeficiente angular também aumenta, mostrando que se trata de uma taxa de crescimento. E, para valores negativos de *x* (*x*<0), o coeficiente angular diminui, ficando cada vez mais negativo, mostrando que se trata de uma taxa de decrescimento em valor absoluto. A imagem seguinte (Figura 5) mostra uma visão gráfica que representa taxas de variação de acordo com o tipo de curva.

Figura 5 – Taxas de variações para curva com concavidade voltada para cima



Fonte: Caderno do Aluno, 3.ª série, v. 2, Matemática – Governo do Estado de São Paulo (2017, p.27-28).

Dar significado à ideia de funções que crescem a taxas crescentes e decrescem a taxas decrescentes foi um novo conhecimento que construí ao longo dessas discussões, que foram relevantes para minhas intervenções no momento de implementar a tarefa em sala de aula.

Finalizadas todas essas discussões matemáticas, durante esse encontro, voltamos a trabalhar sobre os objetivos da tarefa, que ainda estavam na sua formulação inicial. A compreensão aprofundada do processo de construção de um modelo gráfico para o fenômeno escolhido – que foi possível através dos diálogos e dos intercâmbios já relatados – nos permitiu clarear e separar os objetivos da tarefa. E assim, os objetivos ficaram redigidos da seguinte forma:

1. Compreender um fenômeno no qual está envolvida a relação entre duas variáveis (altura e idade).
2. Representar essa relação, usando linguagem gráfica.
3. Argumentar sobre as decisões envolvidas na construção desse gráfico – origem e final da curva, eleição dos eixos, eleição da escala, pontos de referência, tipo de curva.
4. Explorar com os alunos as potencialidades da representação gráfica de uma relação: poder estimar valores "intermediários" e poder explorar as taxas de variação da relação.

Considerações finais

Para sintetizar as discussões que vivenciamos no início do Segundo Ciclo de *Lesson Study* Híbrido, cabe dizer que sempre temos algo a aprender. Uma pessoa sozinha pode não ter tantas ideias, mas um conjunto de pessoas dispostas a colaborar e negociar significados pode ter milhões de ideias, e uma pode complementar a outra. As discussões que permearam este relato nos mostram o quanto é difícil escolher um problema para ser trabalhado em sala de aula. Foi preciso discutir em conjunto, ouvir o que cada um tinha a dizer sobre ele e sondar as possíveis explorações sobre o tema. E então, depois, ajustar os objetivos pedagógicos a serem alcançados com aquela tarefa.

Dentre tantas experiências que vivenciamos ao aprender, nesse processo, é possível dizer que conseguimos expandir nosso olhar ao analisar uma representação gráfica de um fenômeno aparentemente muito singelo. Foram diversos os questionamentos que nos ajudaram a ampliar esse olhar. Analisamos, por exemplo, por onde iniciar e onde terminar o gráfico; a escala a ser utilizada; o tipo de curva para unir os pontos; a diferença entre usar um gráfico de linhas e uma tabela.

As explicações sobre a variação da taxa de crescimento ou decrescimento e de coeficiente angular não somente me ajudaram a compreender o conteúdo abordado com a tarefa planejada, como também me prepararam para fazer intervenções satisfatórias para outra série em que leciono, a 3.ª série do Ensino Médio (EM). Está previsto, no currículo

do Estado de São Paulo, iniciar o ano letivo para 3.ª série (EM) falando sobre equação da reta e coeficiente angular. Depois, sobre os diferentes tipos de curvas, analisando a taxa de variação. Hoje entendo que não são conteúdos distintos, não faz sentido ensinar coeficiente angular sem ensinar a taxa de variação. A partir dos desenhos que Leticia fez, seguidos de explicações, pude perceber que não são itens isolados; pelo contrário, taxa de variação e coeficiente angular se inter-relacionam. Este estudo veio a mudar minha prática em sala de aula. Compreendo o quanto é importante abordar, desde o primeiro ano do EM, o significado de coeficiente angular e taxa de variação. Ou seja, tais discussões colaboraram para minha formação como professora que ensina matemática.

Sou grata pela parceria e pela colaboração do subgrupo. Todos nós temos algo a colaborar. Por isso, sempre aprendemos juntos, para fazer a diferença.

Referências

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo, SP: Contexto, 2019. 13 p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria Estadual de Educação (org.). *Matemática:* 3.ª série. Caderno do Aluno. São Paulo: R2 Editorial, 2017. v. 2.

ANO TEM ALTURA? CORES TRAZEM SENTIDO? ESTUDO DA LINGUAGEM GRÁFICA PRODUZIDA POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO NO CONTEXTO DE LESSON STUDY HÍBRIDO

Thaís de Oliveira Ferrasso

Observe este convite: "Construa um gráfico que represente a variação da sua altura ao longo da vida". Em um primeiro momento pode parecer um convite simples e de fácil execução. Porém, discorro, nesta narrativa, sobre a complexidade desta tarefa, destacando um processo de comunicação envolvendo a linguagem gráfica desenvolvido por alunos da 1.ª série do Ensino Médio.

Essa experiência faz parte de um projeto de pesquisa[36] desenvolvido pelo Subgrupo do Ensino Médio (sEM), do Grupo de Sábado (GdS), durante o segundo ciclo de *Lesson Study* Híbrido (*LS*H). Um ciclo do *LS*H é desenvolvido em um semestre e contempla três grandes fases[37]: *(1) Problematização e Planejamento; (2) Implementação e Observação; e (3) Reflexão e Sistematização*.

Esse ciclo aconteceu no primeiro semestre de 2018 e contou com a participação de pesquisadores da Universidade (Leticia – pós-doutorado, Wellington e Juliet - mestrado) e de professoras da escola básica (Thaís, Salgado e Juliet).

Na segunda fase, de Implementação e Observação na sala de aula, no momento de observação e registro das aulas, um dos integrantes do subgrupo atuava como professor da sua turma e os outros participantes observavam e produziam registros da aula. Esta narrativa traz análise de dois gráficos que foram feitos em aulas da Prof.ª Salgado, em que eu atuei como observadora.

Na fase de Reflexão e Sistematização, no final do segundo ciclo, cada subgrupo organizava um recorte da experiência vivida e apresentava-o em uma reunião prevista no GdS, oportunidade de discussão e análise inicial dessa experiência. Essa fase colocava importantes desafios para nós, professores, visto que tínhamos dificuldade em deixar em segundo plano nossas aprendizagens pessoais e investir na análise da produção dos alunos.

No segundo ciclo, fomos desafiadas e motivadas a desenvolver um trabalho interpretativo da produção dos nossos alunos. O fruto desse trabalho é a presente narrativa.

Escolhi dividir este texto em quatro seções: primeiro apresentarei a tarefa que planejamos, para que o leitor compreenda um pouco melhor o contexto matemático que

[36] Projeto financiado pela FAPESP, com duração de quatro semestres – de agosto de 2017 a julho de 2019.

[37] Para mais detalhes sobre as atividades desenvolvidas em cada fase de um ciclo completo do LSH, leia o capítulo de Introdução deste livro.

embasa esta narrativa; em seguida, exporei como construímos lentes para enxergar a produção dos alunos, indicando o processo e as interações vividas entre os participantes do ciclo de *LS*H; então, apresentarei a análise de dois gráficos produzidos por alunos; e, por fim, encerrarei com as contribuições desse processo.

Apresentando a tarefa

O trabalho do sEM, para criação dessa tarefa, emergiu de um convite da coordenadora do sEM, Prof.ª Leticia, para trabalharmos com Matemática Crítica direcionada para alunos da 1.ª série do Ensino Médio, deixando um pouco de lado o currículo como ponto de partida para a reflexão, sem necessariamente perdê-lo de vista. Com isso, optamos por desenvolver uma temática que não exigisse pré-requisitos de conceitos matemáticos e que, em certa medida, contemplasse uma problemática, ao mesmo tempo, suficiente próxima para eles se envolverem, porém, suficientemente distante, preservando a exposição dos alunos.

Escolhemos estudar a representação gráfica de um fenômeno: a variação da altura do ser humano ao longo da vida. Planejamos esse trabalho de modelagem matemática de forma que os alunos trabalhassem inicialmente sozinhos, cada um desenhando seu próprio gráfico e, em seguida, houvesse uma troca ordenada dos gráficos – preferencialmente uma distribuição em duplas – para que cada aluno, mediado por algumas questões escritas, se empenhasse na leitura e na interpretação do registro do colega. Em um terceiro momento, unimos duas duplas, mantendo leitor e escritor juntos, para que discutissem e ponderassem sobre as diferenças e as semelhanças de suas escolhas. Esse grupo iria sintetizar suas escolhas na construção de um novo gráfico, agora de um personagem, buscando uma linguagem clara e objetiva do fenômeno representado.

Tivemos a intenção de contemplar três objetivos nessa tarefa: Que os alunos pudessem (1) Compreender um fenômeno no qual está envolvida a relação entre duas variáveis; (2) Representar, ler e interpretar essa relação, usando linguagem gráfica; (3) Argumentar sobre as decisões envolvidas na construção desse gráfico. Ela foi planejada como sendo o pontapé inicial para a introdução do conceito de função.

Trata-se de uma tarefa aberta, em que o aluno deve se sentir à vontade para fazer suas escolhas: o material que ele quer usar para fazer o gráfico (disponibilizamos folhas de almaço de papel quadriculado de 0,5 cm por 0,5 cm e de 1 cm por 1 cm, folha A4, cartolinas, canetinhas coloridas e régua); e a forma como ele vai acessar as informações para colocar no gráfico – medir a própria altura, consultar os familiares para saber qual a medida do comprimento com que nasceu, usar o celular para acessar tabelas de referências de altura desde a fase de bebê até a adolescência (disponibilizamos trena, deixamos usar celular em sala de aula, tivemos em mãos algumas tabelas de referência). Assim, a tarefa ficou dividida em três partes, planejada para ser executada em quatro aulas (de 50 minutos cada), conforme enunciado do Quadro 1.

Quadro 1 – Fragmento do enunciado da Tarefa

Estudo da representação gráfica de um fenômeno **Parte 1:** Trabalhando individualmente, construa um gráfico que represente a variação da sua altura ao longo da vida. **Parte 2:** A sua tarefa, agora, é fazer a leitura e a interpretação do gráfico de um colega do seu grupo. A partir dessa leitura: a) Conte em um parágrafo como foi variando a altura do seu colega ao longo da vida. b) Indique pelo menos duas informações que você acrescentaria no gráfico do seu colega para torná-lo mais completo. **Parte 3:** (Trabalhando em grupo) Construir um gráfico que represente a variação da altura do personagem escolhido ao longo da vida.

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

As partes 1 e 2 foram planejadas para acontecerem em um mesmo bloco, se possível, em uma aula dupla, pois entendemos que elas se complementam. Depois desse trabalho de produção e interpretação, em outras duas aulas, o grupo escolheria um personagem para construir um novo gráfico, a partir de algumas opções apresentadas pela professora, como o caso de um homem de 80 anos que atualmente media 1,71m ou um bebê de 5 meses com 61 cm (Vide Apêndice 2 para uma descrição completa da tarefa).

Para essa atividade, orientamos a produção do grupo com alguns procedimentos por escrito, como destacado no Quadro 2.

Quadro 2 – Orientações para a produção do grupo

Orientações: Depois da construção, da leitura e interpretação dos gráficos feitos nos itens anteriores, o grupo deve elaborar um novo gráfico, em um cartaz, para ser apresentado para a sala. Para isso, vocês irão escolher um personagem. O professor irá disponibilizar algumas imagens diferentes de personagens, cartolina e os mesmos materiais da parte 1 desta tarefa. Atentem: esse cartaz será fixado na lousa e o grupo deverá apresentá-lo para toda a turma de forma objetiva. Terão aproximadamente dois minutos para essa apresentação, destacando as negociações do grupo sobre as suas escolhas e descobertas.

Fonte: Material elaborado pelo sEM-GdS.

Entendemos a importância desse direcionamento para a terceira parte, para que os alunos, mediados pelo professor, socializem entre si o raciocínio que desenvolveram durante a atividade, validando e ampliando suas percepções sobre o fenômeno representado e a teoria matemática que sustenta a linguagem gráfica escolhida. Essa etapa é fundamental e de síntese do trabalho desenvolvido.

Construindo lentes para analisar a produção dos alunos

Como anunciado no título desta narrativa, essa tarefa explora a comunicação mediada pela linguagem gráfica produzida e interpretada pelos alunos. Quando o aluno é convidado a construir um gráfico que represente a variação da sua altura ao longo da vida, ele é mobilizado a refletir sobre diversos parâmetros que o ajudarão nessa construção.

A linguagem gráfica é um gênero textual que preserva sentidos e significados tanto na escrita quanto na leitura. Segundo Abreu (2008, p. 27), "um texto existe sempre dentro de um determinado gênero e: (a) é uma proposta de construção de sentidos; (b) é um produto de uma intenção; e (c) existe, sempre, dentro de um gênero". Escrever está diretamente associado a ler. O que eu escrevo e o outro lê é uma proposta de construção de sentidos, já que a leitura captura a intenção de quem escreveu. Para que haja efetiva comunicação, escritor e leitor precisam dominar a linguagem usada, os símbolos escolhidos para a representação, e é importante haver clareza e objetividade nessa linguagem. Além disso, há margem para interpretação, e os sujeitos fazem isso a partir dos conhecimentos e das experiências que vivenciaram, que são únicos e exclusivos de cada indivíduo. O que eu escrevo é o que o outro lê (e vice-versa)? Ou seja, o registro escrito é fidedigno à intenção de seu autor? Conhecer a leitura do outro ajuda a avançar nessa comunicação e refletir sobre o registro escrito.

Entendemos que essa tarefa não buscava classificação em certo ou errado, mas sim, a problematização das diferentes compreensões a partir da linguagem gráfica registrada a fim de modelar um fenômeno da variação da altura ao longo do tempo e, com isso, melhorar tanto a escrita quanto a leitura e a interpretação do gráfico.

Para construir essa tarefa, analisamos diferentes gráficos produzidos por colaboradores ou alunos. Isso nos fez perceber a riqueza expressa na linguagem escrita e o quanto discuti-la e tratá-la, mediados pela comunicação, nos permite polir e ampliar a lente com que enxergamos, lemos e interpretamos esse gráfico. Esse processo se constituiu ao longo da primeira fase do ciclo do LSH, preparando-nos para implementar essa tarefa em sala de aula e ajudar os alunos a avançar.

Com a tarefa bastante aberta, identificamos a necessidade de ajudar os alunos e analisar suas produções de forma personalizada, durante a implementação, com o propósito de eles identificarem os parâmetros importantes na construção do gráfico que irá mediar a análise sobre o fenômeno estudado. São eles: 1) tipo de gráfico; 2) grandezas e suas posições nos eixos; 3) escala; 4) origem e fim do gráfico; 5) pontos de referência; e 6) tipo de curva. Detalho um pouco de cada um desses eixos, contemplando os estudos e as discussões ocorridos no sEM.

Para começar, faz-se necessário escolher o **tipo de gráfico** a ser usado. Como o estudo trata de altura, o aluno pode associar a um gráfico de barras, relacionando a altura da barra com a altura do indivíduo. Essa escolha não é apropriada para representar esse fenômeno, já que se trata de um fenômeno contínuo. O gráfico de barras seria ideal para representar a frequência de altura dos alunos de uma classe, por exemplo. Outra escolha que o sEM esperava que os alunos construíssem era a de um gráfico de setores, porém também não era adequado para a representação desse fenômeno.

A escolha das **grandezas e suas posições nos eixos** estava associada à palavra "variação", escolhida para o enunciado da tarefa. Essa palavra, importante para o estudo de funções, foi pensada para enunciar a relação entre as duas variáveis em estudo: altura e idade. Entendemos que seria uma palavra mais apropriada do que crescimento ou evolução, que sinalizam um fenômeno que sempre aumenta. Tivemos a hipótese que os

alunos construiriam o gráfico utilizando o plano cartesiano e iriam escolher a idade para ser representada no eixo das abscissas e a altura no eixo das ordenadas, porém, nos preparamos para encontrar gráficos com a inversão dessa escolha.

Depois de definidas as variáveis dos eixos, os alunos poderiam avançar para a **escala** a ser utilizada. Na prática social, medimos idade em semanas (durante a gestação), em meses (para o bebê) e em anos (a partir da infância), o que dificulta a escolha da escala. Além disso, a vida humana está dividida em quatro fases: infância (dos 0 aos 12 anos), adolescência (dos 12 aos 20), fase adulta (dos 20 aos 60) e velhice (a partir dos 60 anos); e a altura, em cada uma dessas fases, apresenta comportamento bem diferente. Então, quanto maior a escala, menor a precisão de detalhes a serem contemplados pelo gráfico. Por exemplo... um gráfico de 1 em 1 ano traria bastante precisão, mas o gráfico ficaria gigante! Um gráfico com escala de 10 em 10 anos traria pouca informação sobre os anos iniciais, mas seria bastante relevante para os anos finais. Ainda assim, podemos esperar casos em que os alunos não se prendam a números e construam um gráfico sem estabelecer essas medidas.

Qual a **origem e o fim do gráfico**? Quando a vida começa? Apesar de considerarmos o nascimento do bebê o momento inicial para iniciar a contagem de sua idade, sabemos que ele já tinha vida e altura na barriga da mamãe. Dessa forma, há possibilidade de alunos iniciarem a contagem do tempo de vida a partir do marco zero considerado socialmente – o nascimento –, ou o zero absoluto, que seria no momento da fecundação. Quando a vida termina? Essa é uma pergunta que não tem resposta enquanto não morremos, porém, um dado que ajuda nessa compreensão é a expectativa de vida, um dado estatístico bastante utilizado pela nossa sociedade, que quantifica a idade média de vida de homens e mulheres, distinguindo-a, inclusive, em relação a algumas categorias como região ou raça, por exemplo.

Para construir o gráfico, entendemos que os alunos vão buscar alguns **pontos de referência** de altura: a altura com que nasceram ou a altura atual, por exemplo. Essas medidas podem ser acessadas com uma consulta à família, ou ainda, com o uso da trena na própria sala de aula. Além disso, o professor pode preparar algumas tabelas de referência, facilmente encontradas na internet, que inclusive trazem algumas distinções, como, por exemplo, em relação a gênero ou à raça. Há também estudos que indicam a diminuição da altura em 1 cm a cada 10 anos a partir dos 30 anos, supostamente ocasionados pela postura danificada ao longo dos anos.

Depois de marcados os pontos de referência, como o estudo é sobre um fenômeno contínuo, os alunos precisarão encontrar uma **curva adequada** para unir esses pontos. Em algumas idades há um crescimento mais intenso; em outras, mais lento; em outras, nem há crescimento. É desafiador pensar sobre a curva que deve ligar esses pontos, até mesmo porque serão construídas somente aproximações. Porém, isso fornece um contexto bastante favorável para a discussão de tipo de curvas que são estudadas na primeira série do Ensino Médio.

Como detalhado, o cenário de investigação para a construção desse gráfico é bastante rico. Construir e detalhar esses seis parâmetros propiciou uma formação especializada para o professor, a fim de que ele proponha possíveis intervenções ou questionamentos para o aluno ou o grupo avançarem, ou ainda, problematizarem as suas escolhas. Quando

construímos esses parâmetros, buscávamos uma melhor formação para dialogar com os alunos durante a tarefa, já que se trata de uma tarefa aberta, e boas intervenções poderiam ajudá-los a avançar nos trabalhos.

Analisando dois gráficos produzidos por alunos

Durante a análise feita na última fase do ciclo, outras questões se apresentaram: Qual é o conceito matemático que parece estar sendo expressado na produção do aluno? (Podemos pensar nos seis parâmetros previamente estruturados). O que acham que o aluno quis expressar na sua produção? Qual é a dificuldade observada? Que novas ideias sobre o conceito matemático descobrem através da reflexão? Que conexões entre noções matemáticas conseguem fazer?

Para esse processo de análise da produção de alunos, que ocorre a posteriori, não é possível retomar as intervenções e os questionamentos com os alunos. Por outro lado, essa visita detalhada à produção dos alunos contribui para que, em outras experiências, o professor esteja melhor preparado para ações efetivas no encaminhamento desse processo. Como professores, somos formados para compreender os processos de ensino e aprendizagem e para melhorar a comunicação com nosso aluno. Esse processo é de uma formação contínua, já que, como professores, também estamos sempre aprendendo. Com isso, vamos polindo as lentes com que vemos a prática de sala de aula e algumas atividades específicas, a fim de melhorar esse processo.

Escolhi para esta análise dois gráficos construídos durante a Parte 1 da tarefa pelos alunos Juliana e Antônio[38] na aula que observei da Prof.ª Salgado. Também usei o questionário respondido por Antônio durante a Parte 2 da tarefa, o qual apresenta sua leitura e interpretação do gráfico produzido por Juliana. Vou seguir a ordem dos seis parâmetros definidos na sessão anterior, porém, sem delimitá-los um a um, já que há intersecção entre eles e, muitas vezes, um complementa o outro para a interpretação.

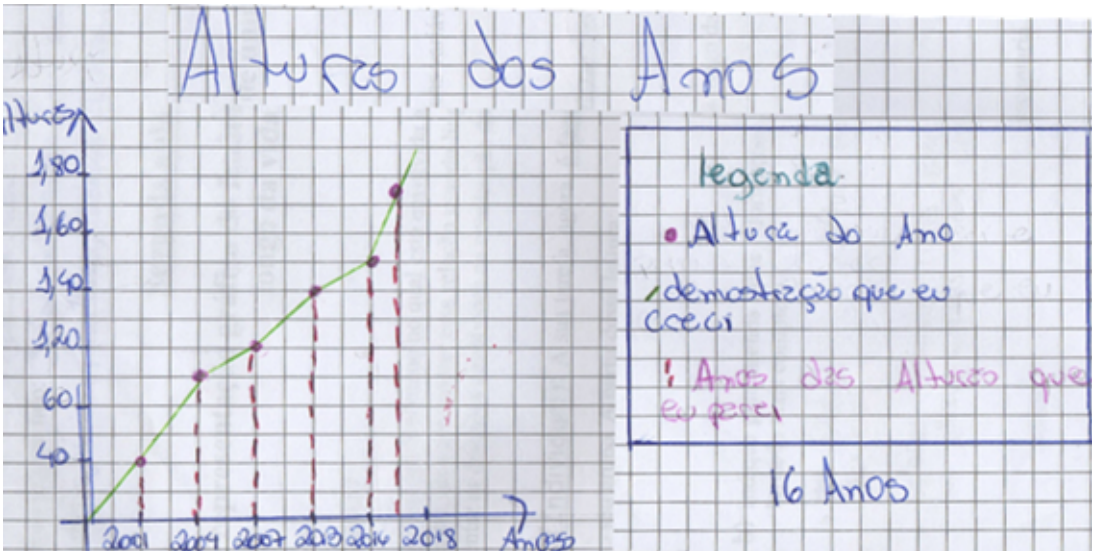
Nesta análise, outras questões emergiram e poderiam ter sido feitas para os alunos, a fim de problematizar sua intenção com o efetivo registro. Optei por deixá-las registradas nas discussões, pois são aprendizagens profissionais valiosas, que contribuem com outras experiências que estão por vir. Essas possíveis intervenções nos formam como professores numa perspectiva mais investigativa, não de dar respostas prontas, mas de devolver aos alunos boas questões, que os provoquem à reflexão, de maneira bastante personalizada, a partir do que emergiu de sua produção, e desenvolvam o conteúdo matemático necessário para essas problematizações.

O ano tem altura?

O primeiro gráfico analisado (Figura 1), da aluna Juliana, traz alguns elementos que não havíamos previsto em nosso planejamento, como, por exemplo, título e legenda.

[38] Nomes fictícios.

Figura 1 – Gráfico produzido por Juliana

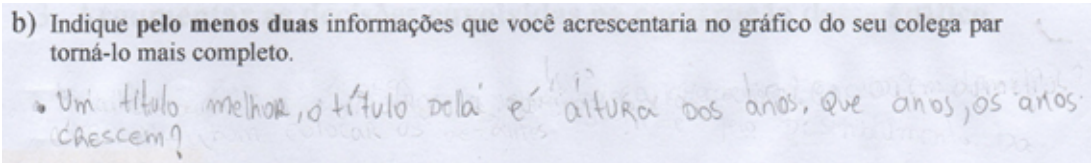


Fonte: Material produzido durante a aula.

Percebemos que os alunos trazem, para o desenvolvimento da tarefa, conhecimentos e experiências anteriores, principalmente aqueles construídos nas práticas escolares. Atribuímos a isso o uso de gráfico no Ensino Fundamental, bastante comum em aulas de Geografia, por exemplo, em que os gráficos acompanham título e legenda.

O título "Altura dos Anos" nos chamou muito a atenção. Observando, no Quadro 3, a produção do colega Antônio, que leu o trabalho de Juliana, percebemos que ele também estranhou o título escolhido.

Quadro 3 – Resposta de Antônio para a leitura do gráfico de Juliana



b) Indique **pelo menos duas** informações que você acrescentaria no gráfico do seu colega par torná-lo mais completo.

• Um título melhor, o título dela é altura dos anos, que anos, os anos crescem?

Fonte: Material produzido durante a aula.

Antônio questiona: "Que anos, os anos crescem?". Como professores, conseguimos compreender a intenção de Juliana de sinalizar "a minha altura ao longo dos anos", porém, pelas palavras registradas, essa não foi a informação contemplada. Por outro lado, ela fez uma escolha bastante coerente para representar o fenômeno pedido. O gráfico de linha era apropriado para tal representação.

Juliana escolheu a variável ano para representar no eixo das abscissas. O sEM não previu, em nenhum momento do seu planejamento, essa possibilidade de escolha de variável, esperávamos a variável idade. Porém, no eixo das ordenadas, Juliana representou a altura, como era esperado pelo sEM.

Como observado por Leticia, em uma reunião do GdS, essa escolha de Juliana de representar a variável "ano" no eixo das abscissas contribui para que a informação sobre a

sua idade se perca:

> *É que, como ela escolheu outra variável, tem informação que ela perde aqui. É uma coisa que a gente não tinha pensado. Ela escolheu a variável ano. Então, ela perde a informação de que, cada ano ela perde a idade dela. Então ela tem que explicar/expressar essa informação de algum jeito. Como que ela faz? Ela coloca aqui [aponta a legenda]. (VÍDEO, 05/06/2018)*

Por esse motivo, a aluna precisa buscar outras alternativas de comunicação para expressar a informação desejada. Opta, então, por construir uma legenda.

A legenda traz quatro informações: bolinha vermelha, que representa a "altura dos anos"; linha verde, que indica a "demonstração que eu cresci"; tracejado vertical vermelho, destacando os "anos das alturas que eu parei"; e, ao final, escreve "16 anos". Compreendendo essas informações associadas ao contexto de aplicação, podemos interpretar as informações da legenda, com o que imaginamos que Juliana quis representar, na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados da legenda com interpretação da autora

	Como Juliana escreveu	**Como nós interpretamos**
	Altura dos anos	Altura de Juliana no ano determinado. Mas não fica claro em que momento desse ano. Entendemos que poderia haver datas especiais, como o início ou fim do ano, ou então, o aniversário de Juliana, já que a altura não é sempre a mesma ao longo do ano.
	Demonstração que eu cresci	De um ano para outro, Juliana cresce. E esse crescimento é contínuo ao longo do tempo. Desta forma, era preciso ter um conjunto de pontos que indicasse esse crescimento. Nesse registro, a aluna evidencia que se preocupou com essa informação, pois une dois pontos de referência que ela destacou. Também detalha que houve crescimento, pois tem uma reta com inclinação para a direita.
	Anos das alturas que eu parei	Juliana se remete à ideia de par ordenado na matemática e sente necessidade de explicitar na curva o ano e a altura que representou.
	16 Anos	A idade que Juliana apresenta no momento que fez o gráfico.

Fonte: Autoria própria.

Juliana escolheu seis pontos de referência, destacados pelos anos de 2001, 2004, 2007, 2013, 2016 e 2017. Porém, não registra o número 2017 no gráfico e opta por registrar 2018, ano que não tem nenhuma bolinha vermelha que o represente. O primeiro ano que aparece como registro no eixo das abscissas do gráfico é 2001. Como Juliana diz ter 16 anos na data da construção do gráfico – 2018 –, e a diferença entre 2018 e 2001 são 17 anos, interpreta-se que Juliana nasceu em 2001 e ainda não completou aniversário no ano de 2018. Por isso, a representação da curva tem uma marcação bem definida em 2017, mas não chega até o ano de 2018. Isso não significa que a curva termine quando a vida termina, mas que o aluno não projetou possibilidades para a continuidade do fenômeno observado para os próximos anos. A maioria dos alunos não fez a reflexão sobre o futuro.

Há uma curva verde representada à esquerda de 2001, que liga até a origem do gráfico (que não está referenciada, mas parece ser [0,0]), do que se subtende que o aluno teve uma variação de 40 (sem especificar a unidade) até o momento em que nasceu, em 2001. Seria o período de gestação? Como professores, não conseguimos fazer essa afirmação.

Também levantamos a hipótese de que seja por uma prática comum de observar o gráfico iniciando em (0,0). Uma boa pergunta para essa ocasião seria: "Quando começou a vida, segundo o seu gráfico?".

No quesito "escala", Juliana escolhe marcar de 2 em 2 quadradinhos no eixo das ordenadas. Usa as referências 40, 60, 1.20, 1.40, 1.60 e 1.80. Como não coloca unidade de medida, compreendemos que Juliana se refere a 40 e 60 centímetros e às outras medidas, em metros. Os intervalos entre as medidas variam de 40, 20 ou 60 cm. Compreendemos que há indícios de que ela se preocupou com a escala registrada, mas ignorou os valores 80 cm e 1 m, e não foi fiel à escala para toda a construção do gráfico. Possivelmente, para não se prolongar muito no gráfico. Também seguiu a questão social de medir as crianças em centímetros até chegar em 1 metro e depois contemplar as medidas em metros. Já no eixo x, há uma tentativa de construir uma escala de 3 em 3 anos (2001, 2004 e 2007; e, depois, 2013 e 2016), porém, não mantém esse padrão de 2007 a 2013, pois não registrou o ano de 2010.

Juliana poderia ter optado por pular 4 quadradinhos, ao invés de 2, entre esses valores, para garantir a escala. Mantendo a escala, depois de 2016, o próximo registro seria de 2019. Porém, o aluno quer que apareça 2018, e percebemos, durante a atividade, que eles têm dificuldade de entender que, mesmo sem escrever o 2018, ele está ali, entre 2016 e 2019. Por outro lado, Juliana usa a referência de 2017, mesmo sem sinalizá-la.

Há um misto de escolhas para o registro, o que traz um cenário bastante interessante para o professor problematizar durante a aula, no momento de socialização, caso não seja possível fazer intervenções ao aluno no momento da elaboração desse gráfico:

(1) Qual altura você tinha com 5 anos? Nesse caso, poderia até ser dada uma tabela para o aluno preencher a partir do gráfico. Poderíamos discutir sobre as tabelas serem apropriadas para dados quantitativos, priorizando valores precisos, enquanto a linguagem gráfica traz uma abordagem mais qualitativa, que indique com maior agilidade o comportamento daquele fenômeno, sem muita necessidade de precisão de valores.

(2) Ou ainda, qual a sua idade quando você tinha 1,40m? Essa pergunta parece muito parecida com a (1), porém, o gráfico aqui utilizado não usa a variável idade e sim, ano. Isso exige que o aluno reordene as informações, faça um cálculo de subtração e encontre a resposta. Nesse processo, temos expectativa de que o aluno se dê conta das limitações da escolha de anos, ao invés de idade, para o eixo x.

(3) Em que período da sua vida você mais cresceu? Observe que esta questão problematiza a escala adotada por Juliana, pois, como ela não foi feita com divisões iguais, ela não pode se basear exclusivamente no desenho, observando a inclinação da reta.

Assim sendo, entendemos que os seis parâmetros utilizados tiveram como ponto de partida o ano do nascimento de Juliana (2001) e o ano que foi completado antes da execução da tarefa (2017). As outras escolhas que entremearam esses valores parecem ter sido adotadas mais em relação a uma escala de três em três anos do que para contemplar as diferentes fases da vida do ser humano.

Em relação ao tipo de curva, Juliana escolhe segmentos de reta para ligar os pontos de referência. Pelo registro na legenda, a aluna demonstra compreender que esse fenômeno

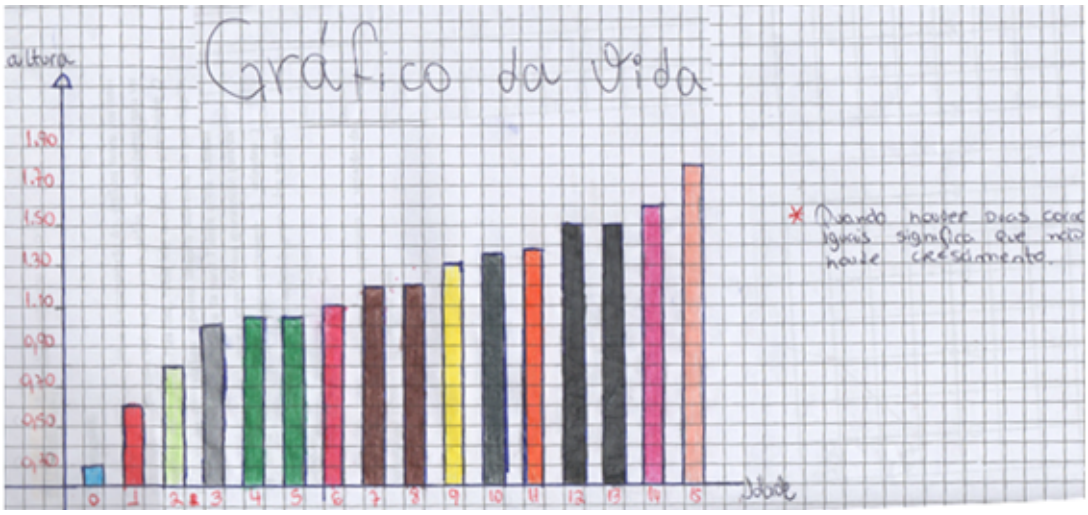
é contínuo e que a altura aumenta continuamente, até chegar ao valor referência do outro ano. Por outro lado, a escolha do segmento de reta nos leva a entender que é o tipo de curva mais usado ou até o mais trivial, e não que tenha sido escolhido para uma problematização do tipo de crescimento que ocorreu.

Para esse caso específico, outras questões poderiam ser colocadas: Existe um limite para a altura? Você vai crescer sempre? Quais as unidades de medidas das grandezas exploradas nos eixos? Cada uma dessas questões conversa com a leitura feita pelo professor e indica possíveis pontos para o aluno explorar e avançar na linguagem gráfica produzida.

As cores das colunas carregam sentido?

O segundo gráfico escolhido para análise está representado na figura 2 e é bem diferente do primeiro.

Figura 2 – Gráfico produzido por Antônio



Fonte: Material produzido durante a aula.

Apesar de bem feito e colorido, Antônio escolheu representar um gráfico de colunas, o que não condiz com o fenômeno estudado, por se tratar de dados contínuos. Por exemplo, com a idade 0, o aluno tem 0,30 e com a idade 1, 0,60. Como acontece esse salto? Da forma como o gráfico foi representado, compreendemos que a altura salta de um ano para outro abruptamente, sem caracterizar um processo contínuo de crescimento.

Também sentimos falta das unidades de medida das grandezas escolhidas. A nossa experiência docente nos auxilia a compreender que Antônio mediu a idade em anos e a altura em metros, mesmo sem ter esse registro. Por outro lado, é uma informação fundamental, e o aluno precisa ser alertado dessa importância.

O aluno entendeu que o início da vida é quando nasce, em 0 anos, e que deveria contemplar o final de seu gráfico com a sua idade atual. Com isso, não faz nenhuma projeção de sua altura para os próximos anos. Ele usa o eixo das abscissas com a exploração da idade,

e o eixo das ordenadas para representar as alturas, escolhas esperadas pelo sEM em seu planejamento.

A escala do eixo x está de 1 em 1 ano. Como o aluno se limitou a sua idade, 15 anos, o gráfico não ficou extremamente grande, mas com um tamanho adequado para o espaço físico no qual ele foi construído. Já no eixo y, Antônio representa 0,2 m a cada dois quadradinhos da folha quadriculada, com exceção do primeiro, que ficou com um quadradinho de distância da origem dos eixos e representa uma quantidade maior, 0,3 m, comprometendo a escala escolhida.

Para cada uma das 15 colunas representadas, Antônio estipulou um ponto de referência. Uma problematização possível para o aluno, nesse sentido, seria questioná-lo sobre a forma como acessou esses dados. Para isso, caberia a seguinte pergunta: "Você foi um bebê prematuro?". Muito provavelmente, essa pergunta o levará a refletir sobre o seu registro e, até mesmo, a devolver a pergunta para o professor: "Por que você pensa isso?". O professor, então, justificaria que um bebê que nasce com 0,30 m é um bebê pequeno, já que a média de altura dos bebês da nossa região é de 0,50 m. Essa problematização pode situar o aluno em relação à maneira como ele conseguiu os dados para colocar no gráfico: (1) foi fiel aos acontecimentos?; (2) fez uma pesquisa confiável desses dados (supondo que ele fosse ignorante quanto ao assunto)?; ou, ainda, (3) usou números estimados, sem preocupação de retratar, de fato, o fenômeno ocorrido? A prática de registro e pesquisa é fundamental para a atual geração, que possui muitas informações acessíveis, e precisa saber onde e como encontrá-las, além de analisá-las à luz de várias variáveis. Pelos dados, Antônio é considerado alto, já que tem 1,80m com 15 anos.

Antônio também colocou título, usou uma legenda e coloriu seu gráfico. Seu título também pode ser questionado pelo professor, pois o que significa a vida para esse aluno, já que, para representar a altura, usa o título "O Gráfico da Vida"? Diferentemente de Juliana, a legenda produzida por Antônio – "Quando houver suas cores iguais significa que não houve crescimento" – é desnecessária, pois traz informações que podem ser acessadas no gráfico sem necessidade dela. O tamanho das colunas é suficiente para comunicar essa informação, sem necessidade do uso de cores.

Esses dois gráficos são amostras do quanto esse trabalho de análise da produção dos alunos é complexo e traz compreensões que melhoram a comunicação e o processo de ensinar e aprender de sala de aula. Detalharei essas contribuições na próxima seção, momento de conclusão desta narrativa.

As aprendizagens docentes emergentes do processo de interpretação do trabalho dos alunos

Nesta narrativa é possível identificar uma série de interpretações que fiz a partir do registro escrito produzido pelos alunos e do resgate das memórias daquilo que experienciei, com os demais participantes do sEM, nas fases de Problematização e Planejamento e Implementação e Observação.

Enquanto observadora, fiquei muito incomodada com a postura de muitos alunos

que, ao ler e interpretar o gráfico de um colega, na parte 2 da tarefa, procuravam a cor e a legenda. Da maneira como tínhamos planejado, eu entendia que essas informações eram desnecessárias, pelo tipo de gráfico construído. Por exemplo: se os alunos estivessem estudando um fenômeno que fosse representado por um gráfico de setores, tanto a cor de cada setor quanto a legenda seriam fundamentais para a compreensão da informação. Mas, para o estudo da altura de um indivíduo, eu me perguntava: "Para que eles queriam isso? O que a cor e a legenda iriam mudar no gráfico?". Eu percebi que, enquanto os alunos se preocupavam com esses elementos, eles desprezavam o que realmente estava registrado no gráfico do colega e respondiam de forma bastante superficial à pergunta da parte 2 da tarefa, sem dizer muita coisa. Por outro lado, depois da análise, entendo que Juliana precisou fazer uso da legenda, já que, com sua escolha de ano para a grandeza representada no eixo x, foi perdida a informação da idade.

A Prof.ª Salgado buscou compreender o que levou seus alunos a terem essa ação e encontrou resposta, associando a prática escolar vivida por eles anteriormente, na disciplina de Geografia nas séries finais Ensino Fundamental, momento em que eles usavam gráficos, com muitas cores e legendas. Ainda, buscando compreender o que Antônio havia produzido, a Prof.ª Salgado complementa que o aluno colocou a legenda com a intenção de se lembrar do raciocínio usado no momento em que essa tarefa fosse retomada.

Apesar de os dois gráficos indicarem o empenho e o comprometimento de Juliana e Antônio com a tarefa, eles apontam para a necessidade de correção do professor. Esse apontamento é determinante para que os alunos aprendam essa linguagem gráfica corretamente, o que é fundamental para completar o processo de aprendizagem. Porém, cada aluno produziu um gráfico, e todos esses gráficos são diferentes e únicos. É difícil ajustar esse trabalho docente de correção individual com o período normal de duração da aula.

Além disso, essa tarefa foi planejada para iniciar as discussões sobre funções e, sendo assim, espera que o professor, sempre que possível, vincule outros momentos de aula com essa tarefa, potencializando o desenvolvimento da atividade.

Ela também estuda questões de conhecimento da vida humana, explora os referenciais de seu crescimento, aproxima a matemática da escola à vida real de forma crítica e desenvolve nos alunos habilidades de argumentação, pesquisa e escrita. Quando somos pais, esse conhecimento nos ajuda a compreender as diferentes fases e a expectativa de altura que nossos filhos irão alcançar, seja em uma média da população, seja do conhecimento da altura dos membros da família.

Essa narrativa mostra que o sEM avançou na busca de caminhos alternativos para produzir uma matemática com sentido e significado para os alunos, que não se distancia do currículo, mas também se aproxima bastante do estudo de assuntos e análises que perpassam a vida do ser humano.

Em sala de aula somos levadas por uma onda avassaladora de interações – professor-aluno, aluno-aluno, aluno-tarefa, professor-tarefa, professor-observador, observador-observador. Perdemo-nos diante da complexidade, em que tudo parece importante e é, mas não temos tempo nem força para olhar para tudo. Passada a aula, numa fase de análise

posterior, é necessário ter foco, estabelecer recortes e preservar a qualidade de tudo o que estamos fazendo.

Dessa forma, esta análise evidencia a riqueza de todo o processo em que professores e alunos, interagindo com a tarefa, ampliam as interpretações para o registro produzido e confrontam a linguagem com a intenção escolhida para representação. O professor compreende com maior profundidade a produção de seu aluno e se forma para ser mais do que um avaliador de respostas certas ou erradas. Torna-se um profissional que analisa o discurso e faz intervenções eficientes para ajudar o aluno no processo de aprender matemática.

Referência

ABREU, A. S. *O design da escrita:* redigindo com criatividade e beleza, inclusive ficção. Cotia, SP: Ateliê Editorial, 2008.

APÊNDICE 2

Apresentação

Esta tarefa foi planejada no Segundo Ciclo do Lesson Study e teve como tema a representação gráfica de funções. Foi elaborada para alunos da 1.ª série do Ensino Médio. Teve como objetivos:

- Compreender um fenômeno no qual está envolvida a relação entre duas variáveis.
- Representar, ler e interpretar essa relação, usando linguagem gráfica.
- Argumentar sobre as decisões envolvidas na construção desse gráfico.

A tarefa foi dividida em três momentos; os dois primeiros requeriam o trabalho individual e o terceiro, o trabalho coletivo.

Enunciado da tarefa

Momento 1: Trabalhando individualmente, construa um gráfico que represente a variação da sua altura ao longo da vida.

Momento 2: A sua tarefa, agora, é fazer a leitura e a interpretação do gráfico de um colega do seu grupo. A partir dessa leitura:

a. Conte em um parágrafo como foi variando a altura do seu colega ao longo da vida.

b. Indique pelo menos duas informações que você acrescentaria no gráfico do seu colega para torná-lo mais completo.

Momento 3: (Trabalhando em grupo) Construir um gráfico que represente a variação da altura do personagem escolhido ao longo da vida. Escolha uma das personagens a seguir:

Joaquim: 80 anos – 1,71 m

Francisco: 5 meses – 61 cm

Joana: 70 anos – 1,56 m

Elisangela: 5 anos – 1,47 cm

Helena: 39 anos – 1,81 m

Roberto: 45 anos – 1,84 m

Emerson: 8 meses – 69 cm

Bernardo: 2 anos – 87 cm

Orientações para o professor

A tarefa foi desenvolvida em grupos de até quatro alunos. Para implementação, cada grupo recebeu cópias do enunciado, uma régua e canetas hidrocor. Na mesa do professor estavam disponíveis uma trena, folhas sulfite, folhas quadriculadas de 1cm, folhas quadriculadas de 0.5cm. Ficou a critério de cada aluno a escolha do tipo de papel que iria utilizar para a construção do gráfico.

PARTE III

Educação Financeira

O QUE EU POSSO APRENDER AO OUVIR UMA REUNIÃO?: DIÁLOGOS ASSÍNCRONOS SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL E EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Cláudia Rodrigues de Andrade

Entre os anos de 2000 e 2003 cursei minha graduação – Licenciatura em Matemática – na Unicamp. Neste período, tive a oportunidade de fazer algumas disciplinas com a Prof.ª Dr.ª Dione Lucchesi de Carvalho, docente da Faculdade de Educação na época, que se tornou minha referência nas reflexões sobre Educação Matemática, assim como trouxe ao meu conhecimento a existência do Grupo de Sábado – GdS. Fundado em 1999, o grupo é uma comunidade de aprendizagem docente que congrega professores de escolas públicas e privadas, estudantes dos cursos de Licenciatura em Pedagogia e Matemática, pesquisadores e formadores de professores interessados em investigar colaborativamente o ensino e a aprendizagem da matemática.

Atuo na rede estadual de ensino de São Paulo como professora de matemática desde 2004. Deste então, tenho participado apenas de formações promovidas pela Secretaria Estadual de Educação – SP. Dentre elas, a mais relevante foi o curso RedeFor – curso de especialização para professores de matemática –, o qual não teve como foco a Educação Matemática e, sim, o desenvolvimento do conhecimento sobre a matemática pura do professor que ensina matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Foi no segundo semestre de 2017 que, movida por uma percepção íntima de que precisava ampliar a minha formação docente e também por reflexões sobre o que disse Paulo Freire (1996, p. 53), "consciente do inacabamento, sei que posso ir mais além", entendi que participar do GdS seria uma oportunidade de desenvolver a minha prática docente e, com isso, aperfeiçoar o meu trabalho em sala de aula. Assim, motivada pela memória de minha graduação, entrei em contato com o Prof. Dr. Dario Fiorentini, coordenador do GdS, perguntando se o grupo ainda existia e se eu poderia fazer parte dele. Para minha alegria, ele me respondeu e me convidou a participar desse grupo.

Quando cheguei ao GdS, estava em andamento um projeto financiado pela *Fapesp Ensino Público*, intitulado "*Lesson Study*: Conhecimento e desenvolvimento profissional do professor que estuda matemática". Em minha primeira reunião no grupo fui apresentada ao modelo de divisão em subgrupos: Ensino Fundamental – Anos Iniciais; Ensino Fundamental – Anos Finais; e Ensino Médio. Escolhi vincular-me ao subgrupo do Ensino Médio (sEM), por estar atuando exclusivamente neste nível de ensino desde 2011. Conversando com os participantes deste subgrupo, soube que suas atividades se estendiam para reuniões online

e discussões por grupos de WhatsApp[39]. As atividades do grupo, naquele momento já sendo vivenciadas, encaminhavam-se para assumir a divisão em três grandes fases para o desenvolvimento de cada ciclo do Lesson Study Híbrido (*LSH*), com previsão de quatro ciclos, contemplando, em cada um deles, três grandes fases: (1) *Problematização e Planejamento*; (2) *Implementação e Observação*; e, por último, (3) *Reflexão e Sistematização*. A partir desse momento, tenho tido a oportunidade de conhecer o *LSH* e vivenciar como cada uma de suas fases acontece.

O terceiro ciclo do *LSH* desenvolveu-se no segundo semestre de 2018, e meu objetivo nesta narrativa é falar sobre o início das atividades realizadas em sua primeira fase, Problematização e Planejamento, destacando as aprendizagens docentes envolvidas no processo de escolha do tema para a tarefa do terceiro ciclo do projeto. Para construir esta narrativa, escolhi diálogos ocorridos entre as participantes do sEM em reunião online, ocorrida em 10/08/2018. A análise de tais diálogos me possibilitou um momento de formação, uma vez que através deles pude realizar muitas reflexões associadas à minha prática em sala de aula.

Destaco que, como membro do sEM, não participava das reuniões online por incompatibilidade de horários, mas tinha livre acesso aos áudios e às atividades do grupo. Dessa maneira, pude me manter atualizada sobre os acontecimentos, contribuir, dentro de minhas possibilidades, com as atividades desenvolvidas e, principalmente, ampliar o meu processo de formação docente através de todas reflexões que pude realizar durante o desenvolvimento do ciclo.

Esta narrativa será dividida da seguinte maneira: apresentação de uma tarefa inicial – composta de duas reflexões – proposta pela coordenadora do subgrupo; reflexões que aconteceram durante a resposta da primeira pergunta; reflexões ocorridas durante a resposta da segunda pergunta; e considerações finais.

Uma tarefa para orientar a escolha

A primeira reunião online do sEM sobre o terceiro ciclo, em 10/08/2018, teve como objetivos: definir um tema para elaboração da tarefa exploratório-investigativa e a questão orientadora para o ciclo de *LSH* que estávamos iniciando. Para tanto, uma semana antes, Leticia, a coordenadora do subgrupo, havia encaminhado para todos os membros uma tarefa que deveria ser respondida antes do início da reunião, com o objetivo de que essas respostas pudessem nortear as discussões e ajudar nas decisões que o subgrupo precisaria tomar. A tarefa consistia em duas perguntas, as quais apresento aqui:

[39] https://www.whatsapp.com/

Quadro 01 – Tarefa elaborada pela Leticia – Coordenadora do sEM

Tarefa para realizar antes da reunião do dia 10 de agosto

Para preparar nossa reunião da próxima sexta-feira (10/8), proponho que realizem uma:

a) Reflexão sobre a temática matemática, ao redor da qual organizaremos o *LS:*

i) Pensem no tópico matemático que estarão desenvolvendo em finais de setembro deste ano (por exemplo, logaritmos, função exponencial, trigonometria, etc.).

ii) Uma vez definido o tópico, procurem na proposta curricular a qual unidade didática corresponde tal tópico. Registrem, por escrito, quais são os subtópicos a ser desenvolvidos nessa unidade. Por exemplo, se a unidade se chama "Função exponencial", os subtópicos podem ser: definição de função exponencial, representação gráfica e algébrica, parâmetros, aplicações, etc. Caso existir, registrem por escrito as orientações dadas pelos materiais curriculares sobre esse tópico (se existem sugestões sobre o tipo de atividades a ser desenvolvidas, os recursos utilizados, etc.)

iii) Pensando que a tarefa será implementada em finais de setembro, em que ponto da unidade didática poderiam estar? Continuando com o exemplo da unidade sobre função exponencial, poderiam estar no começo – o que envolveria desenvolver uma tarefa para introduzir a função - ou no final, o que poderia significar elaborar uma tarefa de aplicação.

iv) Por favor, registrem suas respostas a essas perguntas POR ESCRITO (pode ser depois de cada pergunta neste documento)

b) Reflexão sobre a pergunta que orientará nosso *LS*:

Até agora, o desenvolvimento de tarefas exploratório-investigativas tem sido uma marca dos ciclos de *LS* desenvolvidos pelo subgrupo do EM. De um modo geral, tarefas deste tipo seguem as seguintes etapas:

i) Apresentação da tarefa aos alunos

ii) Trabalho individual/grupal para resolver o problema

iii) Trabalho grupal para sistematizar a produção do grupo (elaboração de cartazes)

iv) Apresentação do trabalho dos grupos à turma toda

v) Sistematização final a cargo do professor

Já sabemos que implementar todas essas etapas envolve várias aulas, e não só um encontro.

Diversos pesquisadores (entre eles, João Pedro da Ponte e Hélia Oliveira) têm apontado que a implementação de tarefas exploratório-investigativas em sala de aula coloca numerosos desafios para o professor. Tenho certeza de que a implementação das duas tarefas elaboradas nos ciclos anteriores colocou numerosos desafios, questionamentos, inquietudes e perguntas para vocês como professoras. Por exemplo, Thaís tem mencionado que, para ela, saber quando intervir e como intervir no trabalho dos alunos, quando estes tentam resolver uma tarefa exploratório-investigativa, é um questionamento e um desafio importante.

Na mesma direção, os artigos lidos sobre *LS* ressaltam que todo ciclo começa por uma PERGUNTA/INQUIETAÇÃO que emerge da própria prática dos professores.

Nesse contexto, vou pedir para vocês escreverem DUAS (ou mais) perguntas que emergem da sua prática, ao implementar tarefas exploratório-investigativas que gostariam de abordar neste ciclo de *LS*.

Fonte: E-mail da Leticia direcionado aos membros do sEM.

Observando o conteúdo das reflexões propostas, é possível verificar que houve uma preocupação em evidenciar que nos ciclos anteriores o sEM elaborou tarefas exploratório-investigativas, e que elas, para que aconteçam, precisam conter algumas etapas as quais foram descritas no item b). Essas etapas detalham que, assim como experimentado pelos sEM nos ciclos anteriores, o trabalho com tarefas exploratório-investigativas é complexo e demanda um processo bem planejado em seu percurso. Em cada uma dessas etapas, há uma coleção grande de dados coletados que serão analisados e sistematizados na terceira fase do ciclo de *LSH*, de Reflexão e Sistematização. Dessa forma, esse convite da coordenadora do sEM visava que refletíssemos sobre esse processo e definíssemos um foco de análise a priori, para que esse foco orientasse o trabalho durante o terceiro ciclo. É importante também destacar as características que diferenciam uma aula convencional de uma que seja

exploratório-investigativa. Assim:

> As aulas exploratório-investigativas são aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não-diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. Essas aulas servem, geralmente, para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático. (FIORENTINI, 2006, p.29)

Levando em consideração que as aulas exploratório-investigativas, dentre as características apresentadas, também são um meio de atribuir significado aos conteúdos matemáticos e que as professoras já vivenciaram dois ciclos de *LSH* e trazem as suas aprendizagens sobre elas para o processo de elaboração do terceiro ciclo, justifica-se a profundidade das reflexões que aconteceram na reunião e que serão apresentadas a seguir, respeitando a ordem em que foram solicitadas na tarefa pela Leticia.

Refletindo sobre o tema

A primeira reflexão solicitada pela coordenadora do sEM foi em relação à temática que os professores desenvolveriam no período de implementação da tarefa em sala de aula. De forma detalhada, ela propõe que os professores registrem também, por escrito, os subtópicos de cada conteúdo e o provável estágio de desenvolvimento da temática em que os professores planejavam estar no final de setembro daquele ano.

Analisando esta solicitação, pude entender que ela tinha por intenção conhecer qual tema matemático poderia ser escolhido para a elaboração da tarefa. O objetivo desta reflexão era conseguir um ponto em comum do currículo para, a partir dele, pensar que tipos de situações poderiam ser exploradas em uma atividade exploratório-investigava. Destaco aqui que, apesar de todos os participantes do sEM estarem convidados a realizar as reflexões propostas na tarefa encaminhada pela Leticia, as três professoras responsáveis pela implementação da atividade (Juliet, Salgado e Thaís) estariam mais diretamente envolvidas no processo de decisão sobre o tema a ser escolhido, pois precisavam estar à vontade e seguras em relação às escolhas que seriam feitas.

Sendo assim, logo no começo da reunião o tema Função Exponencial parecia ser o mais adequado para o momento, considerando o currículo oficial adotado pelas instituições em que as professoras lecionavam. Como a implementação era prevista para final de setembro, as professoras poderiam estar com pequenas diferenças quanto aos itens já abordados desse conteúdo em suas respectivas salas de aula. Assim, optaram por pensar em uma tarefa que mostrasse uma aplicação do assunto, e não a sua introdução. Escolhido o tema, o grupo encaminhou uma conversa bastante reflexiva sobre as características dessa função e as situações problema que poderiam ser escolhidas para elaborar a tarefa.

Vários dos materiais usados por nós, professores do Ensino Médio, definem a função exponencial como sendo do tipo $f(x) = a^x$, com $f: R \rightarrow R_+^*$, com $a>0$ e $a\neq1$. A primeira reflexão, iniciada pela Thaís, foi sobre os pares ordenados, (*x*,*y*), que são habitualmente usados quando se quer mostrar a representação gráfica desta função. Tais pontos são

calculados, atribuindo-se para x apenas números inteiros. A preocupação da Thaís em seus argumentos era saber se os alunos imaginam que esses valores de x poderiam ser quaisquer números pertencentes ao conjunto dos números reais, considerando a própria definição da função exponencial. A exposição da Thaís foi a seguinte:

> *O que acontece entre um ponto de referência e outro ponto de referência? [refere-se aos pares ordenados] Tem números que contemplam isso aí? [...] Se ele [o aluno] precisar calcular o* 2^{π} *, por exemplo, é um número que ele só consegue ter uma dimensão do que é, uma compreensão matemática, se ele estiver permeado por essa função. (ÁUDIO, 10/08/2018)*

Essa argumentação me fez refletir e tentar imaginar o que se passa pela mente do meu aluno quando ele calcula os valores da variável dependente, y, tendo como valores da variável independente, *x*, apenas aqueles considerados "fáceis"; e depois liga esses pares, formando a chamada "curva exponencial". Será que os meus alunos entendem que os valores de x poderiam ser qualquer número real? O que eu, professora de matemática, posso começar a fazer para sair desta "zona de conforto" e mostrar para o meu aluno qual é o significado de definir uma função que tenha como domínio o conjunto dos números reais?

Ao ouvir a fala da Thaís, a Salgado lembrou-se de uma situação problema relacionada ao conteúdo de função exponencial, que consta no *Caderno do Aluno*, volume 2, 1.ª série do Ensino Médio[40], onde há uma pergunta que tem a intenção de fazer o aluno refletir sobre qual valor terá a potência, se o expoente não for um número inteiro. Seu enunciado é o seguinte:

Quadro 02 – Situação Problema que envolve Função Exponencial

Leitura e análise de Texto

Suponhamos que no país X a produção de determinado alimento foi igual a uma tonelada no final do ano de 2000. Em virtude dos incentivos econômicos, essa produção passou a triplicar anualmente a partir daquele momento.

Uma tabela com as quantidades produzidas ao final de cada ano é apresentada a seguir.

Ano	Produção P (em toneladas)	Potência correspondente
2000	1	3^0
2001	3	3^1
2002	9	3^2
2003	27	3^3
2004	81	3^4
2005	243	3^5
2006	729	3^6
2007	2187	3^7
2008	6561	3^8
2009	19683	3^9
...	...	...
2015	14348907	3^{15}
$2000 + n$		3^n

[40] Material que era distribuído, até o ano de 2018, pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo nas versões para o aluno e para o professor.

A regularidade da multiplicação pelo fator 3, a cada ano, conduz naturalmente à representação da produção correspondente, de modo simplificado, por meio de uma potência de 3. Observe que, a cada aumento em uma unidade no ano, a produção em toneladas é multiplicada por 3. Ao acompanhar a tabela, conclui-se que n anos após o ano 2000, o valor da produção P será 3^n.

Tomando a situação descrita pela tabela apresentada na seção Leitura e análise de texto, como você representaria a produção **P** do país **X** meio ano após o início da produção? E quatro anos e três meses após o início do processo?

Fonte: Caderno do Aluno – SEE-SP. 1.ª série – EM (2014. v. 2, p. 5).

Percebemos que o exemplo de situação problema lembrado pela Salgado conseguiu trazer uma forma de contemplar a preocupação que a Thaís apresentou em sua argumentação sobre os expoentes não inteiros. Porém, essa mesma situação problema abriu um outro ponto de reflexão para os participantes da reunião e para mim: a função exponencial crescente tem como característica o crescimento muito acelerado; para vários fenômenos habitualmente usados para mostrar a sua aplicação, observamos que, com poucos valores atribuídos à variável independente, x, os valores obtidos para a variável dependente, y, podem crescer muito, a ponto de tornarem-se inimagináveis para uma situação real. No problema exposto acima, por exemplo, podemos refletir com os alunos que a quantidade de alimentos produzida no ano 2015, apresentada na tabela (14 348 907 toneladas), é bem grande, considerando, por exemplo, um único país ou o espaço necessário para armazenamento. E para os próximos anos, sendo o crescimento exponencial, seria possível essa quantidade de alimentos? Destaco aqui que só mais adiante na conversa é que a Salgado irá voltar a este fato, dizendo "*eu já tinha visto que estava numa exponencial muito alta, mas eu não relacionei que estava fora da realidade*" (ÁUDIO, 10/08/2018). Dessa maneira, constatamos importantes contribuições do projeto, na troca de conhecimentos, quando foi trazida a situação problema, e também para a reflexão sobre a nossa prática docente, no sentido de que podemos aprender a estabelecer um olhar crítico para os materiais que usamos, ao desenvolver as nossas aulas. Muitas vezes, trata-se de materiais impostos, porém, como professores, podemos estimular também o nosso aluno a desenvolver esse olhar mais cuidadoso para as situações problema apresentadas, com a intenção de que ele aprenda a fazer cálculos, mesmo que seus resultados em algum momento fiquem fora da realidade para o contexto em que estão sendo aplicados.

A conversa envolvendo a atividade lembrada pela Salgado trouxe uma importante preocupação para quando se elabora uma tarefa exploratório-investigativa para ser implementada em sala de aula: o planejamento. É durante esse planejamento que os professores têm a oportunidade de conhecer com profundidade o tipo de fenômeno que será usado na elaboração da tarefa, permitindo que analisem se a situação a ser proposta faz sentido, como situação real, para os alunos que nela estarão envolvidos.

Após as falas da Salgado e da Thaís, foi a vez da Leticia dar continuidade às reflexões sobre a função exponencial, trazendo também a sua experiência com o trabalho sobre esse tema:

> *Isso [Refere-se à fala da Thaís sobre os pontos de referência usados para construir a curva exponencial, que foi comentada pela Salgado, trazendo o exemplo da Produção*

de Alimento] envolve trabalhar com um fenômeno que tenha variáveis contínuas. Necessariamente, por exemplo, o tempo é uma delas. Porque existem muitos exemplos. Estou me lembrando de quando trabalhei com meus últimos estagiários que trabalharam função exponencial [...] E uma das grandes dificuldades, entre aspas, foi achar um fenômeno que realmente representasse uma função contínua na reta real. Porque, por exemplo, tinham aquele exemplo da semente, e de uma semente, no primeiro ciclo de reprodução, saem duas, daí de cada semente no segundo ciclo saem duas, assim sucessivamente. Mas esse é um fenômeno discreto. Porque é a quantidade de sementes, aí não faz sentido quantas sementes você tem em meio ciclo. Entendeu? E assim, a gente achou vários fenômenos, que são, normalmente, pelo menos na Argentina, muito utilizados para representar, para introduzir a função exponencial e na verdade são discretos. (ÁUDIO, 10/08/2018)

Confesso que, como professora, eu sinceramente nunca parei para pensar sobre os tipos de situações que eu apresentei aos meus alunos quando estava trabalhando com as funções exponenciais. Muitas vezes busquei exemplos de situações problema prontas em materiais e livros didáticos, mas não parei para analisar se elas são contínuas ou discretas. O fato citado pela Leticia sobre o uso de um fenômeno discreto me trouxe a curiosidade de pesquisar em um dos meus livros didáticos de primeira série do Ensino Médio. Encontrei o fenômeno da reprodução de bactérias sendo utilizado para introduzir o tema função exponencial com o seguinte enunciado:

Quadro 03 – Exemplo de Função Exponencial com crescimento de população de bactéria

Supõe-se que determinada população iniciou-se com 10 bactérias e, sob certas condições de reprodução, a cada hora formou-se uma nova geração, dobrando o seu número de elementos. Acompanhando o crescimento dessa população, pode ser elaborada a tabela a seguir:

Tempo (x)	Expressão	Total de bactérias (y)
0	$10 = 10 \cdot 2^0$	10
1 hora	$10 \cdot 2^0 \cdot \mathbf{2} = 10 \cdot 2^1$	20
2 horas	$10 \cdot 2^1 \cdot \mathbf{2} = 10 \cdot 2^2$	40
3 horas	$10 \cdot 2^2 \cdot \mathbf{2} = 10 \cdot 2^3$	80
x horas	$10 \cdot 2^x$	$y = 10 \cdot 2^x$

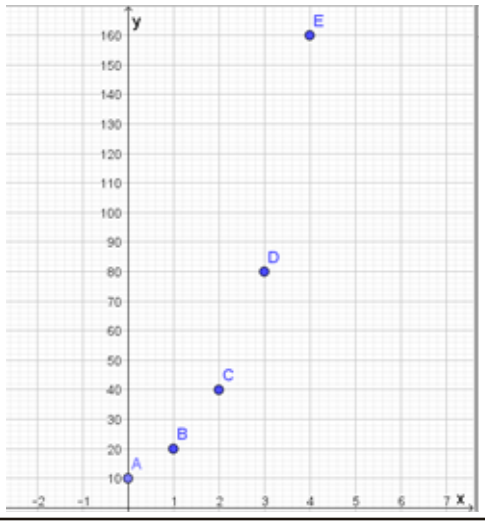
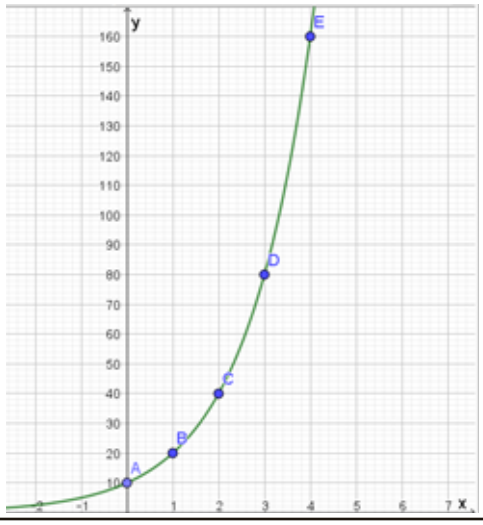
O número de bactérias y está em função do tempo x, pois para cada valor assumido por x, há um único correspondente y. A lei de correspondência que descreve essa situação é dada por f(x)=10.2^x. Esse tipo de função é obtido a partir da **função exponencial**.

Fonte: Fugita (2009, p. 182).

A situação trazida pelo material que encontrei, representada no Quadro 3, aliada ao diálogo que observei entre as professoras sobre fenômenos contínuos ou discretos, me fez refletir sobre a inquietação da Thaís, referindo-se ao uso de pontos de referência que sejam números inteiros. Eu fiquei imaginando uma situação em que alguém resolvesse perguntar: "Qual é o número de bactérias duas horas e meia após o início da reprodução?"; eu teria resposta, pois o número é o mesmo que se tem após duas horas. O problema é que esta resposta estaria comprometendo totalmente a construção de uma curva exponencial

contínua. O fenômeno analisado pode ser representado por um modelo matemático que representa uma expressão exponencial, porém não poderia ser usado para exemplificar uma função $f: R \rightarrow R_{+}^{*}$, consequentemente, não é um exemplo de curva contínua. O correto nesta situação seria apresentar como um caso particular da função exponencial com $f: N \rightarrow N^{*}$, ou seja, com o domínio e a imagem sendo o conjunto dos números naturais, e isso não ficou claro no texto. Para visualizar graficamente esta situação, observe o Quadro 04:

Quadro 04 – Diferença da representação gráfica quando a função exponencial apresenta restrições em seus conjuntos de Domínio e Imagem

	
Representação Gráfica da Situação Problema: pontos da tabela, com domínio N e Imagem N*	Representação Gráfica da Situação Problema: mostrando a modelagem com a curva exponencial

Fonte: Autoria própria.

O que acaba acontecendo é que fenômenos que possuem como característica o crescimento ou decrescimento exponencial são usados para problematizar a função exponencial sem o devido cuidado quanto às definições de seus conjuntos de domínio e imagem, que variam de acordo com a realidade com que acontecem. É importante destacar aqui que, segundo Skovsmose, problemas como os tratados anteriormente, o da produção de alimentos e a da reprodução de bactérias, são "situações artificiais", por situar-se em uma "semirrealidade". Para Alrø e Skovsmose (2006, p. 53-54),

> resolver exercícios que se referem a semirrealidades é uma competência específica que se manifesta na Educação Matemática [...] A semirrealidade está completamente descrita no texto da questão. Nenhuma informação externa referente à semirrealidade é relevante para fins da resolução do exercício e, portanto, não é relevante para nada. O único propósito do exercício é ser resolvido.

Dessa forma, questionamentos e reflexões como as realizadas anteriormente sobre as situações problema da produção de alimentos e da reprodução das bactérias, fariam parte de "cenários de investigação" definidos por Skovsmose como "abertos" e que se caracterizariam como ambientes de aprendizagem diferenciados, em que a participação dos alunos não se limita à resolução de exercícios.

Em continuidade à reunião, a Thaís lembrou-se de outras situações problema envolvendo fenômenos discretos e contínuos: o problema do decaimento do carbono-14 em fósseis, representando um fenômeno contínuo, e problemas como os das bactérias e dos vírus, representando fenômenos não contínuos. Para ela, eles seriam possibilidades de se trabalhar com a função exponencial aplicada a problemas que levariam para números muito grandes, mas que fazem sentido, quando analisados no contexto real.

Procurando encaminhar as decisões sobre o fenômeno a ser explorado na tarefa, a Leticia diz:

> *Estamos discutindo, e começaram a aparecer várias coisas interessantíssimas. Uma é: a capacidade de uma função ser contínua, de cobrir com resultados correspondentes a toda reta real. Se eu tenho essa gráfica, eu sei quanto é 2 elevado a qualquer número, inclusive elevado a números irracionais. Esse é um aspecto. Outro aspecto tem a ver com analisar as taxas de crescimento, sendo que as exponenciais são as que mais rápido crescem em todos os quesitos. Assim, esse movimento, de pensar como, em pouco espaço de tempo, realmente a função dispara. Outra coisa é comparar esse crescimento, com outros tipos de funções, o que é mais vinculado com o segundo ponto. (ÁUDIO, 10/08/2018)*

Quando a Leticia falou na comparação entre as taxas de crescimento, a Salgado lembrou-se de uma situação que costuma explorar com seus alunos, envolvendo juros simples e juros compostos. Nesse caso, ela compara as progressões aritmética e geométrica, conforme segue:

> **Salgado:** *Estou me lembrando do exercício que eu sempre falo que eu dou em sala de aula, sobre PA e PG, falando de juros simples e juros compostos. Então eu gosto dessa realidade [...] O juro de poupança é 0,5%, você quase que não percebe o que está ali. Só que em contrapartida, eu peguei ontem um jornalzinho [de uma loja de departamentos] e não é um juro de 0,5%, é um juro muito alto. [...]. Então, é chamar a atenção do aluno pra essa outra realidade: você põe um valor no banco e não rende, mas vai comprar uma coisa a prestação, você quase morre para pagar. (ÁUDIO, 10/08/2018)*

Neste momento, há uma abertura para outra situação problema, que seria mostrar para o aluno o que acontece com um valor que ele aplica em uma poupança e o que acontece, quando ele resolve comprar algo, pagando em prestações. Esta seria uma situação mais próxima à realidade dos alunos de Ensino Médio, possibilitaria o trabalho com juros compostos, representando uma expressão exponencial e, além disso, traria em seu contexto a Educação Financeira, que, conforme Silva e Powell (2013, p. 12-13),

> [...] constitui-se de um conjunto de informações através do qual os estudantes são introduzidos no universo do dinheiro e estimulados a produzir uma compreensão sobre finanças e economia, através de um processo de ensino, que os torne aptos a analisar, fazer julgamentos fundamentados, tomar decisões e ter posições críticas sobre questões financeiras que envolvam sua vida

pessoal, familiar e da sociedade em que vivem.

Ou seja, não estamos falando apenas de ferramentas matemáticas, estamos falando de mostrar para o aluno uma realidade que exigirá, além dos cálculos, uma tomada de decisão, tendo como base uma interpretação desses números. Ao falar desse tema, as professoras começaram a se lembrar de outro momento vivenciado no GdS, antes de iniciar o *LSH*, o qual a Salgado me contou ter sido uma espécie de "ensaio" para a elaboração de uma tarefa, mas que acabou não se mostrando viável na época. Através dessa lembrança, a Thaís começa a pensar e verbalizar em como esse trabalho poderia ser retomado:

> *Mas agora do jeito que você está falando, me faz pensar assim: a gente não precisa sair do contexto do banco. [...] Como é que eu posso emprestar dinheiro para o banco e como é que o banco me empresta dinheiro? Quais são esses caminhos para que haja um estudo [...] para a gente compreender taxa de juros? Só que tudo isso é bastante complexo, não é? Então a gente vai ter que estudar bastante, porque assim não é só juros: é o juro, é o imposto, tem tudo isso, se você for colocar. Mas eu acho que é riquíssimo. (ÁUDIO, 10/08/2018)*

O fato de as professoras já terem explorado essa temática em outras situações trouxe para esta discussão uma certa maturidade, o que ajudaria na escolha de um foco para então planejar uma possível tarefa. Thaís começa a pensar em mostrar para o aluno as maneiras que ele tem para aplicar dinheiro, e as maneiras que ele tem para emprestar dinheiro do banco. Neste ponto da conversa, não há como não fazer uma reflexão particular sobre já ter passado por essas situações e, muitas vezes, não compreender como funcionam matematicamente os cálculos envolvidos nessas transações bancárias. As professoras fizeram esta reflexão. Eu também fiz. Já fui surpreendida com uma aplicação que descontou uma parte para o imposto de renda; já comprei muitas coisas a prestação e fiquei tentando entender como era calculado o valor da parcela. Então, de fato, seria uma situação que exigiria das professoras um "mergulho" nesse mundo financeiro para, a partir de suas compreensões, conseguirem criar uma tarefa que mostrasse o máximo possível dessa realidade vivida por todos nós. Sobre esse tema é possível sentir um encantamento por parte da Thaís: "Eu acho que o nosso aluno dá conta de fazer isso. E acho que a gente vai trazer um contexto que vai preparar o nosso aluno para a vida. É ele usar a matemática de sala de aula para se letrar na matemática da vida que ele precisa usar de fato" (ÁUDIO, 10/08/2018).

Fiquei pensando em como nós, professores de matemática, somos muitas vezes cobrados com perguntas do tipo: "*Professora, fala sério, onde eu vou usar isso?*". E, nesse momento, quando consigo ver esta ideia para uma tarefa e a Thaís falando do letramento do aluno, da formação dele para a vida, chego a me emocionar. Como professora, eu confesso que tenho dificuldade em encontrar respostas que satisfaçam os alunos diante dessas inquietações que eles trazem, relacionadas à aprendizagem da matemática. Para as professoras, trabalhar com a Educação Financeira traria uma matemática complexa, no sentido de se realizarem cálculos trabalhosos, sendo necessário o uso de calculadoras para um bom andamento da tarefa. Porém, neste caso, tem um sentido tão esclarecedor que

acaba por encorajá-las a não descartarem este tema.

Pensando ainda sobre esse tema, os livros didáticos costumam trabalhar com situações de empréstimo ou de aplicações, relacionando-as a exemplos de aplicações das funções exponenciais. Os juros compostos são usados para contextualizar, mais adequadamente, uma progressão geométrica; por isso, ao usar esse mesmo conteúdo para exemplificar uma função exponencial, é necessário o devido cuidado de fazer uma definição de domínio e imagem que seja coerente com a situação real. Na poupança, por exemplo, não existe aplicação de um dia e meio; apesar de ser um crescimento exponencial, o tempo, que seria a variável independente, só pode ser definido no conjunto dos números naturais.

A situação problema relacionando os juros compostos e a Educação Financeira trouxe muita empolgação para o sEM. Porém, a decisão ainda não estava tomada, pois o problema do decaimento do carbono-14 ainda não havia sido descartado pelas professoras. Por ser um problema que envolveria outras áreas de conhecimento, como as Ciências da Natureza e a Geografia, traria em seu contexto o fator relacionado ao desenvolvimento profissional do professor, conforme exposto pela Thaís:

> *Quando eu analiso uma situação dessa [situação problema relacionada ao decaimento de carbono-14 em fósseis], eu posso pensar no mapeamento de um cenário geográfico, que eu tenho que pegar uma rocha dali e tentar entender quanto tempo aquilo tem. Baseado em que química? Que física? Em que matemática que está registrado ali? E que eu preciso fazer um estudo para tentar compreender o que está registrado lá, não é? Então, assim, a gente está sendo provocado a pensar sobre essas coisas, essas coisas que se integram em si, de diferentes maneiras. E, sinceramente, eu, enquanto professora de matemática, atualmente eu não sei fazer isso. É muito complexo para mim. (ÁUDIO, 10/08/2018)*

Ouvindo estas palavras da Thaís, para mim foi inevitável não lembrar das palavras de Morin (2000, p. 47-48), cuja leitura eu havia feito recentemente. Segundo ele, apesar de todos os conhecimentos obtidos no século XX,

> o humano continua esquartejado, partido como pedaços de um quebra-cabeça ao qual falta uma peça. [...] assiste ao agravamento da ignorância do todo enquanto avança o conhecimento das partes [...] é necessário promover grande remembramento dos conhecimentos oriundos das ciências naturais, a fim de situar a condição humana no mundo.

Quando fiz essa leitura, apesar de entendê-la, fiquei sem saber como colocá-la em prática, pois, assim como a Thaís, eu também não tinha ideia de como fazer essa integração entre a matemática e outras disciplinas. Porém, a participação em grupos como o GdS e em projetos como o *LSH*, em que há um grupo de professores dispostos, possibilita o desenvolvimento profissional do docente e abre oportunidades para que trabalhos como esse, a integração entre diferentes disciplinas, possam acontecer. Ter a oportunidade de ouvir essa reunião, analisando todos esses diálogos, me fez perceber o quão amplo tem que ser o conhecimento de mundo que o professor deve ir construindo ao longo de sua

trajetória profissional. Não se trata de querer ser muito exigente comigo mesma, e sim de um sentimento de que o meu desenvolvimento profissional também passa por esse aspecto.

Após todas essas reflexões em torno das funções exponenciais, o grupo precisava se encaminhar para a decisão sobre que tipo de fenômeno seria escolhido para a elaboração da tarefa. A conversa acabou levando para a dúvida entre duas situações: a primeira seria um fenômeno natural contínuo, falando sobre o decaimento do carbono-14 em fósseis; a segunda seria sobre os juros compostos, pensando em uma expressão exponencial e no uso de ferramentas matemáticas que se fizessem necessárias para desenvolver uma tarefa. Para chegar a um fenômeno definitivo, as professoras foram convidadas a expor uma segunda reflexão solicitada pela coordenadora Leticia, a ser respondida antes do início da reunião.

Inquietações sobre a prática que ajudam a definir o fenômeno

A segunda reflexão solicitada pela Leticia foi na direção de começar um ciclo com uma PERGUNTA/INQUIETAÇÃO que emerge da prática docente. Assim, ela pede aos professores que escrevam duas perguntas (ou mais) que, ao implementarem tarefas exploratório-investigativas, emergem de suas práticas e que gostariam de estudar nesse momento.

Ao solicitar a segunda reflexão para o sEM[41], a Leticia explicou que "os artigos lidos sobre LS ressaltam que todo ciclo começa por uma PERGUNTA/INQUIETAÇÃO que emerge da própria prática dos professores". Dessa forma, seria importante que, antes da definição sobre que tipo de situação problema seria contemplado na tarefa do terceiro ciclo, as professoras apresentassem as suas perguntas/inquietações para que pudessem encontrar uma que fosse comum a todas, o que seria importante para orientar todo o trabalho do terceiro ciclo: a escolha do tema, a elaboração da tarefa, sua implementação, análise e sistematização.

Para iniciar esse segundo momento da reunião, quem falou primeiro foi a Juliet. Sua reflexão buscou contemplar uma inquietação sobre o nível de autonomia que os alunos possuem ao resolver uma situação problema; a questão em torno da dependência dele, aluno, em relação à presença do professor, no momento de realizar atividades em sala de aula ou, até mesmo, no momento de implementar as tarefas dos ciclos anteriores.

> **Juliet:** *Às vezes você passa uma atividade em sala de aula que nem precisa de fórmula para resolver, e eles querem saber qual é a fórmula que eles têm que usar, se aquela fórmula está certa. E às vezes nem tem necessidade daquilo. Eles são muito dependentes da matéria que o professor está passando, de o professor falar se está certo ou errado. Acho que ver se a atividade, e o encaminhamento do professor, consegue abrir para eles essa possibilidade de eles explorarem de outra forma, de eles não ficarem dependentes daquela fórmula só, de eles também pensarem, arriscarem, tentar fazer. (ÁUDIO, 10/08/2018)*

[41] Refiro-me à tarefa apresentada no primeiro item desta narrativa.

Pensar nesta falta de autonomia dos alunos durante a realização de tarefas em sala de aula envolve duas situações: ora depende da qualidade da tarefa que está sendo oferecida, ora depende da postura do aluno, que não se preocupa em escutar uma determinada orientação exposta pelo professor e depois acaba tendo que perguntar individualmente. Saber lidar com as duas situações faz parte do desenvolvimento profissional do professor. Porém, no que cabe ao professor especificamente, pude perceber que as professoras do sEM vêm refletindo através dos ciclos sobre a elaboração de bons enunciados – que sejam claros e tragam todas as informações necessárias para que o aluno possa entendê-los adequadamente, sem que precise solicitar tanto a presença do professor. A elaboração de bons enunciados favorece a formação do aluno no desenvolvimento tanto da competência leitora, para interpretar o que está sendo pedido e conseguir realizar a atividade, como da autonomia dele, para que precise de poucas intervenções para avançar na tarefa. A Thaís lembrou que o grupo tem refletido sobre isso desde a implementação do primeiro ciclo:

> *A gente teve a preocupação em explorar um enunciado de maneira que o enunciado interagisse com o aluno para que ele, o aluno, tivesse certa autonomia no sentido de compreender com objetividade e clareza o que precisava fazer, sem ter que ficar perguntando para o professor. Para poder liberar o professor em certa medida, para que ele tenha outras intervenções na sala de aula que não seja ficar falando coisas que são básicas. (ÁUDIO, 10/08/2018)*

Essa observação feita pela Thaís associou a importância de um bom enunciado com as intervenções que o professor faz durante a aplicação da tarefa. Ou seja, quando temos um bom enunciado, as intervenções relacionam-se mais com o objetivo da tarefa e o seu desenvolvimento do que com a interpretação sobre o que fazer, e isso, em certa medida, contribui mais para a aprendizagem matemática do aluno.

Foi possível sentir as inquietações das professoras, relacionadas às suas formas de intervenção, graças ao processo do próprio *LSH*, que lhes proporcionou oportunidades de observar-se e de serem observadas em áudio e videogravações. Reunindo essas situações, puderam realizar autorreflexões sobre a forma como atuam em sala de aula, inclusive nos diálogos e nas interações com os seus alunos. Foi muito interessante observar a Salgado dizendo nesta reunião: "Por que que eu não o ouvi [o aluno] direito? Eu não entendo!" (ÁUDIO, 10/08/2018). Esta reflexão foi possível através da análise de alguns diálogos entre ela e seus alunos, gravados e analisados após a implementação de uma atividade do primeiro ciclo. Dessa forma, compreendo mais uma importante contribuição do *LSH* para o desenvolvimento profissional do professor: oportunizar que, observando-se em sala de aula durante uma implementação, o professor realize importantes compreensões sobre a sua própria prática e aperfeiçoe seu trabalho, em benefício do desenvolvimento da aprendizagem de seus alunos.

Um outro ponto de reflexão relacionado às intervenções das professoras em sala de aula envolve o conhecimento do professor, ou seja, sua apropriação da situação que está sendo proposta para o aluno. A Leticia coloca um fato importante, proporcionado pelo

processo do *LSH*:

> *O fato de trabalhar com uma situação exploratório-investigativa, seja com um fenômeno natural, ou uma situação da vida real, necessariamente faz com que a gente tenha que estudar um monte de conhecimentos matemáticos. Isso tem acontecido nos dois ciclos anteriores, e, se a gente for pelo mesmo caminho, isso vai acontecer nesse ciclo também, em relação à função exponencial. (ÁUDIO, 10/08/2018)*

Refletindo sobre esse fato, é importante observar que fazer parte do *LSH* contribui para que o professor possa ampliar os seus conhecimentos, pois, ao participar da elaboração de uma tarefa, ele desenvolve com ela uma atividade de intensa exploração e estudos, o que lhe possibilita estar mais preparado para as possíveis intervenções em sala de aula, as quais deverão ir ao encontro do objetivo da tarefa, que é atribuir significado a um determinado conteúdo matemático, e não apenas propiciar o uso das ferramentas matemáticas que povoam o pensamento do professor de matemática. Todos os participantes do grupo, certamente, iniciam a participação em um ciclo com um nível de apropriação do tema escolhido que não será o mesmo quando o ciclo terminar. Como dito pela Leticia: "é o que esperamos", sair de um ciclo com alguns aspectos modificados em relação à nossa prática e ao nosso conhecimento. Tal fato se deve a todo o movimento proporcionado pelo ciclo, que, nessa fase do projeto, já permite a colheita de alguns frutos. Como bem observado pela Thaís:

> *Eu percebo a riqueza que a gente está vivendo aqui nos ciclos de aprender uma profundidade da sala de aula que a gente não tinha essa dimensão. A dimensão atual que a gente trabalha como professora é assim: vai lá, ensina do jeito que está escrito no livro, ou no caderno, mas sem problematizar. Olha o movimento que a gente está fazendo. A gente pensa sobre a sequência, a gente está analisando se isso faz sentido ou não. (ÁUDIO, 10/08/2018)*

Com as reflexões sobre o aprendizado do professor, é possível para o grupo entender que justamente todo o processo de aprendizado e de estudo do professor, que antecede a implementação da atividade em sala de aula, é que melhora as intervenções dos professores. Sendo assim, o grupo decide estabelecer como pergunta do terceiro ciclo: Em que momento – e como – o professor pode fazer intervenções para que o aluno ou o grupo avance no tempo dele?

Escolhendo esta questão para orientar todo o trabalho do terceiro ciclo, concluem que trabalhar com Educação Financeira seria mais propício para entender como essas intervenções acontecem, visto que podem escolher situações mais próximas da vivência dos alunos.

Após a análise do áudio da reunião do dia 10/08/2018 do sEM, vou percebendo que chegar ao tema Educação Financeira foi uma trajetória muito enriquecedora em termos de aprendizados e reflexões das participantes da reunião e, depois, também dos meus,

ao ter acesso a esse áudio. Analisando as duas situações com as quais as professoras se confrontaram para tomar uma decisão, penso que não existiu um caminho mais fácil. Existiu o lado mais próximo do aluno, que é a Educação Financeira, mas que exigirá, de qualquer maneira, um bom estudo por parte das professoras, para que estejam preparadas para boas intervenções em sala de aula. A escolha do trabalho com a Educação Financeira, no terceiro ciclo, levou as professoras a buscar muitas compreensões sobre o tema e, de certa forma, foi necessária uma integração entre o que se vive na realidade, ao efetuar certas transações bancárias, e a matemática aprendida na escola. No Apêndice 3 deste livro, o leitor poderá conhecer a tarefa que foi elaborada para este terceiro ciclo de *LSH* e constatar que a temática escolhida levou as professoras à decisão de não trabalhar com a função exponencial, e sim com a progressão geométrica no contexto dos juros compostos.

Considerações finais

Quero dizer, aqui, do aprendizado adquirido, ao ter a oportunidade de escrever esta narrativa. Ao analisar os diálogos, ouvindo as reflexões dos envolvidos, quanto aprendizado pude obter também! Estou percebendo o quanto é rico poder ter um tempo para refletir sobre a nossa prática. Conforme as professoras iam conversando sobre o tema função exponencial, eu fui buscando em minha memória quantas daquelas situações eu já vivenciei e quanta coisa eu já falei sem refletir. E sem levar o meu aluno a refletir. Por quantas vezes eu fiz uso de situações problemas relacionados à função exponencial, sem as devidas observações sobre os seus conjuntos de domínio e imagem, ou até mesmo, sobre o seu real significado. Se os livros trazem e os vestibulares cobram, eu posso usar; porém, foi com a participação no GdS que consegui compreender a importância de estudar e refletir sobre os temas com os quais trabalho em sala de aula, para que meu aluno também possa melhorar sua compreensão sobre o que está sendo apresentado para ele. Entendo, e não há como não entender, todas as demandas das quais temos que dar conta como professores de matemática: vestibulares, Enem, currículo, entre outras. Mas é através desta oportunidade de formação que estou vivenciando que poderei melhorar a minha contribuição para a formação integral do meu aluno.

E, assim, consegui entender a grandeza do tema escolhido para a implementação no terceiro ciclo. Ele nasceu das reflexões sobre alguns fenômenos usados para representar uma função exponencial e acabou se estendendo para a Educação Financeira. Uma tarefa que não poupou esforços para trazer para o aluno uma situação mais próxima possível de sua realidade, usando números da realidade, e não fictícios.

Durante a elaboração desta narrativa pude perceber também outros aprendizados proporcionados para a prática do professor, pela sua participação no *LSH*. O professor estuda, reflete e conta com a ajuda do grupo no qual está envolvido para se formar primeiro, antes de ir para a sala de aula com uma atividade a ser aplicada. Após implementar uma tarefa, volta o seu olhar para a sua própria prática, sem medo de compreender os pontos que ainda precisam de ajustes; e, assim, vai melhorando a sua atuação, a cada novo movimento autorreflexivo. Cada ciclo de *LSH* pode trazer uma aprendizagem diferente; sendo assim,

entendo que não posso dar por acabado o processo de desenvolvimento profissional dos professores envolvidos.

Concluo esta narrativa com mais aprendizado do que tinha quando me propus a escrevê-la. Pude, com as professoras envolvidas, participar de suas reflexões, colocando-me no papel que elas desempenharam, e pude também compreender como é a minha própria prática. Levarei comigo todo aprendizado aqui obtido através desse rico trabalho de pensar, refletir, buscar e ter coragem de mostrar a matemática da vida.

Referências

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática*. Tradução de Orlando Figueiredo. 2. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2010.

FIORENTINI, D. Grupo de sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M. (org.). *Histórias e investigação de/em aulas de matemática.* Campinas, SP: Alínea, 2006.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia:* saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FUGITA, Felipe et al. *Ser protagonista* – Matemática Ensino Médio. São Paulo, SP: Edições SM, 2009.

MORIN, E. *Os sete saberes necessários à Educação do futuro*. Tradução de Catarina Eleonora F. da Silva e Jeanne Sawaya. Revisão técnica de Edgard de Assis Carvalho. São Paulo: Cortez; Brasília – DF: Unesco, 2000.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. *Caderno do Aluno* – Matemática – Ensino Médio, 1.ª Série. Edição 2014-2017. São Paulo: SEESP. v. 2.

SILVA, A. M.; POWELL, A. B. Um programa de Educação Financeira para a Matemática escolar da Educação Básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 18 a 21 de julho de 2013. Curitiba, PR. *Anais* [...]. Curitiba, PR, 2013. ISSN 2178-034X.

"É SÓ PEGAR COM O AGIOTA!": NEGOCIANDO SIGNIFICADOS VINCULADOS À EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Juliet Sarkis

A presente narrativa se originou de um episódio de sala de aula que me instigou profundamente como professora e me levou a pensar não só sobre a diversidade de negociações de significados que podem ocorrer entre alunos, quando participam de uma aula exploratório-investigativa, mas também sobre os desafios que esse cenário pode impor ao professor.

Antes de mais nada, vale destacar que as aulas exploratório-investigativas, segundo Fiorentini (2006), são caracterizadas por tarefas desafiadoras que permitem aos estudantes o uso de diferentes estratégias de solução. Ou seja, tarefas abertas que oferecem ao aluno oportunidade de ser protagonista na construção do seu próprio conhecimento e na significação dos conceitos matemáticos trabalhados.

A tarefa que possibilitou o desenvolvimento da aula exploratório-investigativa apresentada nesta narrativa foi elaborada pelos participantes do subgrupo de Ensino Médio no GdS, durante o terceiro ciclo de LSH, e abordou a educação financeira. Ao analisar um episódio acontecido na minha sala de aula durante a realização da tarefa, essa narrativa se localiza na fase de implementação e observação. Quero destacar, ademais, que a implementação da tarefa se transformou no cenário de coleta de dados da minha dissertação de Mestrado (SARKIS, 2020).

Dividi esta narrativa em quatro seções. Na primeira, farei uma breve explanação da tarefa que foi implementada na sala de aula. Na seção seguinte, apresentarei o episódio que irá desencadear as reflexões que farei posteriormente. Na terceira seção, realizarei algumas reflexões sobre as negociações dos alunos e os desafios das aulas exploratório-investigativas, para mim, como professora. Por fim, exporei uma síntese das conclusões.

A tarefa

A tarefa que trago nesta narrativa tinha por foco desenvolver a educação financeira dos nossos alunos. Ela era dividida em três partes. A primeira consistia numa discussão preliminar, em que, inicialmente, os alunos fizeram uma lista de dez palavras que, segundo sua opinião, tinham relação com a educação financeira. A partir dessa lista, eu elaborei uma nuvem de palavras que foi utilizada numa roda de conversa na qual todos os alunos compartilharam suas ideias iniciais em torno da educação financeira e suas experiências

com o sistema financeiro.

A segunda parte consistia na resolução, em pequenos grupos, de uma tarefa centrada nas experiências de dois personagens fictícios que chamamos Carol e Fernando[42]. Carol era uma jovem de 19 anos, que começou a trabalhar aos 16 anos, num projeto de jovem aprendiz. Quando foi efetivada, aos 17 anos, seu salário passou a ser de R$ 1.662,57, e, ao final de todo mês, restavam R$ 600,00, que ficavam na sua conta corrente. Quando completou 19 anos, ela iniciou um curso superior, que teria a duração de dois anos. Nesse período restariam apenas R$ 300,00 do seu pagamento. Carol percebeu, então, que estava se acumulando um grande montante em sua conta corrente e decidiu aplicar esse dinheiro. Ela buscou opções e se deparou com quatro possibilidades:

1. **Poupança:** é uma opção de baixo risco, tem taxa de rendimento de 6% ao ano, não tem valor fixo para depósito, mas, se for realizado um saque antes de ter completado um mês do depósito, a conta não gera rendimento.
2. **CDB:** é uma opção de baixo risco, tem taxa de rendimento de 8% ao ano, exige um valor inicial de depósito de R$ 500,00 e, quando é feito um saque, é descontada do valor de rendimento uma taxa que varia de acordo com o tempo que o dinheiro ficou na conta.
3. **Dólar:** é uma opção de alto risco, já que não é possível prever sua variação. É necessário um acompanhamento dessa variação para saber o melhor momento de comprar e vender.
4. **Investimento imobiliário:** consistia na compra de um terreno no valor de R$ 70.000,00, para a qual era necessária uma entrada de R$ 8.000,00, além do pagamento de algumas taxas num montante de R$1.000,00. O restante seria financiado em 16 anos, com parcelas de R$ 575,00.

Diante desse cenário, cabia aos alunos analisarem as opções e aconselharem Carol sobre a melhor decisão a ser tomada. Para isso, cada aluno recebeu uma folha com a descrição da personagem, e cada grupo, uma folha com espaço para seus registros sobre a opção 1, a opção 2, a opção 3, a opção 4 e o conselho final.

Vale pontuar aqui que nós, do subgrupo, sabíamos que Carol não tinha o dinheiro para comprar o terreno, porém deixamos a opção, pois imaginamos que os alunos poderiam apresentar algumas alternativas, como fazer um empréstimo com algum familiar, ou até mesmo investir numa poupança ou CDB e depois comprar o terreno, por exemplo.

A terceira parte da tarefa propunha a socialização do trabalho pelos grupos com a turma toda. Cada grupo apresentou o conselho final negociado por eles e justificou sua decisão. Eles também explicaram por que as outras opções não foram escolhidas. Ao final da explanação do grupo, os demais colegas e eu podíamos fazer perguntas e observações.

[42] Nesta narrativa apresentarei apenas o perfil da personagem Carol, pois foi a escolhida pelo grupo que trago nas discussões. O enunciado completo da tarefa com a descrição de ambos os personagens se encontra no Apêndice 3 deste livro.

Para comprovar suas hipóteses e analisar cada opção de investimento, era esperado que os alunos recorressem a ferramentas matemáticas, como cálculo de juros compostos, aproximações e estimativas, assim como ao uso de calculadora. Também se contava que suas argumentações seriam pautadas em decisões tais como gastar de forma consciente, entrar ou não no limite da conta, buscar formas alternativas de conseguir o valor de que precisavam, por exemplo. Os grupos, em sua maioria, apoiaram-se em argumentos quantitativos para defender a opção escolhida. Porém, um deles, que trabalhou com a personagem Carol, baseou sua escolha em argumentos qualitativos. É justamente esse grupo que ganha destaque nesta narrativa.

Uma escolha instigante

Dentre todos os argumentos utilizados pelos alunos para defender sua escolha final, um dos grupos me surpreendeu, ao fazer uso de argumentos que, além de serem puramente qualitativos, foram instigantes para mim como professora. O grupo em questão era formado por Ana, Stella, Helena e Henrique[43]. Com exceção desse último, as demais participantes da equipe tinham uma certa dificuldade com a matemática, mas eram esforçadas e sempre tiravam suas dúvidas durante as aulas.

Na socialização, eles apresentaram o conselho final que negociaram para Carol:

> **Helena:** *A gente achou que o terreno é a melhor opção, porque ela [Carol] pode comprar por barato e vender por mais caro.*
>
> **Ana:** *Ele [se refere ao terreno] vai valorizar.*
>
> **Helena:** *Sim, ele vai valorizar... o terreno, depois de um tempo...*
>
> **Ana:** *Fora que ela também poderia construir alguma coisa, depois de um tempo que ela [Carol] estiver já estabilizada, porque pelo jeito está difícil... e ela poderia construir alguma coisa, fazer uns aluguéis top...E, é isso!*
>
> **Professora:** *Agora, como que ela ia comprar esse terreno? Ela ia ter dinheiro para comprar esse terreno? [...]*
>
> **Ana:** *Professora, posso ser sincera, a gente não fez conta para o terreno, a gente só olhou e falou assim: huumm... acho que pode ser uma opção boa, foi isso.*
>
> **Stella:** *Mas ele [o terreno] é uma boa hipótese. Porque eles podem fazer casa...*
>
> **Carlos:** *É por que ele valoriza sempre, mano...*
>
> **Professora:** *Como é que é, Carlos?*
>
> **Carlos:** *Casa sempre valoriza mais.*
>
> **Ana:** *Qualquer casa que você compra, vamos supor que ela faz uma [casa] no terreno, qualquer reforma que ela faz, já valoriza mais.*
>
> **Stella:** *E outra, ela poderia dividir o terreno no meio e fazer duas casas.*
>
> **Ana:** *Eu dividiria sei lá, em dez partes e fazia um sobradinho top, para todo mundo morar ali. [...]*
>
> **Professora** *[retomando o contexto para o restante da sala]: O problema está: ela*

[43] Os nomes adotados para os alunos nesta narrativa são fictícios.

> *[Carol] tem a opção de comprar o terreno, mas não tem o dinheiro para pagar as parcelas de 575 reais, por dois anos, pois sobram do salário dela [Carol] só 300 reais. Teria alguma forma dela dar essa entrada e depois conseguir o dinheiro para ir pagando essas parcelas?*
>
> **Stella:** *Tem, professora. Ela pode pegar o dinheiro com um agiota.*
>
> **Alguns alunos:** *Mas não pode.*
>
> **Professora:** *Mas e os juros?*
>
> **Stella:** *Ah, mas é mais fácil. Depois você paga.*
>
> **Professora:** *Mas daí, temos dois problemas. Os juros e se você não conseguir pagar.*
>
> **Stella:** *Meu pai pega [dinheiro com o agiota]. Nunca deu problema. (ÁUDIO, 09/11/2018)*

Confesso que, nesse momento, fiquei sem reação. Pensei: "meu Deus! O que faço, o que falo agora?". Embora em nosso planejamento, nós, do subgrupo, tivéssemos levantado diversas hipóteses de respostas e questionamentos por parte dos alunos, em nenhum momento cogitamos a possibilidade de alguém falar em agiota. Fiquei em dúvida sobre como reagir, pois esta era uma temática bastante complexa para ser discutida em sala de aula. Optei, então, por fazer uma intervenção mais superficial, apenas tentando mostrar que eles tinham que pensar matematicamente naquele caso.

Foi a partir deste episódio que decidi analisar mais detalhadamente o trabalho que este grupo havia desenvolvido ao longo da atividade, para ver os significados que, ao longo da tarefa, eles tinham negociado para esta e para as demais opções de investimento. Busquei os áudios, os vídeos e os registros deles e pude perceber que eles enfrentaram dois obstáculos. Em primeiro lugar, certas dificuldades com os cálculos matemáticos. Tal dificuldade era, de certa forma, esperada por nós como professoras. O segundo obstáculo foi compreender que, na análise de investimentos, a matemática pode ser uma ferramenta que permita realizar análises quantitativas precisas. Foi assim que o grupo optou por uma análise bastante qualitativa, dedicando-se aos cálculos apenas quando eu passava pelo grupo e os cobrava disso. Nós, como professoras de matemática e pessoas adultas com uma certa educação financeira, não tínhamos nem sequer imaginado essa dificuldade.

Desfiando o episódio

Um bom ponto de partida para começar a refletir sobre o episódio anterior é destacar que a tarefa elaborada visava desenvolver a educação financeira de nossos alunos. Eu entendo que a educação financeira é uma área que abrange um conjunto de informações sobre o uso do dinheiro, cálculos sobre finanças, economia e modelos econômicos, envolvendo, inclusive, a questão social como economia, regras de comportamento, entre outros (SARKIS, 2020). Buscando preparar os estudantes para realizar reflexões críticas, discussões e tomar decisões sobre questões que envolvam finanças, ela vai além de um estudo de fórmulas da matemática financeira. Sendo assim, essa atividade também abria espaço para que os alunos fizessem uma conexão entre a matemática e o seu cotidiano. Nesse sentido, quando

resgatei e analisei as discussões de Ana, Stella, Helena e Henrique, pude notar que, desde o início, eles estavam bastante relutantes em fazer uso da matemática para analisar as opções de Carol e sempre tendiam a uma análise qualitativa.

Logo na primeira parte da tarefa, durante a roda de conversa, Stella e Ana falaram sobre a diferença da taxa de juros cobrada por bancos para um empréstimo e a taxa de juros que aplicam no caso de uma poupança. Elas se demonstraram bastante incomodadas com o fato de o banco colocar uma taxa de rendimento tão baixa para investimentos bancários, enquanto cobra uma taxa de juros tão alta para empréstimos. Fecharam sua fala, dizendo que "a gente é sempre roubado pelos bancos". Esse fato mostra que suas vivências familiares já carregam uma cultura de desprezo pelo sistema financeiro formal. Embora eu valorize que nesta oportunidade as alunas tenham mostrado criticidade, ao dizer que não é justa a diferença nas taxas, também considero que este não pode ser um argumento para apoiar a decisão de tomar dinheiro emprestado com um agiota. A propósito, a educação financeira se mostra como um espaço favorável para esse tipo de discussão.

Na segunda parte da tarefa, o grupo iniciou analisando a opção da poupança, porém essas discussões iniciais foram pautadas pela leitura e pela interpretação da opção apresentada:

> **Stella:** *Acho que é uma boa, só que uma roubada.*
>
> **Helena:** *Por que uma roubada?*
>
> **Stella:** *Porque se você precisar do seu dinheiro...*
>
> **Ana:** *Você só vai conseguir pegar seu dinheiro no dia 5 do próximo mês.*
>
> **Stella:** *Você tem que deixar lá. Se tirar antes, não vai cair o valor.*
>
> **Ana:** *Tipo assim, você depositou dia 5, você só vai poder depositar de novo ou pegar aquele dinheiro que você depositou só no dia 5 do outro mês.*
>
> **Henrique:** *Se você pegar antes, ele não vai render nenhum dinheiro.*
>
> **Ana e Stella:** *É... [...]*
>
> **Helena:** *O que que tem atrás?*
>
> **Stella:** *Vantagens e desvantagens.*
>
> **Helena:** *Olha aí, poupança. Nós fizemos isso aí!*
>
> **Stella:** *Nossa! Nós somos muito inteligentes.*
>
> **Helena:** *Vai, Stella, preenche aí então as vantagens e desvantagens. (ÁUDIO, 22/10/2018)*

Sendo assim, elencaram as vantagens e desvantagens que seguem:

Quadro 01 – Registro dos alunos sobre as vantagens e desvantagens da poupança

Vantagens:	Desvantagens:
Acréscimo ao valor que você tem Rende em torno de 6% ao ano. Depósito não obrigatório	Não pode utilizar o dinheiro antes do tempo indicado.

Fonte: Registro dos alunos, 2018.

Fica claro, nesses excertos, que, para avaliar a opção da poupança, inicialmente, o grupo não se preocupou em fazer cálculos. Eles lançaram mão de experiências cotidianas, externas à escola, para tirar suas conclusões. A direção tomada pelo grupo revela como, para esses alunos – e, talvez, para suas famílias –, a análise de uma opção de financiamento não requer a mobilização de cálculos ou ferramentas matemáticas. Ao notar essa situação, estabeleci o seguinte diálogo com o grupo, logo no início da atividade:

> **Professora:** *Mas aí, tudo bem. Vocês estão colocando as vantagens e desvantagens abertas assim. Mas não esqueçam que no final, o que que vocês vão ter que fazer? [...] O que está pedindo no final? Vocês vão ter que fazer o quê?*
>
> *Ana: Ajudar ela (Carol) a tomar a melhor decisão.*
>
> **Professora:** *Então, quando vocês falam: vai ter um lucro. Tudo bem. Mas se vocês já leram os outros, os outros também têm um lucro. Só que também tem uma questão de risco em todos eles. Então, pensando no valor que eu vou ter de lucro e pensando em questão de riscos, o que que vale mais a pena? (ÁUDIO, 22/10/2018)*

Refletindo sobre esse diálogo, percebo que eu tentava ajudar os alunos a entenderem a importância da matemática na análise de situações que envolvem finanças. Isso vai ao encontro da educação financeira, que visa a um trabalho conjunto entre a matemática e as reflexões sobre prioridades, as necessidades de gastos, o funcionamento do sistema financeiro, entre outras. O fato de o grupo se apoiar, inicialmente, apenas em argumentos qualitativos deixa claro que os alunos não compreendiam a importância da matemática nessa atividade, e achavam que ela fosse desnecessária. Quando os alunos retornaram ao trabalho, depois da minha intervenção, uma das falas de Stella, inclusive, foi nesse sentido: "Só que tem que ter contas. Eu não entendi onde contas entra nisto". O resgate dessas falas deixa claro que, para o grupo, a matemática aprendida na escola pertencia a um mundo separado da situação cotidiana de tomar decisões vinculadas a dinheiro.

Após discutir com eles sobre a necessidade do uso da matemática, eu os deixei para que dessem continuidade, porém o grupo me chamou, dizendo que não sabiam que conta fazer. Explorei com eles, então, o enunciado da poupança, ajudando-os a calcularem o montante inicial e o montante final para os primeiros meses do investimento. Foi assim que eles fizeram os cálculos mês a mês, como segue no episódio abaixo:

> **Professora:** *Quanto a Carol vai investir?*
>
> **Henrique:** *10 200*

Professora: *No segundo mês vai ter quanto?*

Stella: *Mais 300.*

Professora: *Vai ter quanto no segundo mês?*

Henrique: *10 200 mais 300.*

Professora: *Tá, agora sim. Mais? Lembra aquela continha que vocês fizeram das taxas? Ela vai ser cobrada em cima do valor do mês?*

Ana: *Anterior.*

Professora: *Então quanto vai ficar?*

Henrique: *É em cima do 10 200, né?*

Professora: *Isso.*

Henrique: *Mais 51.*

Ana: *10 551.*

Professora: *Isso. Agora terceiro mês. Ela vai ter quanto?*

Henrique: *10 551.*

Professora: *Mais?*

Henrique: *O que rendeu.*

Professora: *Que foi quanto?*

Henrique: *52,75.*

Professora: *Só isso?*

Stella: *Mais 300.*

Professora: *Soma tudo e continua. (ÁUDIO, 22/10/2018)*

Nesta intervenção eu fui quem orientou os alunos no procedimento matemático necessário para calcular os sucessivos montantes. Hoje percebo que, embora eu os tenha ajudado a realizar a "conta que tinham que fazer" – como Stella me disse –, não sei se minha intervenção os ajudou a compreender o porquê desse procedimento ou a importância de realizar esses cálculos. Como professores de matemática, estamos muito acostumados a orientar e explicar formas de manipular números para chegar a um dado resultado. Contudo, estamos menos acostumados a discutir com os nossos alunos os fundamentos ou a importância de desenvolver tais manipulações.

Novamente os deixei trabalhando sozinhos para que calculassem o rendimento do CDB. Eles iniciaram, seguindo a mesma lógica da poupança. Porém, em uma das minhas passagens pelo grupo, eu os questionei sobre o rendimento do CDB, que era diário. Eles concluíram que, nesse caso, o mais viável seria o uso da fórmula de juros compostos que tínhamos estudado no primeiro bimestre. Fiz algumas intervenções, a fim de ajudá-los a compreender a aplicação da fórmula, e eles deram sequência à atividade.

O tempo continuou passando e, na minha sala de aula, fui atendendo ao resto dos grupos. Voltei a esse grupo algumas vezes, perguntando se tinham dúvidas, mas sempre diziam que não e que já estavam concluindo o conselho final. Como eu sabia que já haviam trabalhado com as opções da poupança e do CDB que, no meu olhar como professora, eram aquelas que requeriam a utilização de ferramentas matematicamente mais complexas,

me dei por convencida de que realmente não havia dúvidas e não voltei mais ao grupo.

Porém, na socialização, tive a grande surpresa. Os alunos haviam negociado, como conselho final para Carol, a opção 4, que era o investimento imobiliário, ou seja, a compra de um terreno. Na sua apresentação, o grupo não usou nenhum argumento matemático para justificar a decisão. Disseram apenas que o terreno poderia ser vendido, depois, por um valor maior. O posicionamento deles foi questionado por mim e pelos colegas e, uma vez que não tinham maiores argumentos, eles decidiram por trocar a opção, escolhendo a poupança. Essa decisão também não parece ter sido tomada com base em reflexões quantitativas: o rendimento da poupança definido pelo grupo era de R$ 14.153, 69, enquanto o do CDB, era de R$ 14.488, 22. Portanto, o investimento mais rentável era o CDB, embora a diferença fosse pouca. Revisitando os registros dos grupos, novamente pude perceber que essa decisão podia estar relacionada com as experiências de Stella que, durante o trabalho, contou aos colegas que, vários anos atrás, seu pai havia aberto uma poupança para ela.

Sendo assim, a forma de participação desse grupo revela que as dificuldades, tanto para lidar com a matemática quanto para enxergar a importância da relação – e a relação em si – da matemática com o cotidiano, levaram o grupo a dar uma maior ênfase qualitativa à análise de cada opção, o que os levou a um conselho final que não havia sido previsto por nós, professores do subgrupo, e que me causou surpresa e certo desconforto, levando-me a refletir posteriormente sobre o quão rico se mostrou aquele cenário para discussões e, ao mesmo tempo, o quão complexo ele era.

Considerações finais

Na presente narrativa busquei apresentar a trajetória de um grupo de alunos que participaram das aulas exploratório-investigativas de educação financeira e refletir sobre suas negociações e sobre os desafios que esse cenário me trouxe, como professora.

O percurso que o grupo percorreu revela que eles seguiram por uma linha de análises basicamente qualitativa. Suas experiências e vivências provenientes do cotidiano ganharam maior espaço nas negociações deles, levando-os a usar como argumento, para sua escolha final, o empréstimo com um agiota. Esse episódio mostra o quão complexo é o processo de articulação e ressignificação de práticas vinculadas com as finanças, provenientes das experiências cotidianas e da sala de aula. O mundo da escola e o mundo de fora da escola costumam ser mundos separados, e construir pontes entre eles não é tarefa simples para o professor. As práticas provenientes da vivência familiar de uma das alunas do grupo prevaleceram entre eles até o momento da apresentação para os colegas. Na socialização, quando foram interpelados pelos seus colegas e por mim sobre recorrer a esse tipo de práticas, o grupo renegociou seu conselho final. Porém, fica a dúvida de se essa discussão foi suficientemente aprofundada, a ponto de produzir mudanças nas percepções dos alunos sobre o sistema financeiro legal e ilegal. A desconfiança nos bancos é um fator que permeia as decisões financeiras de muitas famílias brasileiras e, muitas vezes, leva-as a optar pelo mercado ilegal. Por outro lado, hoje percebo que, nas minhas intervenções no grupo, centrei-me mais em orientar o processo de cálculo dos montantes finais e deixei um

pouco de lado a discussão em torno de por que era importante realizar esses cálculos. Por exemplo, poderia ter feito intervenções para ajudá-los a interpretar os resultados desses cálculos: Qual investimento rende mais? Qual é a diferença entre eles? Esse tipo de esforço analítico talvez tivesse contribuído para que eles ressignificassem o processo de cálculo de juros compostos – frequentemente entendido como um procedimento puramente escolar – e compreendessem sua importância para interpretar uma situação real, conectando, assim, o conceito matemático com o mundo de fora da escola. Também poderia ter ajudado a realizar algumas intervenções, visando "matematizar" os investimentos em dólar e na compra do terreno, com perguntas tais como: Quanto dinheiro será que ela ganharia, se tivesse comprado o dólar a R$ 3,721 e um mês depois o tivesse vendido por R$3,952? O que será que aconteceria, se, depois de ter comprado, o dólar tivesse baixado para R$3,675? Quais são todos os gastos envolvidos na compra do terreno?, etc.

Depois dessas análises e de ter vivido e vibrado com meus alunos dentro da sala de aula, considero que a tarefa oportunizou uma primeira chance para que eles explicitassem suas vivências cotidianas vinculadas ao dinheiro e, gradativamente e com bastante esforço, começassem a perceber que a matemática também tem alguma coisa a dizer a respeito dessas questões. Ainda é necessário trilhar um longo caminho, mas a implementação da tarefa pode ser considerada um primeiro passo. Além disso, as negociações do grupo e os argumentos que eles utilizaram mostram a importância de abrir um espaço no currículo para educação financeira, uma vez que este tópico não faz parte, diretamente, do conteúdo escolar. A matemática financeira, em si, aparece no currículo, como aplicação de PA ou PG, através de problemas que envolvam juros simples ou compostos, porém não existe um espaço privilegiado para essas discussões tão ricas e importantes (SARKIS, 2020).

Outro ponto relevante a se destacar é o grande desafio que as aulas exploratório-investigativas me impuseram, em relação à imprevisibilidade. A proposta dos alunos de fazer um empréstimo com um agiota foi algo inesperado e que exigiu uma resposta rápida e imediata. Realizar intervenções é um processo complexo. Exige preparação do professor – no sentido de estudar e refletir sobre a tarefa que será proposta – e prática, para adquirir experiência, ao implementar aulas exploratório-investigativas ao longo do tempo (SARKIS, 2020).

Porém, não é possível prever cem por cento dos questionamentos e das respostas dos alunos. Para essa tarefa, durante a etapa de problematização e planejamento, nós, membros do subgrupo do Ensino Médio, elaboramos uma tabela em que apontamos possíveis interrogações e intervenções, a fim de auxiliar na condução das aulas. Contudo, ainda assim, surgiram situações inesperadas, como a do agiota, que me deixou bastante desconfortável, pois não me sentia preparada para abordá-la, devido a sua complexidade. Trabalhá-la em profundidade na sala de aula teria significado assumir múltiplos riscos, tanto com meus alunos, com seus pais e até mesmo com a direção da escola (SARKIS, 2020). Isso me levou a questionar apenas sobre a taxa de juros, sem abrir espaço para maiores reflexões. Porém, hoje percebo que esse cenário teria sido muito rico para outras negociações de significados.

Enfim, esta narrativa nos permite perceber o cenário complexo e rico que surge,

ao trabalharmos com aulas exploratório-investigativas. Elas permitem aos alunos recorrer às suas vivências cotidianas e, aos poucos, começar a construir pontes que as conectem com a matemática escolar. Ao mesmo tempo, oportunizam revelar a eles a importância dessa matemática para seu dia a dia. Além disso, a presente narrativa nos permite refletir sobre a importância de planejar nossas aulas, pensando nos possíveis questionamentos dos estudantes, mas estando abertos à imprevisibilidade que essas aulas contemplam.

Referências

FIORENTINI, D. Grupo de sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M. (org.). *Histórias e investigação de/em aulas de matemática.* Campinas, SP: Alínea, 2006.

SARKIS, J. *Aprendizagens de alunos que participam de aulas exploratório-investigativas com foco na educação financeira.* Dissertação (Mestrado Profissional) – Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2020.

APÊNDICE 3

Apresentação

Essa tarefa foi planejada no *Terceiro Ciclo do Lesson Study* e teve a Educação Financeira como tema. Foi elaborada para alunos da 1.ª série do Ensino Médio. Teve como objetivo envolver o aluno em um cenário de Educação Financeira, para que ele explorasse um recorte de uma prática matemática relacionada ao sistema financeiro brasileiro. Assim, buscávamos que o aluno comparasse informações, fizesse cálculos – compreendendo principalmente juros compostos – e traçasse estratégias que sustentassem boas escolhas financeiras.

Antes de iniciar a tarefa propriamente dita, fizemos uma tarefa introdutória com o seguinte enunciado: "Para iniciar este trabalho, escreva dez palavras que você considera importante saber para estudar Educação Financeira". Nesse momento, coletamos as ideias iniciais que os alunos tinham sobre o tema. Usamos o recurso de nuvem de palavras para sistematizar os apontamentos feitos pelos alunos e fizemos uma roda de conversa para alinhar as práticas comuns e alguns conceitos de Educação Financeira.

Em seguida, apresentamos a tarefa que descrevia o perfil de dois personagens fictícios: Carol e Fernando.

Enunciado da tarefa

CAROL E SUAS ECONOMIAS

Carol é uma jovem de 19 anos. Ela começou a trabalhar aos 16 anos em um projeto social de jovem aprendiz, em uma empresa da cidade. Trata-se de um programa social que tem o objetivo de inserir jovens no mercado de trabalho, para que eles tenham sua primeira experiência de emprego e identifiquem suas habilidades e gostos, para percorrerem a carreira profissional. Esse trabalho prevê um salário mensal referente ao valor do salário mínimo, porém, uma taxa de 30% fica com a agência de empregos. Embora seu salário não fosse muito alto, naquela época era suficiente para pagar seus gastos.

Sempre dedicada, Carol foi efetivada no início de 2017, em uma vaga de Assistente Administrativo, na mesma empresa. Como funcionária efetiva da empresa, suas responsabilidades aumentaram. Contudo, o seu novo cargo também prevê vários benefícios: vale alimentação, plano de saúde e plano odontológico. Além disso, recebe um salário de R$1662,57. Com esse novo salário ela percebeu que todo mês sobravam R$600,00 na sua conta corrente.

No começo de 2018, Carol decidiu iniciar um curso superior de Tecnologia em Processos Gerenciais, que tem duração de dois anos. Apesar de ser um curso gratuito, Carol reorganizou seu orçamento de modo a cobrir os gastos com transporte para ir e vir da faculdade, com alimentação (pois sai do serviço e vai direto para a faculdade) e com materiais como livros e fotocópias.

Nesse novo cenário, Carol percebeu que tem sobrado em torno de R$300,00 por mês desde o começo do ano, e se deu conta de que o montante de dinheiro na sua conta está começando a ser alto. Deixar todo esse dinheiro se acumulando na sua conta não parece ser a melhor opção. Então, Carol começou a estudar opções eficientes para investir seu dinheiro. Ela está considerando as seguintes opções:

Opção 1: Poupança

A poupança é um tipo de investimento muito antigo e de baixo risco. Rende em torno de 6% ao ano. Não tem periodicidade de investimento, ou seja, não é necessário depositar dinheiro todo mês. Contudo, a poupança tem mêsversário, se o investidor fez seu depósito dia 5 de um mês, o rendimento mensal mensal só será compensado no dia

5 do mês seguinte; se o investidor retirar o dinheiro antes do dia 5, não será embutido nenhum acréscimo no valor.

Opção 2: CDB

Uma outra opção oferecida pelos bancos, de baixo risco, é o CDB (Certificado de Depósito Bancário). Para fazer esse tipo de investimento, você deve investir inicialmente pelo menos R$500,00. Esse investimento não tem periodicidade, ou seja, não precisa colocar valores todos os meses. Uma vez feito o investimento, você pode acrescentar qualquer valor a qualquer momento. O CDB tem rendimento diário e pode ser resgatado a qualquer momento; inclusive, há a opção de resgate automático, ou seja, se você fizer algum gasto que exceda o saldo da sua conta corrente, o próprio sistema já resgata o valor necessário desse fundo. Rende em torno de 8% ao ano. O investidor tem que pagar Imposto de Renda sobre o rendimento no momento que faz o saque, e aqui há uma grande variável, o valor de imposto a ser pago depende do tempo que o dinheiro foi investido:

Tempo de Permanência	Alíquotas Regressiva
Até 180 dias	22,5%
De 181 a 360 dias	20,0%
De 361 a 720 dias	17,5%
Acima de 720 dias	15,0%

Opção 3: Comprar Dólares

Uma outra opção é pensar em câmbio de moeda, usando o dólar. O dólar é a moeda de referência internacional. No Brasil, os bancos ainda não oferecem a opção de conta em dólar. Portanto, quem compra dólares deve armazená-los por conta própria.

O dólar comercial é o valor que o mercado financeiro estabelece para transações de comércio exterior e movimentações financeiras feitas por empresas, como importações e exportações. O seu valor oscila bastante, variando instante a instante, como podemos ver no gráfico relativo ao dia 11/10/2018:

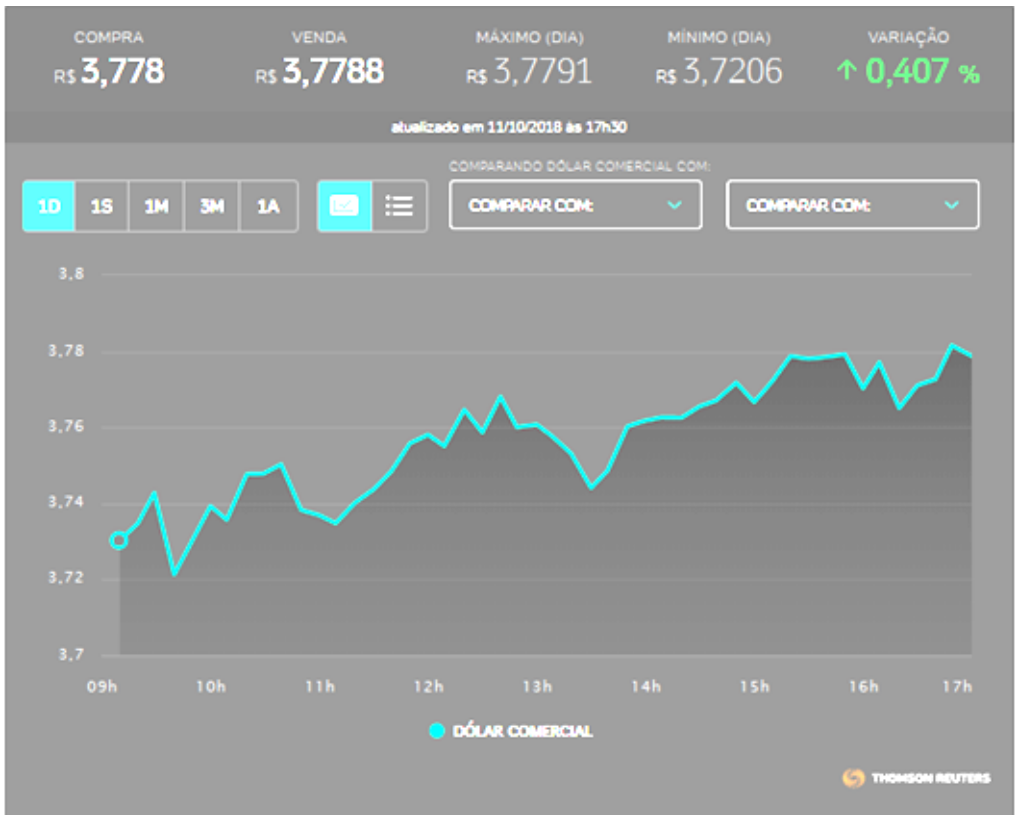


Gráfico extraído do site do Uol, em 13 de outubro de 2018, às 16h31

Nesse site, você pode consultar a variação do dólar comercial no dia, em uma semana, um mês, três meses, ou

um ano. Dessa forma, é possível acompanhar as oscilações dessa moeda em relação à moeda Real.

Gráfico extraído do site do Uol, em 13 de outubro de 2018, às 16h31

O dólar que as pessoas físicas conseguem comprar é o dólar turismo, ele é baseado no valor do dólar comercial e inclui alguns custos, como importação, logística e estoque. Há diversas casas de câmbio onde é possível adquirir papel moeda e também, vender. No site https://www.melhorcambio.com/cotacao/compra/dolar-turismo/sao-paulo é possível consultar os melhores valores para a compra e venda do dólar turismo. Para o dia 13/10/2018, temos as seguintes cotações:

Compra: R$ 3,96, com IOF incluído.
Venda: R$ 3,77, com o IOF incluído.

Para comprar, é preciso entrar em contato com a casa de câmbio e fazer um cadastro com apresentação de documentos pessoais.

Opção 4: Investimento Imobiliário

Tem um novo loteamento na cidade, que está vendendo terrenos para pagamento parcelado. Ao fazer a compra do terreno ainda na planta, antes da construtora executar a infraestrutura, como asfalto, rede de águas pluviais, encanamento de água, esgoto, etc., consegue-se um preço melhor do terreno, porém, até que as obras de infraestrutura fiquem prontas, não é possível construir.

Quando Carol foi visitar a construtora, lhe ofereceram um terreno de 8 metros de frente e 20 metros de comprimento, por R$ 70.000,00 à vista. Ofereceram-lhe, também, outra opção de financiamento: entrada de R$ 8.000,00 e o restante financiado em 16 anos com parcelas mensais de R$ 575,00.

Se ela fizer essa opção, deve incluir gastos iniciais com documentação, em torno de R$1000,00. Ademais, todo ano deverá pagar IPTU (Imposto Predial Territorial Imobiliário) de R$300.

Depois que a infraestrutura estiver terminada, espera-se vender o terreno por um valor maior, pois prevê-se a valorização, segundo a demanda do mercado imobiliário.

Sem saber o que fazer, ela procurou uma ajuda: a de vocês! Cada uma dessas possibilidades reserva suas particularidades - prós e contras. Cabe a vocês, com base nas informações acima, ajudar Carol a tomar a melhor decisão. Para isso:

1. Analisem as vantagens e desvantagens de cada uma das opções que Carol está considerando. Indiquem, nas folhas que serão entregues, os motivos que sustentam seus argumentos.
2. Após essa análise, emitam um conselho final por escrito para a Carol.

FERNANDO E SUA MOTO

Fernando tem 20 anos, mora e trabalha em Vinhedo, é operador de caixa de um supermercado, ganha um salário líquido de R$1245,83 por mês. Ele sonha em comprar uma moto, mas infelizmente ainda não conseguiu guardar o dinheiro suficiente.

Perante essa situação, Fernando resolveu analisar seu orçamento durante dois meses. Comprou uma agendinha e anotou todos os gastos:

- Ajuda sua família pagando as contas de luz (+/- R$170,00) e um plano de internet + TV + telefone fixo (R$169,80).
- Paga R$55,99 pelo seu plano de celular.
- Gasta +/- 100 com transporte coletivo.
- Cada final de semana que sai com os amigos gasta em média R$50,00.
- Há um ano e meio vem depositando, mensalmente, R$200,00 na poupança, o que rende 0,5% a.m.

Após essa análise, Fernando foi até uma concessionária para pesquisar diferentes formas de adquirir sua moto. Conversando com o vendedor, decidiu que o modelo Neo 125 da Yamaha estaria de acordo com as suas necessidades. O valor da moto é de **R$ 9 163,00** existindo as seguintes condições de pagamento:

Opção 1: Pagamento à vista

A concessionária tem algumas motos desse modelo em estoque. Para comprar uma dessas motos à vista o vendedor oferece um desconto. Nesse caso, o valor da moto é de R$ 8800,00.

Opção 2: Financiamento com entrada de R$ 3000,00

A concessionária também oferece a possibilidade de dar uma entrada de R$ 3000,00 e financiar o restante em três opções diferentes:

12 parcelas de R$ 650,03 ou
18 parcelas de R$ 459,04 ou
24 parcelas de R$ 363,77

Opção 3: Financiamento sem entrada

Sem dar nenhuma entrada a concessionária oferece duas opções de financiamento:

18 parcelas de R$ 669,77 ou
24 parcelas de R$ 530,76

Opção 4: Consórcio da moto

O consórcio é outra opção de compra da moto, sem entrada. Um grupo de pessoas, reunidos pela concessionária ou administradora, pagam uma parcela fixa por mês. O valor arrecadado a cada mês corresponde ao valor de uma moto. Todo mês uma moto é sorteada e outra é contemplada por lance. Quem é sorteado retira sua moto e continua pagando as parcelas. Quando uma pessoa faz um lance, ela oferece pagar uma quantia de dinheiro além da parcela mensal. Quem oferecer o lance maior, retira sua moto e tem as parcelas restantes com esse valor abatido. Para fazer um lance é preciso contatar a concessionária.

A concessionária oferece a opção de consórcio, com o pagamento de 24 parcelas de R$ 449,29.

Fernando terá outros gastos com a compra da moto:

1. Gastos no momento da compra:

- **Documentação** (primeira placa, IPVA parcial, licenciamento e seguro obrigatório): entre 500 e 600 reais
- **Capacete:** a partir de 70 reais

2. Gastos a partir do ano que vem:

- **Seguro obrigatório anual:** 180,65 reais
- **IPVA:** 2% do valor da Tabela FIPE (+/- R$90,00)
- **Licenciamento:** R$ 80,00

Fernando estima que irá gastar em torno de R$10,00 com combustível por semana.

Sem saber o que fazer, ele procurou uma ajuda: a de vocês! Cada uma dessas possibilidades reserva suas particularidades - prós e contras. Cabe a vocês, com base nas informações acima, ajudar Fernando a tomar a melhor decisão! Para isso:

1. Analisem as vantagens e desvantagens de cada uma das opções que ofereceram para a Fernando. Indiquem, nas folhas que serão entregues, os motivos que sustentam seus argumentos.
2. Após essa análise, emitam um conselho final por escrito para Fernando.

Orientações para o professor

A tarefa foi desenvolvida para ser aplicada em grupos de quatro alunos. A preparação do material de sala de aula foi realizada pelo professor com antecedência.

Cada aluno recebeu uma folha do enunciado e cada grupo recebeu uma folha com lugares destinados aos cálculos para cada uma das opções e uma tabela para sistematizar as vantagens e desvantagens daquela escolha.

O professor também preparou gráficos e tabelas, em tamanhos maiores, com o histórico da variação do valor do dólar em diferentes períodos (dia, semana, trimestre, ano).

POSFÁCIO

Eliane Matesco Cristovão

Fiz parte do GdS de 2003 a 2011 e continuei com uma participação periférica, via *email,* por alguns anos ainda. Nesse período, passei da condição de professora da educação básica a formadora de professores. Boa parte do desenvolvimento profissional que alcancei é, sem dúvida, fruto de minha participação no GdS.

Essa participação transformou minha prática de professora e também me tornou uma formadora que se preocupa com a perspectiva de formação adotada. Acredito e aposto nas práticas colaborativas e numa perspectiva de formação contínua de professores, que "junta tudo numa coisa só" (Teatro Mágico), por meio de projetos de extensão e também em disciplinas, nas quais professores experientes e futuros professores buscam articular teoria e prática, universidade e escola.

Minha constituição, pessoal e profissional, se deu narrativamente, por meio das tantas narrativas escritas no GdS. Assumo essa perspectiva em minha dissertação e em minha tese, e esse talvez tenha sido um dos motivos para este convite.

Quando fui convidada a escrever este posfácio, logo pensei: Nossa, que delicia, reviver o GdS pela leitura atenta de sua mais recente produção. Mais tarde, com o livro já em minhas mãos, comecei a ficar preocupada. Conseguiria eu apreender todo o valor desta obra para escrever um posfácio?

Tentei, do fundo do meu coração, pois realmente revivi o GdS nessa leitura. E a leitura deste livro não só me permitiu reviver o GdS como compreender o quanto o papel dele, embora se renove sempre, é cíclico. Percebi um novo GdS, com uma nova formadora, a doce Leticia, de reflexões profundas e situadas, que conheci na minha banca de doutorado e que ajudou a implementar no GdS novos referenciais (*LSH*, Aprendizagem Situada, Cenários investigativos). Mas, nesse novo ciclo, algo parece se repetir... Percebo, novamente, professores iniciantes, experientes, tradicionais ou já inovadores repensando suas práticas e transformando suas identidades por meio da escrita. Enfim, se desenvolvendo profissionalmente. Então, optei por concentrar este posfácio em dois pontos-chave com os quais o GdS lida: pessoas e aprendizagens.

Sobre pessoas, suas aprendizagens e seu desenvolvimento profissional

Conheço a Thaís desde que ela fazia graduação na Unicamp e algumas vezes participava do GdS. Ela sempre se destacou pelas práticas inovadoras, com uso de tecnologias

e até pela criação de aplicativos no Geogebra. Mas a vejo, neste livro, numa busca constante e profunda por compreender a complexidade da prática.

Ao vivenciar uma das fases do *LSH*, Thaís observa como os alunos se movimentam, como acompanham as ações da professora que podem favorecê-los, como se organizam para buscar regularidades. Experiência única que todo professor precisaria passar, para realmente compreender a complexidade da prática docente. O *LSH* possibilitou, às professoras, vivências que elas, assim como eu, não tiveram em sua formação inicial (hoje temos, por exemplo, programas como PIBID e Residência Pedagógica), mas o *LSH* é diferente, pois são duas professoras experientes dialogando sobre suas práticas, ao observarem uma a aula da outra. Lendo um pequeno trecho desse capítulo, me lembrei do ditado, que seria uma resposta ao poema inicial do livro: Não, realmente não há caminho pronto, mas uma coisa é certa: se quer ir rápido, vá sozinho, mas se quer ir longe, vá em grupo [colaborativo]!

> *Viver essa tarefa sozinha não permitia a Thaís avançar nas questões que ela tinha. Refletir sobre a experiência vivida pela Thaís durante o 1.º ciclo do LSH nos permitiu perceber como as diferentes participações ampliavam as lentes para olhar para essa tarefa. (Thaís e Cristina)*

O caminho é árduo, mas será mais produtivo, se for em grupo! Professores, juntos, percebem complexidades e descobrem possibilidades de outras práticas.

E Thaís não para por aí. A narrativa em que ela se mobiliza para analisar as produções dos alunos mostra seu empenho em compreender as complexidades dessa prática, por meio das produções dos alunos. Ali não se percebe tanto a interlocução com o outro, mas consigo mesma. Mergulhar nas próprias interpretações sobre o que os alunos produzem é uma forma potencial de desenvolvimento profissional e não desvaloriza a vivência colaborativa, que dá suporte para essas análises mais individuais.

Para se desenvolver profissionalmente, também é preciso percorrer um longo caminho. Salgado, a professora que conheci quando ainda fazia parte do GdS, por volta de 2010, se destaca como um dos maiores exemplos de desenvolvimento profissional que conheço, via GdS. Ao começar a ler a narrativa dela, me lembrei dos nossos contatos iniciais no GdS. Professora experiente, de sorriso fácil, atenciosa e muito carismática. Num dos primeiros encontros de que ela participava, minha narrativa foi lida e, após muitas críticas e sugestões de alterações, Salgado, indignada, se expressa, dizendo que, para ela, não precisava mexer em nada, a narrativa estava perfeita! Fiquei pensando... quantas versões teve a narrativa dela e como ela, hoje, faria uma leitura muito mais crítica da minha. Isso se aprende com o tempo no GdS!

O prazer de ler a narrativa da Salgado está na sua possibilidade de dar a ver a transformação da professora que conheci em 2010 na professora-pesquisadora que ela se tornou. Ver a Salgado analisando um diálogo entre os alunos, e entre ela e os alunos, a partir de um esquema analítico, com referencial teórico, é simplesmente emocionante!

E eu, professora pesquisadora, formadora de professores, como leitora me vejo

aprendendo matemática com ela. Nunca parei para pensar que o que faz uma razão deixar de ser fração é o fato de ela poder ser composta por números que não são inteiros... É um detalhe, insignificante, mas que pode fazer toda diferença, ao dialogarmos com os alunos, futuros professores, sobre as "personalidades" dos números racionais. Quanta matemática aprendemos lendo narrativas de aula, independente do nosso nível de atuação! E é assim, nunca estamos prontos.

Quanto mais me aprofundava na leitura, mais me deliciava com estas percepções... E a Salgado me conta, em poucas palavras, sobre a sua nova identidade: "ampliei minha postura investigativa, ao ter que fazer e refazer diferentes versões para essa narrativa, a fim de esclarecer, esmiuçar cada fato mencionado". O GdS transforma nossa identidade profundamente!

Quando comecei a ler os escritos de Juliet, mais uma vez, me vi... Lendo sua narrativa, pude fazer um paralelo com minhas próprias mudanças, desde a entrada no GdS. Naquela época, eu era a professora tradicional que começava a conhecer as Investigações Matemáticas. Que só levei para a sala de aula a abordagem exploratório-investigativa porque tive um parceiro espetacular, o Fernando, na época licenciando, que desenvolvia uma iniciação científica sobre as Investigações Matemáticas. E essa experiência me tornou ainda mais incomodada com a minha própria prática. E também me levou ao mestrado, como a Juliet, buscando investigar os efeitos da abordagem exploratório-investigativa para evitar processos de exclusão escolar.

Juliet, quase 15 anos depois (2003 -2017) percorre um caminho muito parecido. Seu texto foi um dos que mais me fez reviver e refletir sobre o início de minha participação no GdS. Assim como Juliet, eu também era uma professora experiente que "já me via como professora encaixada naqueles moldes e pensava não poder ser diferente". Mas diante dos questionamentos e dificuldades dos alunos, também "optei por sair da minha zona de conforto, como professora de uma prática mais tradicional e buscar novos meios para o ensino e aprendizagem da matemática".

Mas essa não é uma tarefa fácil, e Juliet mostra isso. É preciso coragem para se expor, se você realmente quer mudar práticas.

> *Ainda não me sentia segura para implementar uma aula dessas nas minhas turmas. Não entendia como seria possível passar uma tarefa e deixar que os alunos a resolvessem sem explicar o conteúdo antes, muito menos como seria possível sistematizar várias respostas diferentes (Juliet).*

Juliet encontrou no GdS "um espaço aberto ao novo e a novos membros, e me identifiquei com ele". Quando cheguei ao GdS, em 2003, também senti esse acolhimento, mas como membro, percebia que nem todos se identificavam, ou então, não aceitavam mudanças. Participar do GdS, no início, exige se identificar. Permanecer por muito tempo exige mudar com ele, adaptar-se, passar, como analisa Juliet, de uma participação periférica para uma participação legítima!

Mas nem todos os que saem o fazem por não se adaptar, mas porque o GdS também tem limites. Eu saí quando o meu papel de formadora ultrapassou os limites do GdS, quando percebi que podia compor outros espaços formativos como aquele, e isso aconteceu com outros colegas também.

E Juliet abre as portas de sua sala de aula também, mostrando que o ensino de matemática vai muito além do conteúdo. Ela nos apresenta uma realidade complexa, com a qual convivemos, mas que, poucas vezes, tomamos como objeto de análise e reflexão. O cotidiano de nossos alunos, muitas vezes, é inatingível por nós, por mais que planejemos e nos preparemos. Mas a escuta sensível, como tão bem ilustrou Juliet, permite esses encontros, entre o professor e o aluno. Mas vale ressaltar que isso não ocorre em qualquer cenário! A opção do grupo pela abordagem exploratório-investigativa foi essencial para fazer emergir esse encontro e essa escuta.

E sobre a escrita de narrativas... mais uma vez, concordo com Juliet, pois não me vejo pesquisadora sem antes ter pesquisado e refletido sobre minha própria prática por meio da escrita de narrativas. Como afirma Juliet,

> *isso tudo só percebo hoje, enquanto escrevo essa narrativa. Por ter sido uma primeira experiência e estar tão envolvida e ainda bastante perdida, não conseguia ver de fato o potencial da elaboração colaborativa de uma tarefa exploratório-investigativa, tampouco o alcance deste tipo de tarefa.*

Assim, o que se pode perceber é que essa escrita funciona como catalizadora do processo de transformação da prática, tendo em vista que potencializa as reflexões do professor sobre suas próprias aprendizagens, ou seja, possibilita a metacognição!

Para falar da Ana Paula, não se pode começar por aspectos profissionais. Mesmo que nosso contato pessoal ocorra apenas virtualmente, afirmo com toda certeza que ela é simplesmente maravilhosa. Mãe mais que exemplar, que lutou para manter seu filho vivo, contra todas as probabilidades, e agora luta para que ele avance em suas aprendizagens. Convivi pouco com ela, mas, por tudo que ela já produziu, eu a reconheço como uma professora e pesquisadora experiente, segura de si a ponto de afirmar que "essa apropriação crítica refere-se ao nosso processo de identificação com a tarefa, no qual nos posicionamos como autoras e a transformamos."

Sim, ela é assim mesmo, mulher negra, linda e poderosa, capaz de enxergar as potencialidades de uma tarefa e também de se posicionar criticamente, assumindo-se como autora. Ela é assim na vida e na profissão.

A apropriação da tarefa tem fortes traços da autoria de Ana Paula, cuja experiência docente e de pesquisa já havia possibilitado a ela "uma ressignificação do conceito de Função, constatando que seu papel essencial em diversos fenômenos físicos poderia ser melhor aproveitado nos processos de ensino e aprendizagem".

Ana Paula junto com Leticia revelam suas disponibilidades em trabalhar colaborativamente, respeitando o outro, suas escolhas e suas ideias, ao afirmarem que "o

trabalho colaborativo ia revelando as potencialidades da tarefa e as consequências dessas mudanças nas oportunidades de aprendizagem que planejávamos para os estudantes".

Ambas percebem e valorizam a riqueza que a abertura da tarefa propicia, ao possibilitar aos próprios alunos construírem as tabelas, em vez de apresentar modelos prontos. É um detalhe sutil, mas que provoca toda diferença na condução da prática. Além disso, a narrativa retrata as possibilidades da interação online, uma marca forte da Ana Paula, entrelaçada a uma prática que não era dela, criando uma nova perspectiva de atuação docente, informada pelas práticas culturais e pela tecnologia, enriquecida com problematizações que agregaram mais significado ao processo de ensino e à aprendizagem dos alunos.

Falar da Cláudia, a princípio, parecia ser meu maior desafio, pois não a conheço pessoalmente. Não temos um elo de ligação via GdS, pois não convivemos em tempos comuns. Entretanto, sua análise possibilitou um verdadeiro mergulho no processo formativo vivenciado no terceiro ciclo do *LSH*. Possibilitou compreender nuances desse processo e valorizar o ato de se conduzir, de forma sensível e cuidadosa, cada etapa. Todo esse processo é o que permite ao professor, como bem observou Cláudia, "sair de um ciclo com alguns aspectos modificados em relação à nossa prática e ao nosso conhecimento". E eu diria, como Thaís, que são muitos aspectos, de uma riqueza enorme!

E Cláudia aponta o cerne dessa discussão, ou seja, a importância de "entender que o que melhora as intervenções dos professores é justamente todo o processo de aprendizado e de estudo do professor que antecede a implementação da atividade em sala de aula".

Ela ainda resume, em uma frase, todo esse processo:

> *O professor estuda, reflete e conta com a ajuda do grupo no qual está envolvido para se formar primeiro, antes de ir para a sala de aula com uma atividade a ser aplicada. Após implementar uma tarefa, volta o seu olhar para a sua própria prática, sem medo de compreender os pontos em que ainda precisam de ajustes e assim, vai melhorando a sua atuação a cada novo movimento auto reflexivo realizado.*

Confesso que fiquei com vontade de conhecer pessoalmente a Cláudia, por sua perspicácia e sensibilidade, e você, leitor?

E são muitas as aprendizagens, agora analisadas a partir do meu lugar de formadora

Ao ler a narrativa sobre a criação da Tarefa 3, a partir das Tarefas 1 e 2, durante o primeiro ciclo, o leitor pode aprender sobre o valor de extrair, de cada tarefa já conhecida, o melhor; e analisar, com profundidade, os problemas que cada uma poderia gerar, para eliminar esses problemas, propondo saídas inteligentes. Como formadora, percebo que esse movimento de reelaborar tarefas a partir do estudo de outras é extremamente formativo para os professores e tem muito mais sentido quando ocorre colaborativamente.

Outro ponto extremamente relevante a ser analisado é a importância do exercício de observar a prática do outro (etapa do *LSH*). Esse exercício possibilita o distanciamento necessário para compreender os limites da própria prática e ressignificá-la, ou seja, possibilita a compreensão de "outra dimensão de complexidade da prática docente". E, como formadora, faço paralelos com minha atuação em programas como Pibid e Residência Pedagógica, em que esse distanciamento é possibilitado desde a graduação, mas percebo que, embora seja um bom ensaio, ele é diferente, pois não coloca em diálogo dois professores experientes, como relatado por Thaís e Cristina.

São muitas possibilidades de aprendizagem que essa leitura traz, seja para futuros professores, professores ou formadores. A ideia (brilhante) de utilizar fichas individuais, porém diferentes para o trabalho em grupo, pode mudar completamente nossas perspectivas de como gerir o trabalho em grupo em sala de aula. Como alertam Thaís e Cristina, "isso motiva-os a compreender o raciocínio que o colega está usando e não simplesmente copiar os valores que o colega encontrou".

Leticia também alerta sobre as profundas aprendizagens matemáticas. Mas não é uma matemática qualquer. É uma matemática fortemente vinculada com a prática docente em sala de aula. "Nesses processos de aprendizagem conseguimos ressignificar muitas noções matemáticas que estudamos durante a formação inicial, vinculando-as com a problemática do seu ensino e aprendizagem na escola" (Leticia). É a mobilização de um conhecimento especializado do professor de matemática!

Ao ler as narrativas, aprende-se o quanto diferentes práticas, entrelaçadas, podem produzir novas práticas, mais ricas de significado e com potencial muito maior de aprendizagem. Quem imaginaria que uma professora, ao repensar o ensino de função, viesse a associar o que está ensinando com seus estudos sobre derivada, no tempo da graduação? Sim, Salgado, você transformou seu olhar numa lente de aumento para nós, leitores, que pudemos compreender, a partir do seu olhar, como o movimento de articulação entre a sala da aula e um processo colaborativo de formação contínua pode promover o desenvolvimento profissional do professor.

Mas isso não acontece espontaneamente, não é uma mágica do tipo: "Formei um grupo e ele se tornou colaborativo e os professores se desenvolveram profissionalmente". Não, isso dá muito trabalho, exige dedicação de quem coordena o grupo (embora as decisões sejam colaborativas), alguém precisa formular boas propostas, promover boas problematizações e, principalmente, apresentar questões capazes de fomentar boas discussões.

E a Leticia propôs questões norteadoras excelentes, que são destacadas em vários momentos. Um deles foi no terceiro ciclo, quando ela retoma os passos já adotados nos ciclos anteriores. Mas o que mais chamou minha atenção, como formadora, foram estas questões sobre função, retiradas de uma das narrativas de Salgado:

> *1) Que tipo de funções nossos alunos deveriam conhecer para compreender melhor o mundo onde vivem?*
>
> *2) Que tipo de modelos matemáticos baseados em funções são utilizados para tomar*

decisões sobre as vidas dos nossos alunos, das suas famílias, da sua escola? Que situações poderiam evidenciá-las?

3) Quais situações, envolvendo funções, poderiam ser interessantes de apresentar aos alunos, procurando ajudá-los a reconhecer como a matemática é uma disciplina que estrutura suas vidas cotidianas?

4) Quais situações, envolvendo funções, poderiam contribuir para que nossos alunos se tornem cidadãos mais conscientes, que possam participar responsavelmente na vida democrática? (Salgado apresenta as questões feitas por Leticia)

Lindo de ver! E, ao refletir sobre essas possibilidades da colaboração, me lembro da fala de uma das professoras do grupo que coordenei, por quase dez anos. Ironicamente, ela afirmou que eu havia destruído o seu "sonho de ter um caderninho amarelo", com todas as aulas prontas. Vivenciar práticas colaborativas nos torna professores mais exigentes com nossas próprias práticas, e com sede de inovar!

Isso se reflete na narrativa de Cláudia, que, mesmo não tendo conseguido levar alguma prática para sua sala de aula, envolve-se profundamente com uma das discussões do grupo e aprende com ela, reflete sobre as possibilidades de um trabalho capaz de levar para a sala de aula mais do que conteúdo -letramento matemático –, chegando a se emocionar. A possibilidade de analisar, de forma assíncrona, os resultados de uma reunião se mostraram, para mim, como uma atividade especialmente formativa e inclusiva, no sentido de tornar legítima, por meio da escrita, até mesmo a participação de uma professora que não podia estar presente nas reuniões.

E sim, em diferentes narrativas, também encontramos opiniões diversas, pois trabalhar colaborativamente muda nossa identidade, mas não nos molda, todos, a termos uma visão uniforme. Isso pode ser percebido quando se contrapõem duas percepções sobre as aprendizagens geradas nesse contexto. Leticia valoriza a mudança de foco nas análises produzidas, afirmando que, ao invés de centrar as reflexões somente nas produções e nos diálogos dos alunos, as professoras começaram a analisar suas aprendizagens docentes no ciclo de *LSH*.

Segundo a formadora, esta mudança foi estimulada pelos múltiplos questionamentos e comentários que cada membro do sEM realizava das narrativas discutidas nos nossos encontros. Entretanto, para Thaís, o caminho parece não ter sido exatamente este. Esta análise das aprendizagens docentes, para ela, que fez uma tese baseada no estudo da própria prática, talvez fosse mais natural. O desafio estava em analisar as produções dos alunos. Ao referir-se ao 2.º ciclo do *LSH*, Thaís afirmou que "esta fase colocava importantes desafios para nós, professores, visto que tínhamos dificuldade em deixar em segundo plano nossas aprendizagens pessoais e investirmos na análise da produção feita pelos alunos".

O contrassenso entre professora e formadora faz parte da colaboração, e lidar com ele, com delicadeza, é o que faz o grupo perdurar. Não fiz esse contraponto aqui para colocar em xeque as diferentes percepções de Leticia e Thaís, mas justamente para mostrar que elas convivem, porque são visões pessoais, fruto do lugar que cada um ocupa.

Finalizando a escrita deste posfácio, retomo o princípio que norteia o grupo,

apresentado logo no início do livro por Leticia: "promover o desenvolvimento profissional dos professores que ensinam matemática entrelaçado com uma dimensão de pesquisa e tendo como ponto de partida e de chegada as demandas e as práticas dos professores escolares". Este princípio se confirmou a cada narrativa, pela riqueza das práticas narradas e investigadas e pela profundidade das aprendizagens evidenciadas.

Mudando o foco da aprendizagem para o ensino, retomo também a frase de Paulo Freire que a querida Salgado nos trouxe: "Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua produção ou sua construção", e deixo ao leitor um questionamento: Será que, após a leitura deste livro, essa frase continua fazendo o mesmo sentido para você?

Enfim, encerro agradecendo imensamente ao sEM pelo convite para escrever este posfácio. Foi um grande prazer ler este livro e espero que para você, leitor que chegou até aqui, também tenha sido uma experiência de muito prazer e aprendizagem. Com certeza, nossas aprendizagens serão diferentes, porque as experiências que "nos passam", nunca são iguais, mas quando lemos algo que é escrito a partir da experiência, vivida e analisada colaborativamente, com certeza somos convidados a também viver experiências valiosas a partir dessa leitura.

NARRATIVAS DE AULAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: APRENDIZAGENS DOCENTES NO CONTEXTO DE LESSON STUDY HÍBRIDO

Sobre os autores

Ana Leticia Losano

Doutora em Ciências da Educação e Licenciada em Física pela Universidade Nacional de Córdoba (Argentina). Possui experiência docente e de pesquisa nos campos da Educação e da Educação Matemática. Realiza Pós-doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação da UNICAMP (2017-2019), na Faculdade de Matemática, Astronomia e Física da Universidade Nacional de Córdoba (2013-2015) e no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP- Campus Rio Claro (2012). Atualmente é professora do Programa de Pós-graduação da Universidade de Sorocaba. Suas principais linhas de pesquisa e de atuação docente são: Desenvolvimento profissional de professores; Identidade profissional do professor que ensina matemática; Participação em espaços de formação inicial e continuada; Dimensões sociais e culturais da educação matemática. Membro do GdS desde 2017.

✉ E-mail: ana.losano@prof.uniso.br

Thaís de Oliveira Ferrasso

Doutora em Ensino de Ciências e Matemática (2011-2015) e licenciada em Matemática (2003-2006) pela UNICAMP. É mestre em Ensino de Ciências Exatas pela UFSCar (2008-2010). Trabalha como professora desde 2005, com algumas experiências em escolas particulares e outras públicas. Desde 2010 é Professora do Instituto Federal de São Paulo. Fez parte do Grupo de Sábado (GdS) - Unicamp em 2005 e voltou a participar do grupo desde 2016. Participou do projeto Lesson Study Híbrido, aprovado e sendo financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), na linha Ensino Público, processo: 2016/25982-9, como professora pesquisadora do ensino básico (2017-2019).

✉ E-mail: thaisoliveira@ifsp.edu.br

Cristina Meyer

Doutoranda em Educação pela Universidade Estadual de Campinas, possui mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2003) e graduação em Licenciatura em Ciências - Habilitação em Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia Santa Cecília (1984). Trabalhou como professora de Matemática em escolas particulares e na rede pública do Governo do Estado de São Paulo, atuando prioritariamente no Ensino Médio. Foi professora universitária da rede privada por mais de 20 anos, trabalhando com formação de professores de matemática. Desde 2008 é professora de Matemática do

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), com atuações no Ensino Técnico, no curso de Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Engenharia Civil. Faz parte do Grupo de Sábado (GdS) - Unicamp desde 2018. Atualmente, desenvolve pesquisas sobre o desenvolvimento profissional de professores e identidade profissional do professor que ensina Matemática.

✉ E-mail: profmeyercris@gmail.com

Maria Aparecida de Jesus Salgado

Graduada pelas Faculdades Oswaldo Cruz (Bacharel em Matemática - 1989 a 1993) e Faculdades Teresa Martin (Licenciatura Plena - 1997 a 1998). Tem especialização em Prática Pedagógica em Matemática em Comunidades de Investigação (2011 a 2012) pela Universidade Estadual de Campinas - Unicamp. Faz parte do Grupo de Sábado (GdS) - Unicamp desde 2009. Participou do projeto Lesson Study Híbrido, aprovado e sendo financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), na linha Ensino Público, processo: 2016/25982-9, como professora pesquisadora do ensino básico (2017-2019). Atualmente é professora da rede pública estadual do Governo do Estado de São Paulo, lecionando para Ensino Médio e participa do Programa de Mestrado Profissional oferecido pela Unicamp.

✉ E-mail: salgado_gomes@yahoo.com.br

Juliet Sarkis

Mestra em Educação Escolar pela UNICAMP (2018 - 2020) e licenciada em Matemática (2004 - 2007) pela UNESP - Bauru. É professora da rede pública estadual de São Paulo, lecionando em Vinhedo, no Ensino Médio, desde 2008. Participa do Grupo de Sábado (GdS) desde 2017. Participou do projeto Lesson Study Híbrido, aprovado e sendo financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), na linha Ensino Público, processo: 2016/25982-9, como professora pesquisadora do ensino básico (2019).

✉ E-mail: juliet.sarkis@gmail.com

Ana Paula Rodrigues Magalhães de Barros

Doutora em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática UNESP / Rio Claro. Mestre em ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática (PECIM) da UNICAMP. Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela UNESP/ Presidente Prudente. Possui ampla experiência docente na Educação Básica. Atualmente é Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Hortolândia. Atua como docente do curso de Licenciatura em Matemática e como pesquisadora na liderança do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias (GPEMATEC) e como pesquisadora associada no Grupo de Pesquisa de Tecnologias Digitais e Educação Matemática (PECIMAT) e no Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM). Participante do Grupo de Sábado (GdS) desde 2005. Seus temas de interesse e pesquisa são:

práticas de ensino e aprendizagem com uso de tecnologias, complexidade da sala de aula e formação de professores.

✉ E-mail: ana.barros@ifsp.edu.br

Cláudia Rodrigues de Andrade

Licenciada em Matemática pela Unicamp (2000-2003) e em Pedagogia pela Uninove (2008-2009). Tem especialização em Matemática para professores do Ensino Fundamental II e Ensino Médio - Programa Rede de Formação de Professores (2010-2011) pela Unicamp. Faz parte do Grupo de Sábado (GdS) - Unicamp desde 2017. Atualmente é professora da rede pública estadual do Governo do Estado de São Paulo, atuando no Ensino Médio no Programa Ensino Integral.

✉ Email: claudiarandrade@prof.educacao.sp.gov.br

Eliane Matesco Cristovão

Professora Adjunta no Instituto de Matemática e Computação (IMC) da Universidade Federal de Itajubá (Unifei), onde atua como docente do Curso de Licenciatura em Matemática e do Mestrado em Educação em Ciências (PPGEC). Membro do Grupo de Pesquisas em Educação Matemática e Práticas Formativas (GPEMPF) e do Grupo de Estudos Interdisciplinares e Formação de Professores (Geifop). Participa do projeto de extensão "Formação de professores para a interdisciplinaridade: articulando ensino de ciências, matemática e educação física" . Atuou como coordenadora institucional e como docente orientadora do Programa Residência Pedagógica de 08/2018 a 01/2020. Coordenou o Subprojeto de Matemática do Programa de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) de 2014 a 2018. Doutora em Educação, subárea Ensino e Práticas Culturais (2015), Mestre em Educação Matemática (2007), Especialista (1997) e licenciada em Matemática (1995), todos pela Unicamp. Possui experiência de 20 anos como professora de Matemática na educação básica e atua na formação inicial e continuada de professores de Matemática desde 2005. Seus temas de interesse/pesquisa são: formação de professores, aprendizagem docente, conhecimento especializado do professor, práticas de letramento, práticas interdisciplinares, práticas inclusivas e grupos colaborativos.

✉ E-mail: limatesco@unifei.edu.br

Dario Fiorentini

Possui graduação em Matemática pela Universidade de Passo Fundo (1977), mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (1980), doutorado em Educação (Metodologia de Ensino) pela Universidade Estadual de Campinas (1994) e Estágios Pós-doutorais de curta duração nas Universidades de Lisboa e de Sevilla. Atualmente é pesquisador PQ do CNPq (nível 1D) e professor doutor da Universidade Estadual de Campinas, onde exerce atividades de pesquisa e de docência na graduação e na Pós-Graduação em Educação (mestrado/doutorado). Temas e linhas de pesquisa e de atuação docente: educação matemática, formação e desenvolvimento profissional de professores,

saberes docentes e prática didático-pedagógica em matemática. Foi assessor de projetos de pesquisa e programas de formação docente no exterior (Guatemala e Portugal). Foi Professor Visitante na Universidade de Córdoba (Argentina) e na Universidade de Lisboa (Portugal). Desde 1996 é assessor científico da FAPESP. No triênio de 2007-2009 e no quadriênio de 2013-2016, foi membro do Comitê de Avaliação de Programas de Pós-Graduação da CAPES - Área de Educação. Foi coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Unicamp (junho/2010 - julho/2014) e Coordenador Geral de Pós-Graduação da FE/UNICAMP (2011-2014). Desde março de 2015 é Editor Científico da Revista Zetetiké. Recentemente, de julho/2017 a junho/2020, foi membro do Comitê de Assessoramento da Área de Educação (CA-Ed) do CNPq.

Este Livro foi composto com as famílias tipográficas Segoe UI e Timeout.

Sociedade Brasileira de
Educação Matemática