Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Situações Didáticas Profissionais: concepções e obstáculos no ensino de sistemas lineares e o uso do GeoGebra

Maria Graciene Moreira dos Santos
EEF João Alencar de Figueiredo
Juazeiro do Norte, CE — Brasil
gracienemoreira546@gmail.com
0000-0003-1982-8783

Renata Teófilo de Sousa
Secretaria de Estado de Educação do Ceará
Sobral, CE — Brasil
rtsnaty@gmail.com
0000-0001-5507-2691

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal do Ceará
Fortaleza, CE — Brasil
fregis@ifce.edu.br
0000-0003-3710-1561

2238-0345

10.37001/ripem.v14i1.3795

Recebido • 19/02/2024
Aprovado • 26/03/2024
Publicado • 15/04/2024

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Este artigo é derivado de uma pesquisa de mestrado e explora desafios no ensino de sistemas lineares, focando a intersecção entre currículo, abordagens metodológicas e experiência de professores em serviço. O objetivo deste trabalho é conhecer as concepções, as formas de ensino e obstáculos dos docentes na abordagem de sistemas de equações lineares. A metodologia do estudo foi a Engenharia de Formação, aliada aos fundamentos da Teoria das Situações Didáticas integrados à Didática Profissional. A análise se concentra em uma Situação Didática Profissional para a abordagem do tema com o apoio do GeoGebra. A experiência dos professores destacou obstáculos no ensino, ressaltando a necessidade de estratégias pedagógicas específicas. O GeoGebra configurou-se como recurso que viabiliza uma aprendizagem visual e intuitiva, promovendo um ambiente que fomentou uma compreensão sólida e efetiva dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Situação Didática Profissional. Engenharia Didática de Formação. Sistemas Lineares. GeoGebra. Formação de Professores.

Professional Didactic Situations: conceptions and obstacles in the teaching of linear systems and the use of GeoGebra

Abstract: This article is derived from a master's research and explores challenges in teaching linear systems, focusing on the intersection between curriculum, methodological approaches, and in-service teachers' experience. The objective of this work is to understand teachers' conceptions, teaching methods, and obstacles in approaching systems of linear equations. The methodology of the study was Engineering of Formation, allied with the foundations of the Theory of Didactic Situations integrated with Professional Didactics. The analysis focuses on a Professional Didactic Situation for approaching the topic with the support of GeoGebra. Teachers' experience highlighted obstacles in teaching, emphasizing the need for specific pedagogical strategies. GeoGebra emerged as a resource enabling visual and intuitive learning, promoting an environment that fostered a solid and effective understanding of mathematical concepts.

Keywords: Professional Didactic Situation. Didactic Engineering of Training. Linear Systems.

GeoGebra. Teacher Training.

Situaciones Didácticas Profesionales: concepciones y obstáculos en la enseñanza de sistemas lineales y el uso de GeoGebra

Resumen: Este artículo se deriva de una investigación de maestría y explora los desafíos en la enseñanza de sistemas lineales, centrándose en la intersección entre el currículo, los enfoques metodológicos y la experiencia de los profesores en servicio. El objetivo de este trabajo es comprender las concepciones, los métodos de enseñanza y los obstáculos de los docentes en el abordaje de sistemas de ecuaciones lineales. La metodología del estudio fue la Ingeniería de Formación, aliada a los fundamentos de la Teoría de las Situaciones Didácticas integrados a la Didáctica Profesional. El análisis se centra en una Situación Didáctica Profesional para el abordaje del tema con el apoyo de GeoGebra. La experiencia de los profesores destacó obstáculos en la enseñanza, enfatizando la necesidad de estrategias pedagógicas específicas. GeoGebra surgió como un recurso que permite un aprendizaje visual e intuitivo, promoviendo un ambiente que fomentó una comprensión sólida y efectiva de los conceptos matemáticos.

Palabras clave: Situación Profesional Docente. Formación Didáctica de Ingeniería. Sistemas Lineales. GeoGebra. Formación del Profesorado.

1 Introdução

Os sistemas lineares desempenham um papel fundamental na disciplina de Matemática, com aplicação em diversas áreas, desde Física e Engenharia até Economia e Ciência da Computação. No entanto, apesar de sua importância, a inclusão desse tópico na disciplina de Matemática no âmbito escolar muitas vezes se depara com desafios consideráveis, que se refletem na sala de aula e abordagem dos livros didáticos (Battaglioli, 2008; Jordão, 2011).

Durante décadas tem sido evidente uma significativa discrepância entre a complexidade teórica dos sistemas lineares e sua apresentação nos ambientes educacionais. Esta disparidade é ainda mais evidente ao analisarmos os livros didáticos predominantes, que variam consideravelmente em suas abordagens e nem sempre atendem às necessidades dos alunos. A carência de material didático que integre rigor matemático e exemplos práticos do cotidiano, incorporando as tecnologias disponíveis, tem sido um fator que influencia as dificuldades persistentes na compreensão do tema.

Assim, a problemática no ensino de sistemas lineares muitas vezes está relacionada à ausência de uma abordagem que torne os conceitos acessíveis e relevantes para os estudantes. A linguagem técnica e a formalidade matemática frequentemente se mostram como barreiras significativas, resultando em dificuldades de compreensão e aplicações pelos estudantes.

Diante disso, o objetivo deste trabalho envolve o interesse de conhecer as concepções dos docentes, as formas de ensino e seus obstáculos na abordagem do tópico de sistemas de equações lineares. Ao compreender essas dificuldades, busca-se contribuir para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas mais eficazes e materiais educacionais que promovam uma compreensão matemática clara, com vistas às possibilidades de aplicação prática dos sistemas lineares.

Este trabalho constitui-se em um recorte de uma pesquisa de mestrado defendida em 2024 no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), escrita pela primeira autora. O arcabouço teórico delineado nos permitiu uma análise cuidadosa e contextualizada dos resultados obtidos. O foco principal foi explorar a implementação de Situações Didáticas Profissionais (SDP) como estratégia na formação continuada de professores de matemática, com foco no ensino de sistemas lineares. O público-alvo desta pesquisa foi um grupo de cinco professores em serviço, participantes de um curso de Especialização em Ensino de Matemática, oferecido pelo IFCE, *campus* Juazeiro do Norte. Neste recorte, trazemos o que foi desenvolvido em um dos encontros do curso de formação proposto para o trabalho com o tema. O propósito da formação foi orientar e promover a melhoria contínua, assim como o desenvolvimento de competências profissionais específicas dos professores, considerando os obstáculos manifestados por eles no ensino.

Para compreender o contexto dos docentes que participaram da pesquisa, nos embasamos em um delineamento teórico que tem suas origens na Didática da Matemática e suas vertentes desenvolvidas em cenário francês. Utilizamos a ideia de Situação Didática Profissional (Alves, 2020; 2021; Alves & Catarino, 2019) que, ao ser desenvolvida nesta pesquisa, focou no ensino de sistemas lineares, sendo direcionada à formação de professores. Para sua execução, adotamos a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa (Artigue, 2020), na perspectiva da Engenharia Didática de Segunda Geração ou Engenharia Didática de Formação (Almouloud & Silva, 2012). Para a estruturação da SDP desenvolvida e organização da sessão de ensino, utilizamos em paralelo a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2002) e a Didática Profissional (Pastré, 1999), enquanto teorias norteadoras e que também possuem gênese francófona.

Dada a dificuldade enfrentada pelos professores participantes da pesquisa ao abordar a visualização e compreensão geométrica de sistemas 3×3, identificada como um obstáculo no ensino do tema, esta SDP visou desenvolver uma abordagem direcionada a esse aspecto específico. No contexto da dissertação, outras abordagens relacionadas a diferentes dificuldades expressadas pelos professores participantes foram consideradas. Entretanto, esta situação específica apresenta uma proposta para o ensino dos sistemas 3×3 utilizando o GeoGebra como recurso, visando viabilizar a transposição didática do tópico e fornecendo aos professores uma ferramenta visual para compreensão dos conceitos geométricos relacionados ao tema.

No que se refere à tecnologia, Silva e Abar (2016) explicam que o *software* GeoGebra proporciona uma modernização do saber escolar ao oferecer recursos visuais e manipuláveis. Sousa *et al.* (2023, p. 209) acrescentam, descrevendo o *software* como um ambiente de "Geometria Dinâmica que permite a criação, visualização e manipulação de re1presentações de conceitos matemáticos, tratando a Geometria, a Álgebra e o Cálculo de forma conectada".

Nas seções seguintes apresentamos uma discussão sobre o aporte teórico utilizado para organizar a pesquisa, bem como as quatro fases da Engenharia Didática de Formação desenvolvida — análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação — desenvolvida com os participantes. Por fim, findamos a discussão com as principais impressões e considerações sobre a experiência vivenciada.

2 Quadro teórico

Antes de adentrar à estrutura da Engenharia Didática desenvolvida, preconizamos uma breve explanação teórica sobre conceitos utilizados em suas fases, como a ideia de Situação Didática Profissional (SDP) e sua relação com a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a vertente Didática Profissional (DP), bem como a diferenciação entre a Engenharia Didática Clássica (1ª geração) e Engenharia Didática de Formação (2ª geração).

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi desenvolvida por Guy Brousseau nos anos 80, sendo uma teoria de ensino originada das discussões em Didática da Matemática. A TSD busca compreender como ocorre a aprendizagem matemática, propondo que o ensino, para que seja eficaz, deva ser construído em torno de situações que possam ser resolvidas pelos estudantes, levando-os a construir significados matemáticos de forma ativa (Brousseau, 2002).

Desta forma, conforme a TSD, cada situação didática deve ser cuidadosamente desenvolvida pelo professor, mediante a um contrato didático (Brousseau, 2008), que estabelece as regras da situação, dispositivo ou jogo matemático entre professor e alunos, bem como a organização de um meio (*milieu*) em que a situação didática ocorre. Parte-se da premissa que os estudantes adquirirem conhecimento por meio das interações e experiências que ocorrem quando eles se adaptam ao *milieu* (Almouloud, 2007).

A TSD é estruturada em quatro fases, que são ação, formulação, validação e institucionalização, sendo as três primeiras a fase adidática, em que o estudante interage com a situação sem intervenção direta do docente. A última etapa é a fase didática, em que o docente intervém e formaliza o saber com base no que foi proposto e conjecturado pelos estudantes nas fases anteriores (Brousseau, 2002; 2008; Almouloud, 2007).

A seguir apresentamos uma síntese de cada uma das dialéticas da TSD:

a) *Dialética de ação*: "sucessão de interações entre o estudante e o meio" (Brousseau, 2002, p. 9). As decisões devem ser tomadas e o estudante age pontualmente a fim de resolver o problema, seja de modo racional, a partir de conhecimentos prévios ou intuitivos.

b) *Dialética de formulação*: momento em que o estudante expõe suas conjecturas, compartilhando-as de forma que todos possam compreendê-lo. Debate-se no intuito de encontrar um modelo para alcançar a solução do problema (Brousseau, 2002). Neste momento, o aluno estabelece hipóteses e usa linguagem matemática, sem se preocupar com a formalidade de suas estruturas, mas sim com a organização de suas ideias.

c) *Dialética de validação*: ocorre quando o estudante defende o que ele expôs, buscando validar seus pensamentos e, desse modo, constrói teorias para buscar convencer os demais sobre seu ponto de vista, ou aceitar outros argumentos que o façam mudar de opinião. Ou seja, deve apresentar as estratégias utilizadas para resolver o problema (Brousseau, 2008).

d) *Dialética de institucionalização*: seu objetivo é destacar a natureza universal do conhecimento e as intenções pedagógicas do professor. Segundo Almouloud (2007, p. 40), neste contexto, o professor "fixa de maneira convencional e explícita o estatuto cognitivo do saber".

As fases desenvolvidas na pesquisa estão inseridas no contexto de uma Situação Didática Profissional, direcionadas não à situação de aprendizagem, que tem como foco o estudante, mas sim no âmbito do ensino, visando a formação do professor. O enfoque na formação e desenvolvimento contínuo do adulto no campo profissional é característico da vertente da Didática Profissional. Esta abordagem não se restringe a um campo específico, de modo que abrange de forma ampla os professores, sendo fundamentada na análise cognitiva do trabalho no intuito de a tornar a formação profissional mais eficaz. O autor propõe a hipótese de que a atividade humana se estrutura por meio de esquemas, formados por conceitos pragmáticos (Pastré, 1999).

A Situação Didática Profissional (SDP) constitui uma sinergia entre os princípios fundamentais da Teoria das Situações Didáticas e os da Didática Profissional, focalizando-se na prática docente. Destaca-se sua relevância em posicionar os professores dentro de contextos profissionais específicos, proporcionando-lhes experiências vivenciais que os levem à reflexão e ao aprimoramento contínuo de suas práticas de ensino. As SDP são descritas por Alves (2020;

2021) como um conjunto de circunstâncias fundamentais para a eficácia do trabalho do professor e englobam elementos relacionados à criação de modelos e teorias. Nesse sentido, elas têm o objetivo de antecipar desafios específicos da sala de aula, da prática profissional no ambiente de trabalho e da instituição como um todo.

No contexto deste artigo, a SDP envolve a exploração geométrica dos conceitos de sistemas lineares, proporcionando aos professores uma experiência significativa para aprimorar sua abordagem pedagógica.

A Engenharia Didática de Primeira Geração (ED), difundida por Artigue (1988) com base nos estudos de Brousseau (1986), refere-se à elaboração de sequências didáticas e instrumentos que visam promover a aprendizagem matemática. Nessa abordagem, o foco está na construção e experimentação de dispositivos pedagógicos que consideram os obstáculos epistemológicos e didáticos que os estudantes podem encontrar no percurso de sua aprendizagem. Neste nível, a ED visa criar situações propícias para que os estudantes superem tais obstáculos e desenvolvam compreensão matemática, ou seja, concentra-se no desenvolvimento, implementação, observação, análise e avaliação de situações didáticas no contexto da sala de aula, visando à promoção da aprendizagem de um conteúdo específico (Artigue, 2014).

A Engenharia Didática de Formação (EDF), ou Engenharia Didática de Segunda Geração, apresenta complementaridade com a Engenharia Didática de Primeira Geração (ED), uma vez que procura aproveitar o que foi produzido na primeira geração, adaptando-se às características e às necessidades do professor (Alves, 2018; Almouloud, 2011). Enquanto na ED são estudadas as hipóteses, as dificuldades e o contexto dos problemas, na EDF são apontadas possíveis soluções para resolvê-los. Isso gera uma estratégia que pode ser adaptada e utilizada por outros docentes em novas situações didáticas, além de produzir conhecimentos que podem subsidiar outras produções, sendo referência para pesquisadores em Educação Matemática (Sousa, Alves & Fontenele, 2019).

Desta forma, a EDF representa uma evolução da ED, acrescentando uma dimensão específica para a formação de professores. Ela destaca a importância de considerar a formação inicial e continuada dos professores na concepção de sequências didáticas e abordagens pedagógicas. Isso implica não apenas no desenvolvimento de dispositivos eficazes para os estudantes, mas também na promoção de uma reflexão por parte dos professores sobre suas práticas de ensino.

Na referida pesquisa de mestrado, a integração desses conceitos aliada ao uso do GeoGebra pode oferecer uma abordagem inovadora e prática ao lidar com os desafios no ensino de sistemas lineares, proporcionando aos professores uma experiência enriquecedora, que transcende a teoria para novas abordagens em sala de aula.

3 Análises Preliminares

Nesta fase, segundo Artigue (2014), é conduzida essencialmente uma análise em três âmbitos: (a) epistemológica, focando as características do conhecimento matemático envolvido; (b) didática, considerando os aspectos específicos do funcionamento do sistema educacional; e (c) cognitiva, focando as particularidades do público-alvo ao qual o ensino se destina.

Nesse contexto, delineamos uma visão histórico-evolutiva dos sistemas lineares e sua integração ao ensino de matemática (Fernandes; Miyasaki, 2011; Boyer, 2010; Smole; Diniz, 2003). Na análise didática, conduzimos um estudo abrangente que compreendeu a revisão de trabalhos acadêmicos relacionados à pesquisa (Freitas, 1999; Battaglioli, 2008; Reis 2010; Jordão, 2011), bem como examinamos as diretrizes curriculares oficiais e os documentos norteadores de âmbito nacional associados ao ensino de sistemas lineares e avaliamos os livros didáticos atuais (Brasil, 2018). A proposta apresentada nesta pesquisa buscou alinhar-se às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conforme trecho:

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (Brasil, 2018, p. 531).

Essa investigação nos proporcionou uma visão da abordagem predominantemente presente nos materiais adotados em sala de aula. Também identificamos obstáculos didáticos que frequentemente surgem no ensino de sistemas de equações lineares, enriquecendo nossa compreensão acerca das dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Por fim, para investigar na perspectiva de uma análise cognitiva, buscamos compreender as particularidades e desafios específicos enfrentados pelos professores que participaram da pesquisa, conduzindo a realização de uma pesquisa do tipo grupo focal com os participantes, com base em Kitzinger (2000).

Para esta análise preliminar e este recorte de pesquisa, trazemos de modo abreviado os principais obstáculos enfrentados pelos participantes no ensino deste tema:

i. inabilidade no uso de recursos tecnológicos educacionais;
ii. metodologia de ensino exclusivamente tradicional (inovar em metodologias);
iii. deficiência na discussão e interpretação geométrica de sistemas 3×3;
iv. a falta de procedimentos de ensino que permitam correlacionar as linguagens do conteúdo (algébrica, geométrica);
v. dificuldades em trabalhar com sistemas indeterminados.

Almejando minimizar os desafios identificados e contribuir para o desenvolvimento profissional destes professores, elaboramos uma SDP implementada em um processo formativo com os participantes.

O GeoGebra foi escolhido como recurso para a construção e desenvolvimento da SDP por tratar-se de um *software* livre e de fácil manipulação. Segundo Abar (2020), o GeoGebra proporciona suporte às metodologias aplicadas pelo professor, facilitando a resolução de exercícios e problemas, tornando-os mais compreensíveis com o uso de recursos visuais e manipuláveis. Alves e Borges Neto (2012) complementam que o uso deste *software* como recurso tecnológico possibilita a visualização de situações imagináveis, que o aluno não conseguiria enxergar em um problema feito à mão, com lápis e papel.

4 Concepção e análise *a priori*

Conforme Almouloud e Coutinho (2008), essa etapa desempenha um papel crucial no planejamento e na execução das atividades de ensino, contribuindo para a eficácia do processo educativo. Nesse contexto, procuramos listar abordagens didáticas profissionais com o propósito de fomentar o aprimoramento das habilidades e competências necessárias para o ensino de sistemas de equações lineares.

Com base na análise preliminar estruturada, elaboramos uma SDP que foi implementada com os professores e, a partir de seus resultados, verificamos sua viabilidade para compreender como estes professores ensinam sistemas de equações lineares, no que tange ao uso de recursos e abordagens, bem como que dificuldades encontram nesse processo.

Esta SDP foi embasada em uma proposta do livro de Dante (2013), sobre a interpretação geométrica de sistemas lineares 3×3. Dentre os propósitos desejados para o seu desenvolvimento, instigamos os docentes a refletir sobre: (i) compreender as propriedades dos sistemas lineares e (ii) comprender a associação entre as representações de um mesmo sistema, por meio das linguagens algébricas e geométricas.

Também sugere-se que os professores reflitam sobre a incorporação de *softwares* e aplicativos como ferramentas auxiliares em sua abordagem metodológica. É importante que o professor saiba identificar as dificuldades de apreensão do tema por parte do estudante e os desafios que o fazem estabelecer a relação entre as diferentes linguagens utilizadas.

A SDP proposta aos professores foi modelada no *software* GeoGebra e a construção foi disponibilizada aos participantes. A partir da manipulação dos controles deslizantes da construção e da barra de ferramentas do *software*, foi possível observar a formulação de diferentes sistemas, bem como suas ternas ordenadas de maneira mais didática e concreta. No Quadro 1 há a SDP proposta.

Quadro 1: SDP proposta

a) Resolva os sistemas lineares.

1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y+2z=10 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=8 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 4x+y+3z=7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ -2x-2y-2z=9 \\ -5x+5{,}5y+0{,}5z=-7{,}5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 7x-5y+z=9 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

b) Com a ajuda dos controles deslizantes fornecidos no problema, encontre todas as possibilidades para as posições relativas dos três planos π_1, π_2e π_3, justificando-as de acordo com seu entendimento responda aos questionamentos expostos no quadro.

Sistemas	Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente ou combinação linear	Posição relativa entre os planos	Solução e classificação do sistema
1			
2			
3			
4			
5			

Fonte: Adaptado de Brandl (2018)

Ao disponibilizar a proposta construída no *software* GeoGebra, a pesquisadora possibilitou aos professores um modelo visual das representações geométricas dos planos, projetadas de forma interativa e manipulável. Isto permitiu classificar os sistemas intuitivamente, minimizando a abstração contida na forma algébrica dos sistemas, ao passo que proporcionou uma visualização geométrica que forneceu sentido matemático às suas estruturas algébricas.

Durante o desenvolvimento da SDP, almeja-se que o professor perceba as diferentes estratégias que podem permitir o desenvolvimento do pensamento geométrico, partindo de situações com representações algébricas. Para traçar algumas previsões em relação ao desenvolvimento desta situação, empregamos as dialéticas da TSD, abordadas mais detalhadamente nos parágrafos seguintes.

A dialética de ação é o momento de compreender o problema, sendo uma etapa essencial para que os alunos tomem decisões com base nas informações fornecidas (Almouloud, 2007). Portanto, espera-se que o cada professor selecione os métodos que considera mais apropriados para resolver os sistemas apresentados. Eles podem optar por procedimentos algébricos como substituição, eliminação, ou até mesmo uma abordagem mais intuitiva, utilizando a construção geométrica, no intuito de encontrar uma solução adequada para o sistema.

Na dialética de formulação espera-se que os professores troquem informações sobre o problema entre o grupo, de maneira escrita ou oral, com vistas a solucionar o problema. Nesta troca, anseia-se que, com o auxílio do GeoGebra, os professores percebam que as equações (1), (2) e (3) de cada sistema representam planos no espaço tridimensional. Além disso, percebam que os três planos ser podem apresentados de maneiras distintas, o que define a classificação de cada um deles.

Para determinar os pontos de intersecção nos itens, o professor dispõe da própria visualização apresentada em 3D no *software*, ou pode explorar outras ferramentas e comandos disponibilizados. Uma destas opções é o comando *intersecção entre duas superfícies*, disponível na barra de ferramentas. Para realizar esse procedimento, é necessário inicialmente clicar no ícone de intersecção entre duas superfícies e, em seguida, selecionar os planos dois a dois. Ao fazer isso, a reta correspondente deve ser exibida na janela de álgebra. Ao final do processo são geradas três retas, cada uma representando a intersecção entre os planos 1 e 2, 1 e 3 e 2 e 3, respectivamente.

Depois disso, o professor pode optar por ocultar as equações e manter as linhas cruzadas. Para determinar o ponto de intersecção entre os planos, eles podem usar o comando *intersecção entre dois objetos* na barra de ferramentas. Após esta etapa, deve-se repetir o processo, selecionando as retas duas a duas e examinando o resultado obtido. Se as ternas ordenadas forem idênticas, o sistema é considerado *possível e determinado*. Caso haja apenas um ponto de interrogação, indica um *sistema impossível* ou *possível e indeterminado*.

Outra possibilidade para o professor é resolver o sistema através dos comandos da caixa de entrada, em que é possível digitar *Intersecção* e escolher a sintaxe cuja opção é *Intersecção (<Objeto>,<Objeto>)*. Com a combinação dessa sintaxe e a nomenclatura de cada equação feita pelo *software* obtém-se a solução do sistema.

Para realizar a classificação apropriada do sistema, o professor pode voltar às equações das retas geradas ao clicar na intersecção entre duas superfícies. É fundamental observar que, no caso do sistema impossível, as equações das retas são claramente diferentes. Em contrapartida, no sistema possível e indeterminado, duas das equações das retas serão equivalentes.

Na dialética de validação, os professores devem apresentar as estratégias para solucionar o problema. Para Almouloud (2007, p. 40) esta etapa tem como objetivo "a validação das asserções formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo se referir a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática (relativa à eficácia do texto)". Dito isto, desejamos que os professores apresentem suas soluções com o manuseio direto do *software*. Espera-se que demonstrem a parte algébrica por meio da construção geométrica e validem a classificação de cada sistema, justificando as características percebidas no *software* após análise. Após a exposição no GeoGebra, é apropriado que os professores introduzam a resolução algébrica para confrontá-la com a abordagem gráfica. Esse processo complementar visa reforçar a validação das afirmações feitas durante a atividade, proporcionando uma análise mais abrangente.

Na dialética de institucionalização a pesquisadora deve retomar a responsabilidade da situação e formalizar o resultado obtido pelos professores. Nesse momento, cabe à pesquisadora destacar claramente as intenções subjacentes à situação vivenciada.

A elaboração dessa experiência educacional foi planejada a partir da identificação de um desafio profissional específico enfrentado por professores de matemática, que se manifesta na falta de abordagem da parte geométrica dos sistemas 3×3, devido também à falta de compreensão desse tópico. Durante esse momento, busca-se direcionar a atenção para a reflexão sobre esse obstáculo, incentivando uma análise mais aprofundada e estratégias para superá-lo.

5 Experimentação

Segundo Almouloud (2007), a fase de experimentação é o momento em que todo o sistema elaborado é posto em prática e dados essenciais são coletados para análise na próxima etapa. Isso pode incluir observações realizadas durante as sessões de ensino e o trabalho dos estudantes em sala de aula ou fora dela.

Este estudo foi desenvolvido no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), localizado na cidade de Juazeiro do Norte. Os participantes foram cinco professores de Matemática que atuam na rede pública de ensino. Destaca-se que esses professores também são estudantes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática com ênfase na Educação Básica, oferecido pelo IFCE. O critério para escolha se deu devido ao foco específico do Programa, que tem ênfase nesta etapa escolar.

Para a experimentação deste estudo foram utilizadas ferramentas para a coleta de dados alinhadas à Engenharia Didática, metodologia que orienta esta pesquisa. Os dados foram coletados por meio de gravações de áudios, fotografias e registros escritos, bem como a manipulação no *software* GeoGebra. No Quadro 2 há a compilação dos dados relativos ao perfil dos professores participantes da pesquisa.

Quadro 2: Perfil dos participantes

Professor	Tempo de docência (em anos)	Formação inicial (graduação)	Formação continuada (pós-graduação)	Participou de algum processo de formação continuada no último semestre? (cursos, palestras, seminários) Quais?
P1	Mais de 15 anos	Licenciatura em Matemática	Especialização em Ensino de Matemática (em andamento)	Sim. Formação MaisPaic -Seduc
P2	De 1 a 5 anos	Licenciatura em Matemática	Especialização em Ensino de Matemática (em andamento)	Não
P3	Mais de 15 anos	Licenciatura em Matemática	Especialização em Ensino de Matemática (em andamento)	Sim. Matemática no Ensino Médio
P4	De 1 a 5 anos	Licenciatura em Matemática	Especialização em Ensino de Matemática (em andamento)	Curso de formação em metodologias, inovações e práticas para o ensino.

P5	De 1 a 5 anos	Licenciatura em Matemática	Especialização em Ensino de Matemática (em andamento)	Colóquio de Matemática do IFCE e Didática.

Fonte: Elaboração própria (2023)

Na subseção seguinte, apresentamos o desenvolvimento da experimentação, bem como a coleta de dados da investigação.

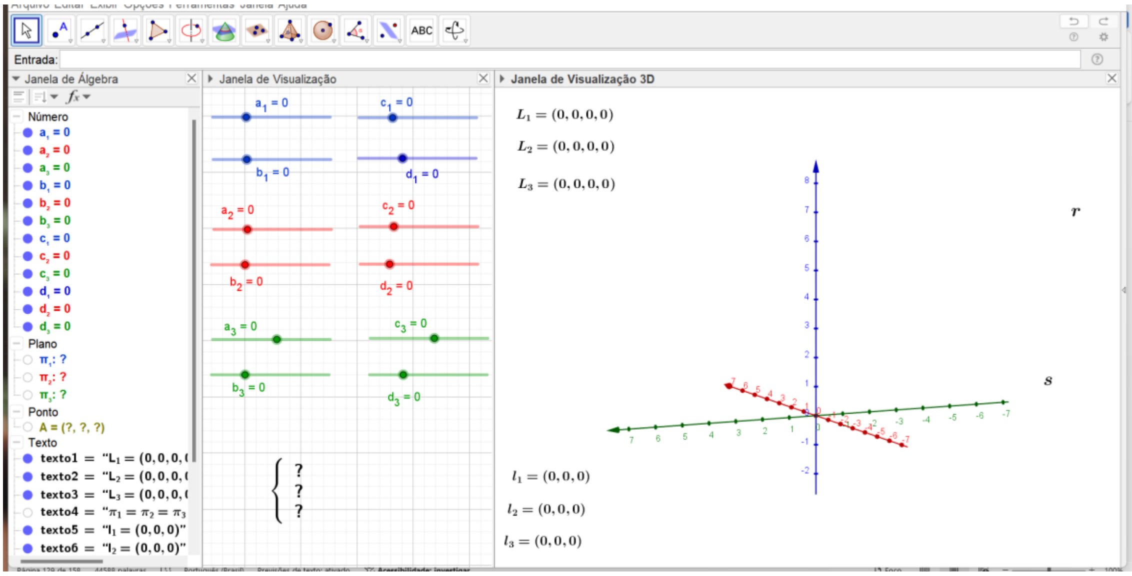
6 Percurso da Experimentação

A SDP foi realizada durante um dos encontros de formação. Inicialmente, a professora distribuiu o problema impresso e disponibilizou a construção gráfica no GeoGebra, visando facilitar a mobilização de estratégias de resolução, bem como trabalhar a parte geométrica dos sistemas, oportunizando aos participantes a visualização gráfica como suporte à interpretação e classificação desses sistemas.

Uma vez que a construção já havia sido apresentada, os professores manipularam-na usando a ferramenta controle deslizante, o que permitiu observar as mudanças entre os diferentes planos de forma dinâmica. Esta abordagem contribuiu para uma interação mais eficaz entre os participantes e a SDP.

Durante a *situação de ação*, os professores perceberam que ao mover o controle deslizante (Figura 1), era possível visualizar um conjunto de planos no espaço e a solução do sistema, fornecendo os valores das variáveis *x*, *y* e *z*, que são as coordenadas do ponto de intersecção comum entre os planos, verificando assim, as características das variáveis e do termo independente.

Figura 1: Representação gráfica no GeoGebra para modelagem da SDP

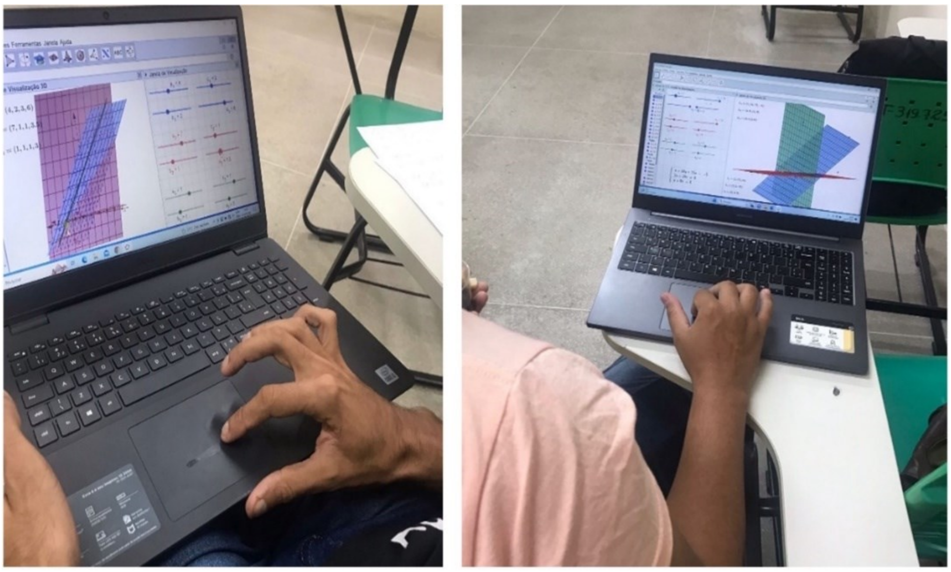


Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Ao observarem a elaboração no *software*, os participantes demonstraram entusiasmo em relação à funcionalidade apresentada pelo GeoGebra, como evidenciado nos comentários a seguir: *"Essa construção é realmente interessante!"* (P2), *"Será que eu consigo explorar todas as possibilidades dos sistemas 3×3 com essa construção?"* (P5), *"Não me recordo se essa parte foi abordada durante minha graduação, mas eu achei bem bacana"* (P3). Na Figura 2 há um registro dos professores P2 e P5 na *situação de formulação*, ao manipular a construção.

Ainda na situação de formulação, os professores optaram por resolver a questão de maneira individual. Nesse contexto, os professores P1, P3 e P4 escolheram resolver os sistemas unicamente de forma algébrica, sem usar a construção no *software* como suporte para a resolução e desenvolvimento de estratégias. Essa abordagem foi contrária ao que havia sido inicialmente previsto na análise *a priori*.

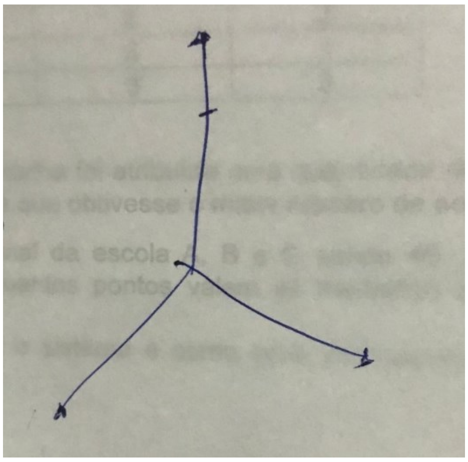
Figura 2: Registro da situação de formulação



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A Figura 3 é uma representação geométrica de um sistema possível e determinado, criada por P1. No entanto, o professor apresentou uma representação inadequada. Ao tentar criar manualmente a construção gráfica 3D, torna-se claro que ele carece de habilidade técnica em desenho tridimensional, o que pode comprometer a precisão das representações visuais dos sistemas 3×3.

Figura 3: Representação geométrica descrita por P1



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A pesquisadora estimulou a interação entre os professores, fomentando a realização de diálogos colaborativos. Concomitantemente, eles começaram a formalizar suas respostas, conduzindo assim as etapas de formulação e validação do problema. Essas interações são descritas nos diálogos a seguir:

Pesquisadora: *Como professor, ao lidar com sistemas lineares 3×3, como vocês abordam a questão da* *proporcionalidade em comparação com sistemas 2×2?*

P1: *Percebo que a presença de uma terceira letra aí complica a situação. Nos sistemas 2×2, costumo dizer que a falta de proporcionalidade leva a uma solução única, tornando o sistema possível e determinado, já no caso de sistemas 3×3, ainda estou me familiarizando com a análise mais detalhada.*

P5: *Ao lidar com sistemas lineares 3×3 em comparação com sistemas 2×2, eu destaco a complexidade adicional que surge com a presença de uma terceira variável. No contexto dos sistemas 2×2, a ausência de proporcionalidade costuma indicar uma solução única, o que torna o sistema possível e determinado. No entanto, nos sistemas 3×3, a abordagem se torna mais refinada. Não apenas avaliamos a proporcionalidade nos coeficientes das incógnitas, mas também nos termos independentes.*

P2: *Já pegando o gancho da fala de P5, é importante também deixar claro para os alunos que a falta de proporcionalidade pode não ser uma indicação direta de um sistema impossível. Em vez disso, pode sugerir a presença de combinações lineares específicas nos coeficientes das incógnitas e nos termos independentes.*

Pesquisadora: *Considerando a possibilidade de combinações lineares nos coeficientes das incógnitas e nos termos independentes, como você diferencia sistemas possíveis e determinados, possíveis e indeterminados, e impossíveis?*

P5: *Em sistemas possíveis e determinados, todas as equações são linearmente independentes, o que implica em três retas diferentes na representação gráfica. Já nos sistemas possíveis e indeterminados, observo duas equações idênticas, resultando em duas retas coincidentes e uma terceira independente. No caso dos sistemas impossíveis, procuro identificar situações em que as equações são linearmente dependentes, gerando retas coincidentes ou colineares. Isso sugere a falta de solução única.*

P4: *Essa abordagem aí combinada com a análise gráfica e algébrica ajuda a fornecer uma melhor compreensão dos diferentes tipos de sistemas 3×3.*

Continuando o encontro de formação, nota-se que apesar do estímulo fornecido pela pesquisadora, os professores persistiram na resolução de forma individual. Esta forma de trabalho foi mantida pelos professores P1, P3 e P4, ao passo que P2 e P5 iniciaram um diálogo, como segue:

P2: *Esse primeiro sistema é possível e determinado, logo a posição relativa entre os planos é tangente, né?*

P5: *Concorrentes. Qual solução tu chegou aí?*

P2: *O meu deu (1, 2 e 3), eu fiz assim, eu utilizei combinação linear, primeiro subtrai a 3ª equação da 2ª e obtive uma quarta equação $x + y = 3$. Depois subtrai a 2ª da 1ª e formei a quinta equação $z + x = 4$. Ai partindo da 1ª equação, veja aí que a soma das incógnitas é igual a 6 logo z só pode ser 3. Depois eu substituí e encontrei que x é 1 e y é igual a 2.*

P5: *Show de bola! Esse segundo sistema está na cara que é impossível, porque a 1ª equação é igual a última com valor diferente no termo independente.*

P2: *São paralelos os planos, né?*

P5: *Sim!*

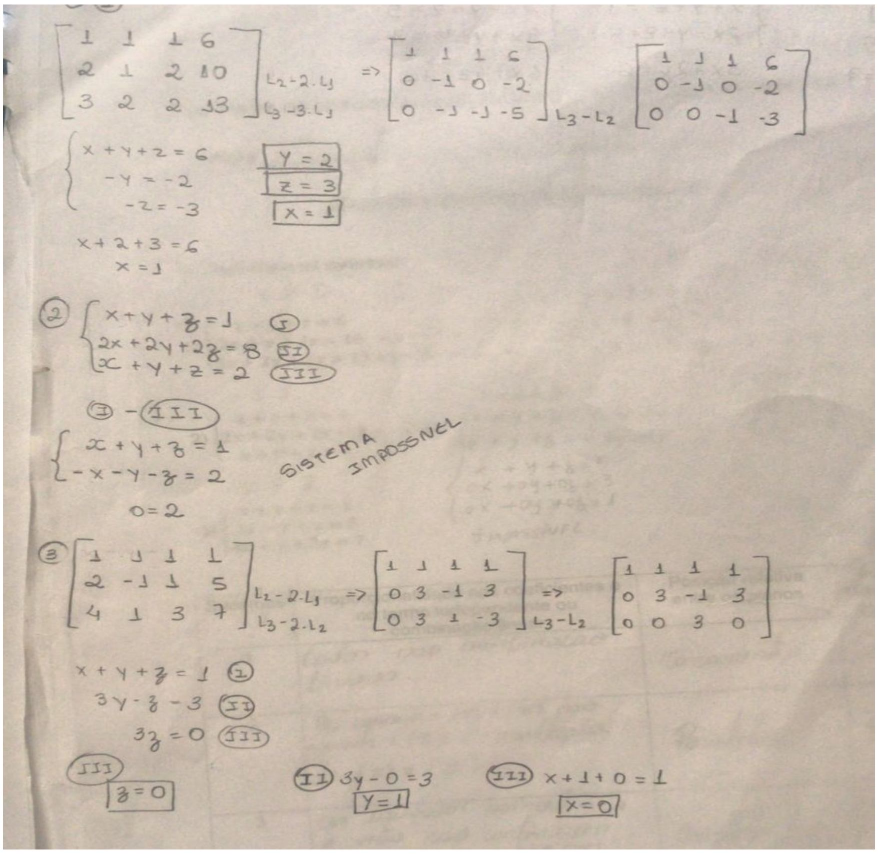
Os professores P1 e P3 não concluíram todos os itens, deixando algumas partes do problema em branco. Além disso, apresentaram resistência ao uso do *software* GeoGebra. P3 mencionou desafios durante o processo de resolução para encontrar e concluir a existência de um ponto de intersecção entre os planos, destacando a limitada familiaridade com o *software* e, por conseguinte, a falta de habilidade ao manipular o objeto e resolver o problema proposto.

O professor P1 expressou sua frustração dizendo: *"Coça a mão para fazer as contas aqui e ter uma resposta"*. Esse diálogo evidenciou a inclinação para buscar uma estratégia alternativa, quando percebem que o percurso para a solução não é evidente ou encontrado no registro matemático atual.

O professor P4 também deixou a construção de lado, dedicando-se à resolução dos sistemas de forma algébrica. Tal fato mostrou uma maior atenção dada pelo professor em resolver o sistema por métodos tradicionais, sem demonstrar tanta preocupação com a explicação e a natureza da abordagem geométrica proposta. Isso evidenciou um possível obstáculo na prática docente, considerando a importância da incorporação de ferramentas tecnológicas ao ensino de Matemática.

A Figura 4 apresenta a resolução realizada por P4 para os três primeiros sistemas do problema, sendo uma parte referente à *situação de validação* na TSD.

Figura 4: Validação de P4



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

O participante P4 demonstrou hesitação ao compartilhar as razões que o levaram a escolher um método específico de resolução, bem como suas conjecturas para chegar ao resultado, limitando-se a apresentar apenas uma resposta com representação algébrica. Na Figura 5 é apresentada a resolução do participante para os questionamentos expostos no quadro.

Para a resolução do primeiro sistema, P2 e P5 exploraram as ferramentas do *software*, aproveitando a funcionalidade de zoom para identificar com precisão o ponto de intersecção. Na resolução do segundo sistema, os professores P2 e P5 revelaram a presença de três planos distintos e paralelos. P2 afirmou que *"a interseção entre eles é vazia, o sistema é impossível"*.

Na dialética de validação observou-se que, embora alguns participantes tenham utilizado construções no *software* durante as etapas de ação e formulação, nenhum deles aplicou essa abordagem para validar a solução, mas sim recorreram às informações expressas de maneira algébrica no papel.

Figura 5: Validação de P4

Sistemas	Proporcionalidade nos coeficientes e no termo independente ou combinação linear	Posição relativa entre os planos	Solução e classificação do sistema
1	NÃO	PLANOS TANGENTES	S.P.D
2	Proporcionalidade nos coeficientes	PLANOS PARALELOS	S.I
3	combinação Linear	PLANOS CONCORRENTES	S.P.I

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

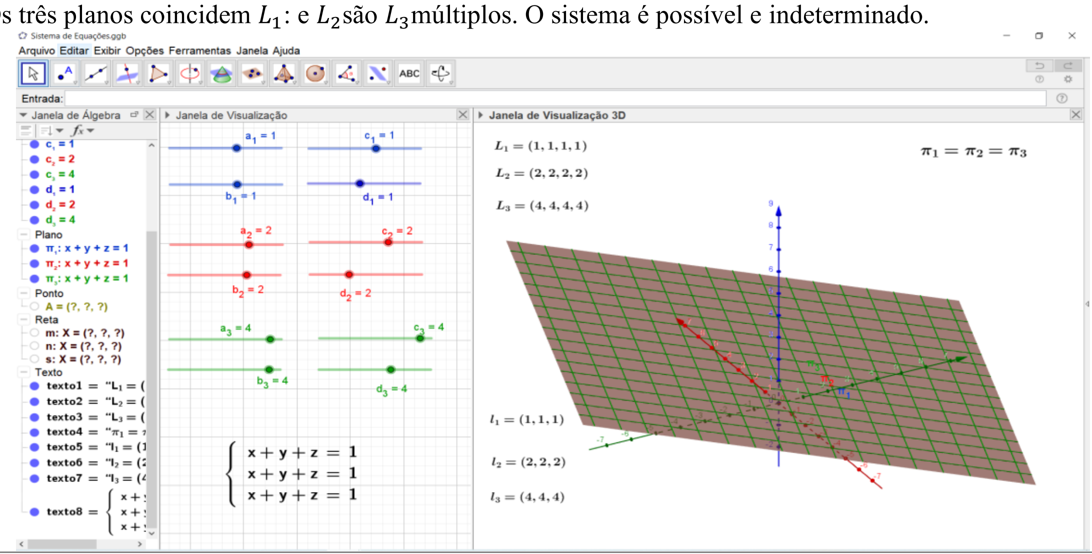
Este padrão de comportamento levantou considerações sobre a transição entre as diferentes fases do processo. Enquanto a utilização de construções no *software* pode ter sido eficiente para a visualização e exploração de propriedades durante as fases iniciais, a ausência dessa abordagem na situação de validação indica a necessidade de explorar estratégias mais integradas ao longo de todo o processo de resolução.

Na dialética de institucionalização, a pesquisadora enfatizou as estratégias identificadas e usou a construção no GeoGebra, no intuito de confrontar o modelo computacional (parte geométrica) com as formulações algébricas apresentadas. Além disso, ressaltou a relevância de abordar os sistemas em diferentes representações, incluindo os modelos algébrico, geométrico e matricial, e destacando a importância do uso do *software* como ferramenta didática. Isso foi essencial não apenas para estabelecer, mas também para validar as propriedades formais do conteúdo, proporcionando uma compreensão mais ampla e integrada dos sistemas lineares.

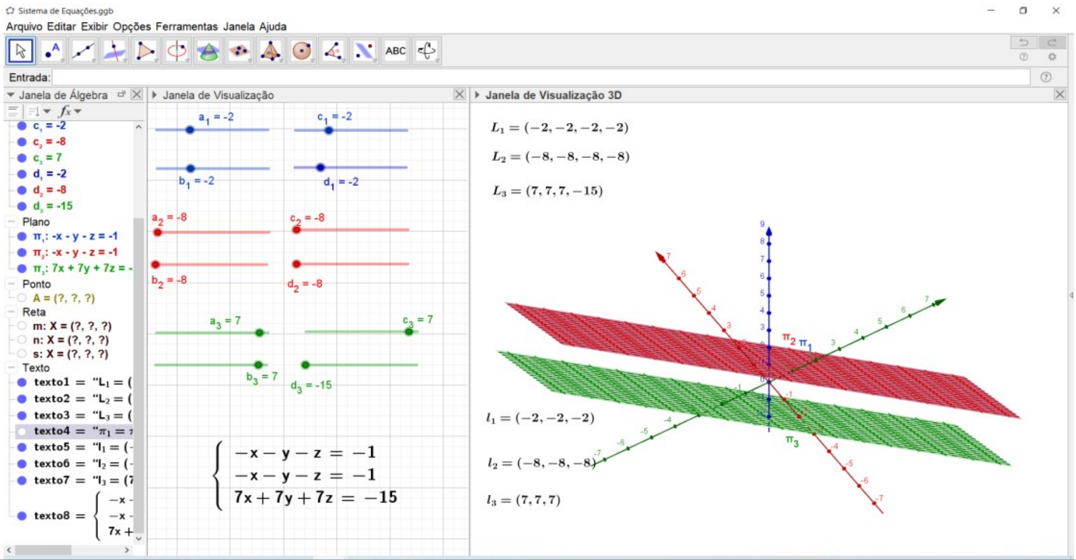
A pesquisadora destacou que a proposta de incorporar o GeoGebra visava explorar a dimensão geométrica dos sistemas, frequentemente negligenciada por professores. A intenção era facilitar a visualização de um conteúdo considerado abstrato pelos alunos, proporcionando uma abordagem mais intuitiva e visual de suas estruturas. Em seguida, foram destacadas algumas ferramentas que os professores poderiam ter utilizado no *software* para solucionar cada sistema, como destacado na análise *a priori*. As construções apresentadas na Figura 6 foram manuseadas pela professora pesquisadora no momento de institucionalização e expressão dos diversos tipos de representação dos planos.

Figura 6: Utilização do GeoGebra na fase de institucionalização

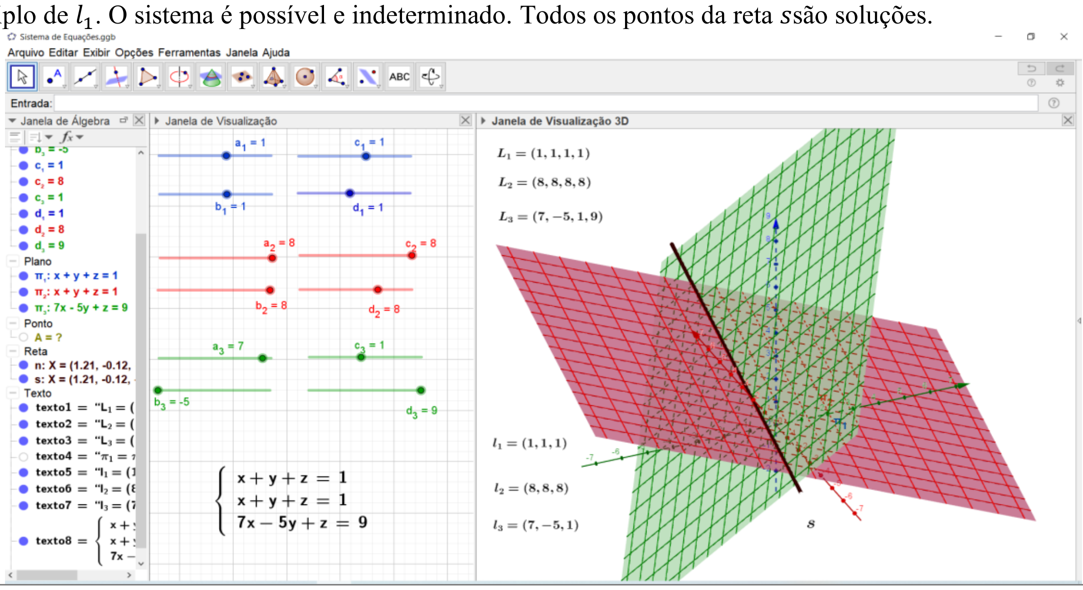
1. Os três planos coincidem L_1: e L_2são L_3múltiplos. O sistema é possível e indeterminado.



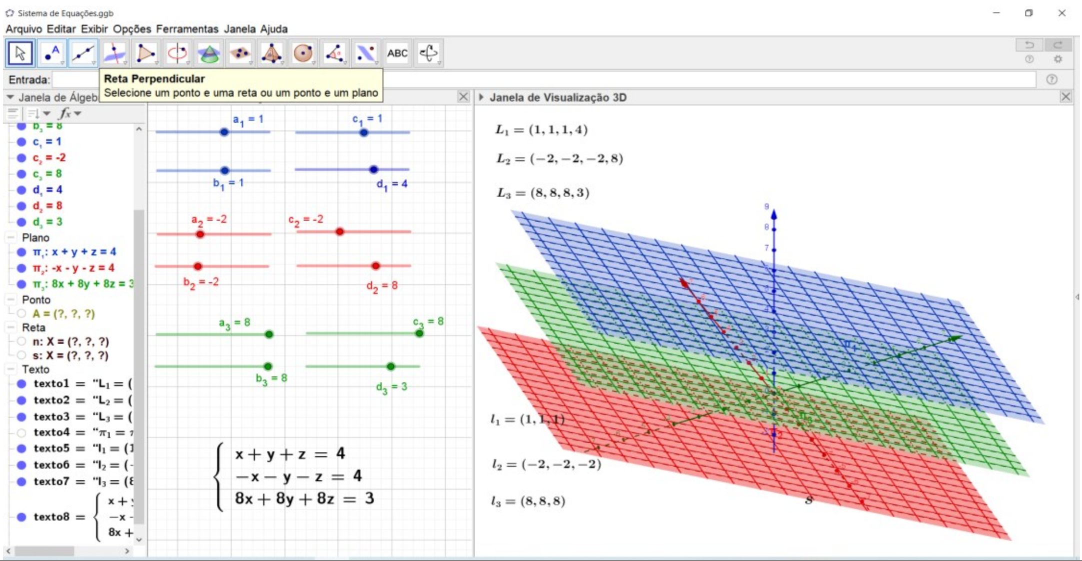
2. Dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles: $L_2 = kL_1$, então $l_2 = kl_1,\ l_3 = ml_1$. Mas L_3não é múltiplo de L_1. O sistema é impossível.



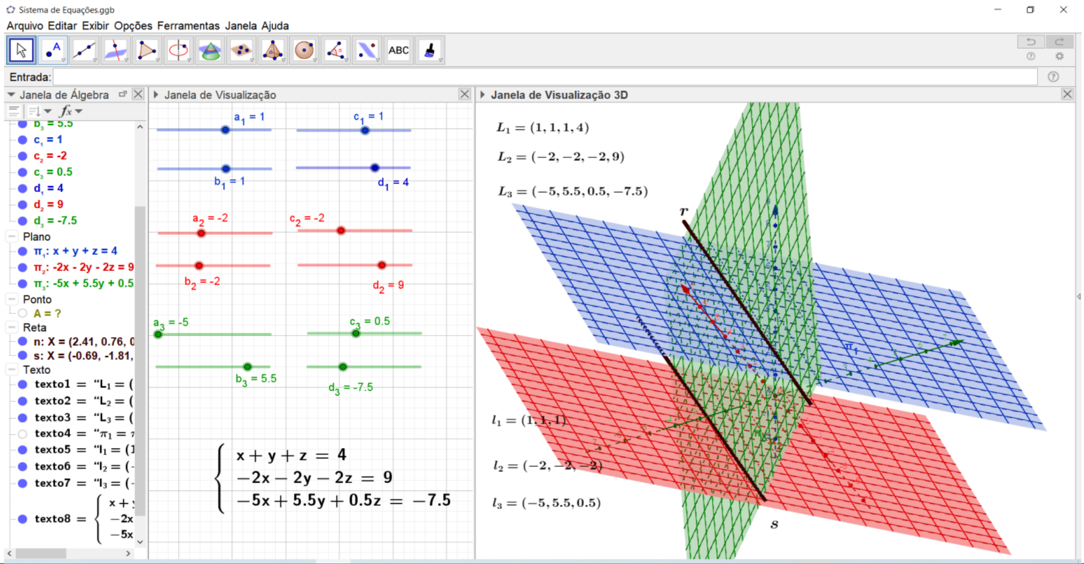
3. Dois planos coincidem e o terceiro os corta em linha reta: $L_2 = kL_1$, então $l_2 = kl_1$, $l_3 = ml_1$. Mas $l_3$não é múltiplo de l_1. O sistema é possível e indeterminado. Todos os pontos da reta $s$são soluções.



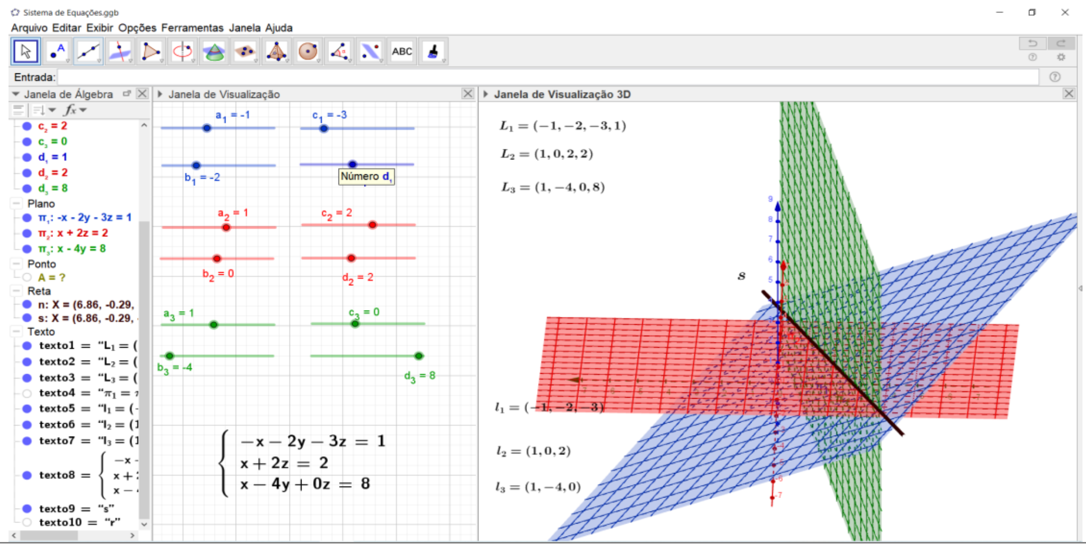
4. Os planos são paralelos dois a dois: L_1, L_2e L_3não são múltiplos dois a dois, mas l_1, l_2e $l_3$são. O sistema é impossível.



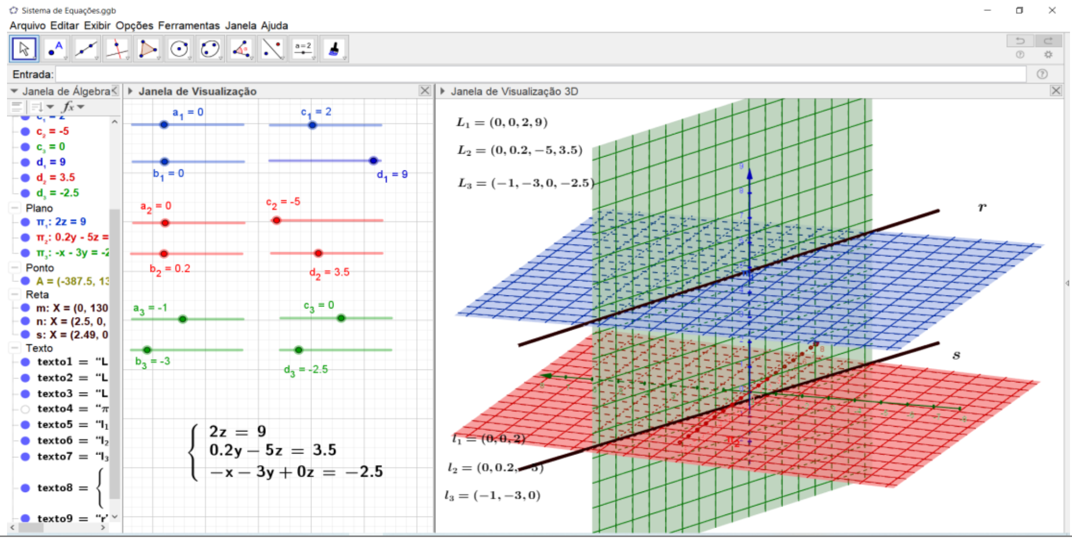
5. Dois planos são paralelos e o terceiro os intercepta a partir das linhas paralelas r e s: $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ e como são paralelos $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$,. $l_2 = kl_1$, L_2não é múltiplo de L_1, porque $\pi_1 // \pi_2$. Além disso, $l_3$não é múltiplo de l_1, porque $\pi_3 \nparallel \pi_1$. O sistema é impossível.



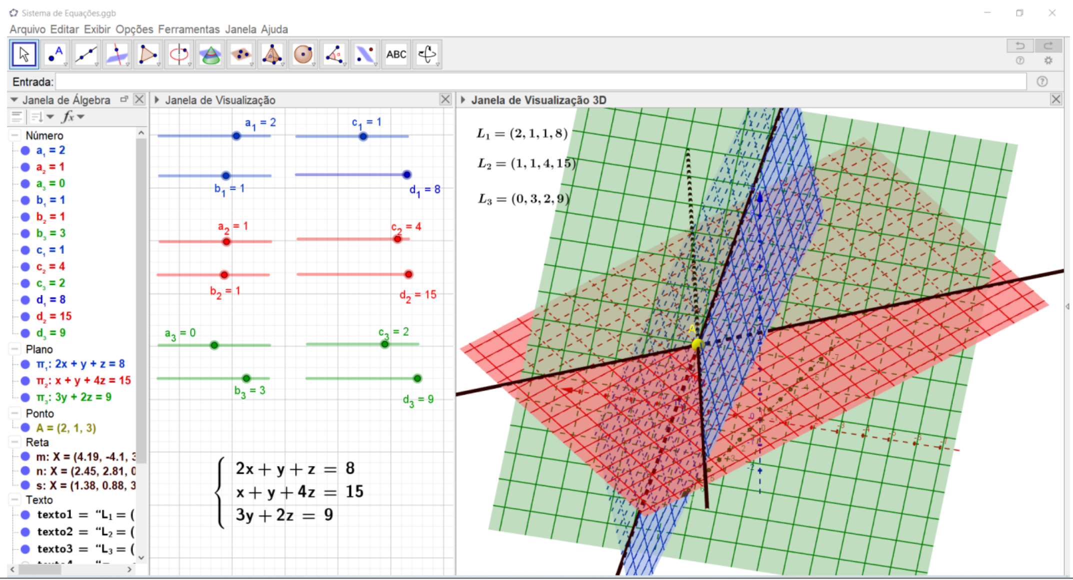
6. Os três planos são distintos e têm uma reta s em comum: l_1, l_2e l_3 não são múltiplos. L_3é uma combinação linear de L_1e L_3. Assim, $L_3 = kL_1 + mL_2$ O sistema é possível e indeterminado.



7. Os três planos se cruzam, dois a dois, ao longo das linhas paralelas, re s: os vetores l_1, l_2e $l_3$não são múltiplos. Uma combinação linear é possível $l_3 = kl_1 + ml_2$. Além disso $L_3 \neq kL_1 + mL_2$, O sistema é impossível.



8. Os três planos possuem apenas um ponto em comum: vetores l_1e $l_2$são $l_3$linearmente independentes.



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Diante disso, houve um momento de reflexão à respeito das diferentes representações de sistemas com mesma classificação e características distintas. A pesquisadora fez alguns questionamentos, no intuito de provocar a manifestação de *insights* sobre este aspecto.

> Pesquisadora: *Considerando a classificação de um sistema 3x3 como possível e indeterminado, vocês poderiam discutir e exemplificar algumas das diversas formas pelas quais essa indeterminação pode se manifestar nos coeficientes das incógnitas e nos termos independentes?*
>
> P5: *A indeterminação pode ocorrer quando as equações apresentam combinações lineares específicas nos coeficientes das incógnitas. Por exemplo, se as equações são proporcionais de uma maneira particular, isso pode levar a uma infinidade de soluções.*
>
> P2: *Isso! No exemplo que tu (pesquisadora) mostrou aí, por exemplo; nos sistemas 3x3 com planos paralelos, a gente pode destacar como visualmente os planos não têm nenhum ponto de interseção. Isso pode ser comparado a ter três retas paralelas no espaço tridimensional, indicando a falta de solução. Já nesse outro caso dos dois planos paralelos e um que os intersecta, eu mostro como a interseção com o terceiro plano não resulta em uma solução única. Esse software ai é bacana, porque a gente pode ilustrar isso geometricamente representando um sistema onde dois planos são paralelos e o terceiro corta esses planos sem criar um ponto de interseção comum.*

Pesquisadora: *Como essa variedade de situações influencia sua abordagem ao ensinar esse conceito aos alunos?*

P4: *Encorajo os alunos a realizarem uma análise algébrica detalhada dos sistemas 3x3, incentivando a identificação de combinações lineares nos coeficientes e termos independentes. Isso promove uma compreensão mais sólida das diferentes formas de indeterminação.*

P2: *Eu destaco a importância de explorar visualmente esses conceitos. Utilizo representações gráficas para mostrar aos alunos como diferentes combinações lineares nos coeficientes e termos independentes se traduzem em sobreposições ou interseções específicas no espaço tridimensional.*

P3: *É importante também deixar claro para o aluno que a indeterminação não significa a falta de solução, mas sim uma infinidade de soluções. Eu destaco como diferentes configurações nos coeficientes e termos independentes podem levar a uma diversidade de respostas.*

À medida que ocorria a reflexão, observou-se uma troca de saberes entre os professores, caracterizando uma transposição profissional entre os mais experientes e os noviços. Além disso, foi possível identificar suas concepções pragmáticas em relação ao problema aplicado, permitindo sugestões pedagógicas para aprimorar o ensino desse conteúdo matemático.

7 Análise *a posteriori* e validação interna

Conforme Almouloud (2007), a análise *a posteriori* visa relacionar as observações aos objetivos predefinidos e avaliar a reprodutibilidade, bem como a regularidade dos fenômenos didáticos identificados. Nesse contexto, realiza-se a análise dos dados coletados durante a fase experimental, confrontando-os com a análise *a priori*. Isso permite validar os objetivos propostos por meio da aplicação das situações didáticas e, neste caso, das Situações Didáticas Profissionais.

Ainda de acordo com Almouloud e Coutinho (2008), uma das características da ED que merece destaque é a forma de validação interna. Isso significa que, ao conceber e executar uma etapa ou uma ED, a validação ocorre como parte integrante do processo. Nessa etapa é feita uma comparação entre as perspectivas teóricas *a priori* e o desenvolvimento real no contexto da sala de aula. O confronto entre teoria e a prática orienta ajustes, melhorias e/ou novas reflexões no processo de ensino.

Ao longo desta seção, discutimos o progresso do experimento e realizamos uma análise da sessão de ensino, com base na TSD e na EDF, no intuito de compreender aspectos relacionados à prática profissional do professor em formação. O foco está na validação interna das situações, resultantes da interação entre o professor e os conhecimentos provenientes da experiência na SDP proposta.

A SDP teve como intuito discutir a compreensão da representação gráfica de sistemas, buscando fomentar a reflexão sobre esse aspecto específico. Na dialética de ação era esperado que os professores utilizassem ativamente o *software* GeoGebra para explorar os sistemas 3×3, observando sua manipulação dinâmica. No entanto, três professores (P1, P3, P4) optaram por resolver individualmente os sistemas, de forma algébrica. Contrário ao que havia sido perspectivado, percebemos que houve resistência ao uso exclusivo do GeoGebra como suporte.

Na dialética de formulação era almejada a interação entre os professores, a partir de diálogos colaborativos, à medida que os participantes conduziriam de forma autônoma, conforme os princípios da TSD, as fases de formulação e validação da SDP. A intervenção da pesquisadora estimulou a interação e diálogos colaborativos, em que os professores formalizaram suas conjecturas e avançaram na etapa de formulação. Os professores apresentaram diferentes estratégias para a resolução dos sistemas, combinando abordagens algébricas e geométricas. Essa diversidade enriqueceu a compreensão do tópico.

Contudo, era esperado que os professores utilizassem a construção no GeoGebra na dialética de validação, consolidando a aprendizagem e reconhecendo a utilidade prática da ferramenta. Entretanto, nenhum dos professores usou a construção no GeoGebra durante a fase de validação, indicando uma desconexão entre a ênfase dada à ferramenta na institucionalização e sua aplicação prática.

Por fim, na dialética de institucionalização, era almejado que os professores reconhecessem a relevância do GeoGebra, sendo motivados a incorporá-lo em sua prática de ensino ao validar as propriedades formais do conteúdo. Houve uma ênfase na relevância do GeoGebra na fase de institucionalização, destacando a importância de abordar os sistemas em diversas representações. No entanto, a aplicação prática durante a validação foi limitada.

Essa análise destaca a complexidade da implementação de estratégias inovadoras durante a formação de professores, mostrando como as expectativas iniciais podem não ser plenamente satisfeitas devido a fatores individuais e resistência ao novo.

A pesquisadora enfatizou a relevância do GeoGebra como uma ferramenta para explorar a dimensão geométrica dos sistemas lineares, geralmente não apresentada pelos professores ou contemplada nos livros-texto. Essa orientação pode ajudar os professores a perceber que o GeoGebra não é apenas uma ferramenta de exploração visual, mas também um meio para validar as conclusões obtidas por meio de métodos mais tradicionais, como a resolução algébrica.

Durante a sessão, houve uma reflexão sobre as várias representações de sistemas com a mesma classificação, mas com características distintas. Por exemplo, sistemas indeterminados podem apresentar duas representações gráficas diferentes, apesar de possuírem a mesma classificação. Essa análise levou os professores a considerar diferentes abordagens e representações de conceitos matemáticos, promovendo uma compreensão mais aprofundada dos sistemas lineares 3×3. Além disso, a pesquisadora estimulou a discussão sobre as diversas formas nas quais a indeterminação pode se manifestar nos coeficientes das incógnitas e nos termos independentes.

Durante os diálogos colaborativos, os professores compartilharam suas concepções sobre a análise de sistemas lineares 3×3. As trocas incluíram discussões sobre a complexidade adicional introduzida pela terceira variável e estratégias para abordar a proporcionalidade entre os coeficientes e termos independentes. Isso evidenciou uma troca de conceitos epistêmicos, relacionados a uma compreensão mais profunda dos sistemas lineares.

A pesquisadora instigou a reflexão sobre as formas de indeterminação nos sistemas 3×3, incluindo combinações lineares específicas entre os coeficientes. Os professores participaram da discussão, compartilhando suas visões sobre como a indeterminação pode ocorrer e destacando a importância de mostrar visualmente esses conceitos. Isso representou uma troca de conceitos epistêmicos sobre a natureza dos sistemas lineares e as nuances da indeterminação.

Diante disso, buscando refletir sobre as falas dos professores, percebemos a afirmativa de que o uso desses recursos precisa ser explorado. Embora a realidade da sala de aula nem sempre o permita (P1), eles reconhecem a necessidade de integração de tecnologias, ao mesmo tempo em que apontam para desafios práticos enfrentados em seu uso. As falas de P2 e P4 ressaltam a importância dos recursos tecnológicos ao proporcionar uma visão geométrica do conteúdo, destacando como essa abordagem transcende o cálculo, adentrando na visualização das soluções dos sistemas.

Assim, a análise conjunta das respostas sugere que a proposta de incorporar recursos tecnológicos contribuiu positivamente para a formação dos sujeitos, mesmo considerando desafios práticos e limitações presentes na realidade das escolas.

8 Considerações Finais

Os sistemas lineares, essenciais em alguns tópicos na matemática, apresentam desafios notáveis no processo de ensino. Este artigo se propôs a explorar alguns destes desafios por meio de uma Situação Didática Profissional (SDP), desenvolvida como parte de uma pesquisa de mestrado, com abordagem metodológica pautada na Engenharia Didática de Formação. Além disso, destaca-se o emprego do GeoGebra como uma ferramenta para aprimorar a compreensão prática dos sistemas lineares.

Ao entrar no cenário educacional, é evidente que a inclusão de sistemas lineares no currículo frequentemente traz consigo desafios complexos. Esta pesquisa se baseou na premissa de que abordar esses desafios vai além de uma análise teórica tradicional; requer uma imersão prática no ambiente profissional dos educadores, com o auxílio de ferramentas dinâmicas, como *softwares* e aplicativos. Estas ferramentas permitem que os alunos visualizem a abstração presente nos sistemas lineares e compreendam as nuances e características do conhecimento matemático de forma mais eficaz.

A SDP desenvolvida nesta pesquisa explorou a abordagem geométrica dos sistemas lineares, utilizando o GeoGebra como ferramenta visual e interativa. Esta escolha não apenas proporcionou uma abordagem mais dinâmica dos conceitos matemáticos, mas também ofereceu aos professores já atuantes em sala de aula uma experiência *hands-on* valiosa.

A experiência dos professores, aliada à EDF e a TSD, proporcionou alguns conhecimentos cruciais sobre os desafios no ensino de sistemas lineares. Além disso, apesar da pouca utilização, ressalta-se o papel do GeoGebra na mediação de uma aprendizagem prática e intuitiva, proporcionando um ambiente que transcende as barreiras tradicionais e promovendo uma compreensão sólida e observação eficaz dos conceitos matemáticos.

Para concluir, este artigo busca contribuir para a melhoria contínua do ensino de conceitos essenciais, como os sistemas lineares, ao integrar tecnologias interativas e práticas inovadoras ao ambiente educacional por meio da construção desta SDP. Durante a reflexão realizada, observou-se uma troca enriquecedora de saberes entre os professores experientes e os novatos, caracterizando uma transposição profissional significativa. Além disso, foi possível identificar suas concepções pragmáticas em relação ao problema, o que permitiu a formulação de sugestões pedagógicas para aprimorar o ensino desse conteúdo matemático.

Agradecimentos

O terceiro autor agradece o financiamento da pesquisa realizada no Brasil, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), correspondente ao processo de nº 305495/2022-4.

Referências

Abar, C. A. A. (2020). A transposição didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, *9*(1), 59-75.

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba, PR: EdUFPR.

Almouloud, S. A. (2011). PCMA debate Engenharia didática de Segunda Geração. Entrevista concedida a Ana Paula Machado e laressa Santos. *Jornal da UEM*, *102*.

Almouloud, S. A. & Coutinho, C. Q. S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *3*(1), 62-77.

Almouloud, S. A. & Silva, M. J. F. (2012). Engenharia Didática: evolução e diversidade. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 22-52.

Alves, F. R. V. (2018). Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos números (Generalizado) de Catalan (NGG). *Educação Matemática Pesquisa, 20*(2), 47-83.

Alves, F. R. V. (2020). Didática Profissional (DP) e a Didática das Ciências e Matemática (DCeM): Uma perspectiva de complementaridade e implicações para o trabalho do professor. *Investigações em Ensino de Ciências*, *25*(3), 397-432.

Alves, F. R. V. (2021). Transposição Didática (TD) e Transposição Profissional (TP): uma discussão sobre a noção de competência profissional do professor de matemática. *Revista Diálogo Educacional*, *21*(69), 901-921.

Alves, F. R. V. & Borges Neto, H. (2012). Engenharia Didática para a exploração didática da tecnologia no ensino no caso da Regra de L'Hôpital. *Educação Matemática Pesquisa*, *14*(2), 337-367.

Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. M. (2019). Situação Didática Profissional: um exemplo de aplicação da Didática Profissional para a pesquisa objetivando a atividade do professor de Matemática no Brasil. *Indagatio Didactica*, *11*(1), 103-129.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathemátiques*, *9*(3), 281-308.

Artigue, M. (2014). Perspectives on design research: the case of didactical engineering. In: A. Bikner-Ahsbahs; C. Knipping & N. Presmeg. (Org.). *Approaches to qualitative research in mathematics education.* (pp. 467-496). Netherlands, Dordrecht: Springer.

Artigue, M. (2020). Didactic engineering in mathematics education. In: S. Lerman. (Org.) *Encyclopedia of Mathematics Education.* (pp. 202-206). Switzerland, Cham: Springer.

Battaglioli, C. S. M. (2008). *Sistemas Lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos.* 113f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.

Boyer, C. B. (2010). *História da Matemática*. (3. ed.). São Paulo, SP: Blücher.

Brandl, E. (2018). *Desenvolvendo sistemas lineares para o ensino médio, com base nos registros de representação semiótica de Duval.* 96f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Regional de Blumenau. Blumenau, SC.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasília, DF : MEC/SEF.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-116.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990*. Tradução de N. Balacheff; M. Cooper; R. Sutherland & V. Warfield. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo da Teoria das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino.* São Paulo, SP: Ática.

Dante, L. R. (2013). *Matemática: contexto e aplicações* (v. 2, 2. ed.). São Paulo, SP: Ática.

Fernandes, W. M. A. & Miyasaki, R. (2011). Sistemas Lineares e Aplicações. *Anais VI Jornada de Pesquisa e Pós-Graduação e Semana Nacional de Ciência e Tecnologia* (pp. 121-130). Anápolis, GO.

Freitas, I. M. (1999). *Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu Significado para o Aluno.* 96f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.

Jordão, A. L. I. (2011). *Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º do Ensino Médio.* 48f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.

Kitzinger, J. (2000). Focus groups with users and providers of health care. In: C. Pope & N. Mays, N. (Org.). *Qualitative research in health care.* (2. ed., pp. 21-31) Londres, UK: BMJ Books.

Pastré, P. (1999). La conceptualisation dans l'action: bilan et nouvelles perspectives. *Éducation Permanente*, *3*(2), 13-35.

Reis, E. S. (2010). *O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras.* 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Campo Grande, MS.

Silva, H. N. & Abar, C. A. A. P. (2016). A utilização do GeoGebra na reconstrução de atividades do Imagiciel. In: *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática*. (pp. 1-12). São Paulo, SP.

Smole, K. S. & Diniz, M. I. (2003). *Matemática: Ensino Médio.* (v. 2, 3. ed). São Paulo, SP: Saraiva.

Sousa, R. C.; Alves, F. R. V. & Fontenele, F. C. F. (2020). Engenharia Didática de Formação (EDF): uma proposta de situação didática do ENEM com o uso do software GeoGebra para professores de matemática no Brasil. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, *26*, 90-99.

Sousa, R. T.; Alves, F. R. V.; Aires, A. P. & Catarino, P. M. M. C. (2023). O ensino da cônica parábola: uma abordagem via Categorias Intuitivas e Teoria das Situações Didáticas. *Indagatio Didactica, 15*(3), 207-234.