

## Não decore demonstrações de teoremas! A Geometria Moderna de Osvaldo Sangiorgi

**Ana Paula Jahn**

Universidade de São Paulo  
São Paulo, SP — Brasil

✉ [anajahn@ime.usp.br](mailto:anajahn@ime.usp.br)

 0000-0003-0515-7536


**Maria Célia Leme da Silva**


Universidade Federal de São Paulo  
São Paulo, SP — Brasil

✉ [celia.leme@unifesp.br](mailto:celia.leme@unifesp.br)

 0000-0001-6029-0490




2238-0345 

10.37001/ripem.v13i4.3622 

Recebido • 24/05/2023

Aprovado • 10/08/2023

Publicado • 01/09/2023

Editor • Gilberto Januario 

**Resumo:** Este artigo tem por objetivo examinar como se constituiu a geometria dedutiva em duas coleções didáticas de Osvaldo Sangiorgi — a pré-moderna (década de 1950) e a moderna (década de 1960). A pergunta norteadora do estudo é: como Sangiorgi altera a proposta de uma geometria dedutiva para a 3ª série ginásial na coleção moderna comparativamente à coleção pré-moderna? Examina-se detalhadamente os postulados, os teoremas e as demonstrações, dando ênfase aos aspectos quantitativos e qualitativos, bem como às recomendações metodológicas. As análises revelam que a coleção moderna trouxe alterações significativas tanto no âmbito da geometria euclidiana, de uma *geometria a ensinar*, como nos aspectos didáticos metodológicos ao propor a inserção de exercícios exploratórios e experimentais, diferentes registros de representações, o que corresponde, em nosso ponto de vista, a uma *geometria para ensinar*, que pode ser interpretada como uma geometria intuitiva, retirada das 1ª e 2ª séries no Programa Mínimo de 1951.

**Palavras-chave:** Geometria dedutiva. Livro didático. Movimento da Matemática Moderna. Ensino ginásial.

## Don't memorize theorem proofs! The Modern Geometry of Osvaldo Sangiorgi

**Abstract:** This paper aims to examine how deductive geometry was constituted in two didactic book collections by Osvaldo Sangiorgi — named by pre-modern (1950s) and the modern (1960s) ones. The guiding question of the study is: how does Sangiorgi change the proposal of a deductive geometry for the 3rd grade of junior Brazilian high schools in the modern collection compared to the pre-modern collection? Postulates, theorems, and demonstrations are examined in detail, emphasizing the quantitative and qualitative aspects, as well as the methodological recommendations. This analyzes shows that the modern collection brought about significant changes and contributions both in the scope of Euclidean geometry, of a geometry to teach, and in the methodological didactic aspects by proposing the insertion of exploratory and experimental exercises, different registers of representations, which means, in our point of view, a geometry for teaching, which can be interpreted as an intuitive geometry, taken from the 1st and 2nd grades of the Brazilian Minimum Program of 1951.

**Keywords:** Deductive geometry. Textbook. Modern Mathematics Movement. Junior high school.

## ¡No memorices las demostraciones de teoremas! La Geometría Moderna de Osvaldo Sangiorgi

**Resumen:** El artículo tiene como objetivo examinar cómo se constituyó la geometría deductiva en dos colecciones didácticas de Osvaldo Sangiorgi — la premoderna (década de 1950) y la moderna (década de 1960). La pregunta orientadora del estudio es: ¿cómo cambia Sangiorgi la propuesta de una geometría deductiva para el 3° año de secundaria en la colección moderna en comparación con la colección premoderna? Se examinan en detalle postulados, teoremas y demostraciones, enfatizando aspectos cuantitativos y cualitativos, así como recomendaciones metodológicas. Los análisis revelan que la colección moderna trajo alteraciones significativas tanto en el ámbito de la geometría euclidiana, de una geometría a enseñar, como en los aspectos didácticos metodológicos al proponer la inserción de ejercicios exploratorios y experimentales, diferentes registros de representaciones, lo que corresponde, en nuestro punto de vista, al punto de vista, a una geometría para enseñar, que se puede interpretar como una geometría intuitiva, tomada de los grados 1° y 2° del Programa Mínimo de 1951.

**Palabras clave:** Geometría deductiva. Libro de texto. Movimiento Matemático Moderno. Escuela secundaria.

## 1 Considerações iniciais

O tema das propostas para o ensino de geometria durante o período do Movimento da Matemática Moderna<sup>1</sup> (MMM) é controverso, considerando a complexidade do momento em questão, de âmbito internacional, com perspectivas e propostas diferenciadas em como desenvolver uma geometria dedutiva plausível para estudantes do antigo curso secundário, designado como curso ginasial<sup>2</sup>, durante as décadas de 1950 e 1960, como apontou o estudo de Leme da Silva (2022). Para além da complexidade do MMM, não se pode desconsiderar, na tarefa de produção de uma representação sobre o passado do ensino de geometria, a especificidade do nosso país, que, por ter dimensões continentais, teve direcionamentos distintos a depender do estado e da região.

Diante do exposto e de certas representações sobre o passado, que tendem a enfatizar aspectos negativos referentes ao ensino de geometria e o MMM<sup>3</sup>, consideramos pertinente a retomada de investigações de natureza histórica sobre o ensino de geometria durante o referido Movimento<sup>4</sup>. Entretanto, neste novo desafio, o objeto de estudo centrar-se-á em saberes específicos<sup>5</sup>, particularmente aqueles que as pesquisas finalizadas já identificaram como de alterações significativas na cultura escolar brasileira.

A perspectiva de investigar saberes particulares possibilita ainda mobilizar o referencial teórico do grupo suíço coordenado por Hofstetter, em especial, os conceitos de *saber a ensinar* e *saber para ensinar*. Valente e Bertini (2022) adaptaram os termos para *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*, analisando-os no contexto das relações produzidas na cultura escolar, de modo a construir a elaboração de um objeto teórico de pesquisa, designado por *matemática do ensino*. No nosso estudo, estamos considerando a *geometria a ensinar* e a *geometria para ensinar* como constituintes interligadas para a configuração da *geometria do*

<sup>1</sup> Desde a década de 1950, criam-se comissões, grupos de estudo e realizam-se seminários para discutir propostas de mudança no ensino da Matemática, tanto na Europa como na América. As propostas defendem a unificação dos diversos campos da Matemática, aproximando o ensino realizado na Educação Básica com o da universidade, o que corresponde à linguagem e à estrutura empregada pelos matemáticos da época.

<sup>2</sup> Hoje, o curso ginasial corresponde aos Anos Finais do Ensino Fundamental, do 6° ao 9° ano.

<sup>3</sup> Cita-se Pavanello (1993) e Caldatto e Pavanello (2015).

<sup>4</sup> A segunda autora participou do Projeto de Cooperação Internacional CAPES/GRICES intitulado *A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: estudos históricos comparativos* (2006-2010) e investigou especificamente o ensino de geometria.

<sup>5</sup> O projeto *História da geometria do ensino e o MMM*, no qual participam as duas autoras, submetido à FAPESP, tem por objetivo investigar saberes geométricos específicos desde a década de 1950.

ensino durante o MMM.

Outra necessidade identificada no processo investigativo foi conhecer acerca das normativas anteriores ao MMM. Dessa maneira, realizamos um estudo preliminar<sup>6</sup> sobre o ensino de geometria nas Reformas Francisco Campos, de 1931; Gustavo Capanema, de 1942; e Simões Filho, de 1951, esboçado sinteticamente no Quadro 1.

**Quadro 1:** O ensino de geometria nos currículos prescritos (1931-1951)

Reforma	Organização da Geometria	Instruções/Orientações
Campos (de 1931)	<i>Iniciação Geométrica:</i> 1 <sup>a</sup> e 2 <sup>a</sup> séries <i>Geometria:</i> 3 <sup>a</sup> , 4 <sup>a</sup> e 5 <sup>a</sup> séries	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Curso propedêutico de geometria</li> <li>▪ Partir da intuição para atingir gradualmente a exposição formal: da experimentação e percepção sensorial para o raciocínio analítico</li> </ul>
Capanema (de 1942)	<i>Geometria Intuitiva:</i> 1 <sup>a</sup> e 2 <sup>a</sup> séries <i>Geometria Dedutiva:</i> 3 <sup>a</sup> e 4 <sup>a</sup> séries	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Geometria intuitiva como transição suave entre experiências com formas e concepção dedutiva da geometria</li> </ul>
Simões Filho (de 1951)	<i>Medidas:</i> 1 <sup>a</sup> série <i>Geometria:</i> 3 <sup>a</sup> e 4 <sup>a</sup> séries	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Não dispensar o apelo à intuição</li> <li>▪ Despertar aos poucos o sentimento da necessidade da justificativa, da prova e da demonstração</li> </ul>

**Fonte:** Adaptado pelas autoras de Jahn e Magalhães (2023)

O Quadro 1 indica que a geometria dedutiva foi a permanência entre as três normativas, sendo que a de 1951 é exclusiva e restrita para as 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> séries ginasiais. Podemos dizer que a chegada do MMM encontra no Brasil a presença marcante de uma geometria dedutiva para o curso ginasial. Assim, ficamos instigadas em compreender como os saberes que traduzem a proposta normativa, ou seja, os teoremas e suas demonstrações foram interpretados e propostos nos livros didáticos da década de 1950 e a partir de 1960, com a inserção das ideias modernizadoras.

Nesse contexto, o presente artigo<sup>7</sup> tem por objetivo examinar como se constituiu a geometria dedutiva nas duas coleções didáticas de Osvaldo Sangiorgi (OS) — a primeira designada pré-moderna, referente à década de 1950; e a segunda, moderna, lançada na década de 1960 — ambas publicadas pela Cia. Editora Nacional, em São Paulo. As coleções são consideradas verdadeiros *best sellers* em número de edições e, nesse sentido, os contextos das produções didáticas e do referido autor, certamente, necessitam ser explicitadas de modo a compreender o sucesso das coleções.

A escolha dos livros didáticos como fonte de pesquisa para conhecer e compreender a história da geometria escolar justifica-se por ser um dos elementos centrais nas práticas pedagógicas da escola, como um interpretador das normas prescritivas, conforme nos indica Munakata (2016, p. 122),

noção de cultura escolar refere-se não somente a normas e regras, explícitas ou não, símbolos e representações, além dos saberes prescritos, mas também, e sobretudo, a

<sup>6</sup> Os resultados parciais podem ser lidos em Pastor e Leme da Silva (2023) e Jahn e Magalhães (2023).

<sup>7</sup> Esse artigo é recorte de uma pesquisa de pós-doutorado, desenvolvida pela primeira autora sob a supervisão da segunda autora, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista.

práticas, apropriações, atribuições de novos significados, resistências, o que produz configurações múltiplas e variadas, que ocorrem tipicamente na escola. [...] Uma dessas coisas peculiares à escola é precisamente o livro didático. Certamente ele pode estar em outros lugares, como na biblioteca de um colecionador excêntrico, nos gabinetes do avaliador ou do pesquisador, mas a sua existência só se justifica na e pela escola.

Cabe lembrar que, na década de 1950, o estado de São Paulo assiste a um crescimento em várias dimensões: populacional, social e econômico, transformando-se no maior centro industrial latino-americano. No campo educacional, registra-se o aumento expressivo da população escolar — em 1940, a rede de ginásios estaduais era formada por 37 estabelecimentos no interior e 3 na capital, passando, em 1950, para 143 ginásios no interior e 12 na capital —, acompanhado do aumento na produção de livros didáticos (Valente, 2008).

De outra parte, a formação acadêmica de Osvaldo Sangiorgi (1921-2017)<sup>8</sup> incluiu a Licenciatura em Ciências Matemáticas, em 1941, pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras, Seção de Educação, da Universidade de São Paulo (USP), o que significava uma referência para o curso secundário da época. Além disso, Valente (2008) sinaliza que os filhos da elite paulistana formada na década de 1950 tinham a assessoria dos melhores professores com aulas particulares e cursos preparatórios, sendo “OS exemplo daqueles professores excelentes, disputados a peso de ouro pelas famílias abastadas paulistanas” (Valente, 2008, p. 16). Em síntese, OS conjugava reconhecimento por sua formação na USP e pela sua atuação como professor, elementos que foram decisivos para a produção de livros didáticos com grande circulação.

Neste artigo, analisamos primeiramente a coleção pré-moderna de livros para o ginásio, período que precede o MMM:

Será o *Matemática – curso ginásial* um dos *best-sellers* da Editora, lançado no ano de 1953. Em fevereiro desse ano é editado o volume da coleção destinado à 1ª. série ginásial, com tiragem de exatos 20.213 exemplares. Em julho do mesmo ano, com tiragem de 20.216 exemplares, e novembro, com tiragem de 25.266, saem, respectivamente, os volumes para a 2ª e 3ª séries. Ao que tudo indica, a acolhida da coleção foi muito boa, dado que já no final de 1953, ocorre uma nova tiragem do primeiro volume: são mais 20.167 livros para serem utilizados nas primeiras séries ginásiais, de acordo com o *Mapa de Edições* da Cia. Editora Nacional (Valente, 2008, p. 19, grifos do autor).

No capítulo intitulado *Osvaldo Sangiorgi, um best seller*, Valente (2008) apresenta inúmeros dados, argumentos e justificativas para nos convencer do atributo de *best seller* designado ao livro do professor Sangiorgi. Ele já era autor reconhecido na Cia. Editora Nacional, foi um assíduo colaborador da revista *Atualidades Pedagógicas* da mesma editora entre 1954 e 1960, criticando a Reforma Francisco Campos, de 1931, a Reforma Capanema, de 1942 e a Reforma Simões Filho, de 1951. Sangiorgi ainda utilizou os Congressos de Ensino de Matemática<sup>9</sup> para debater o ensino ginásial, trazendo reflexos para a coleção pré-moderna.

No I Congresso, realizado em Salvador/BA, em 1955, colocou-se em pauta o Programa Mínimo, de 1951, da chamada Reforma Simões Filho e a sua inexecutabilidade com carga

<sup>8</sup> Um estudo mais detalhado sobre Osvaldo Sangiorgi e o MMM pode ser lido no livro *Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno* (Valente, 2008).

<sup>9</sup> O I Congresso ocorreu em 1955, na Bahia; o II no Rio Grande do Sul, em 1957; o III no Rio de Janeiro, em 1959; o IV no Pará, em 1962 e o V em São Paulo, em 1966.

horária de três horas semanais para o ensino de Matemática. Todos esses fatores corroboram o aumento da tiragem das edições; em 1957, o primeiro volume atingiu a marca de 100 mil exemplares, permanecendo até 1963, ano em que foi publicada a 134ª edição do livro.

Sangiorgi fecha a década de 1950 com a sua coleção de livros para o ginásio como *best seller* da Cia. Editora Nacional, levando adiante o debate sobre o ensino de Matemática em várias esferas: órgãos da educação paulista; congressos; bancas de concursos para contratação de professores e bancas para estudantes nos exames de admissão, não deixando de criticar as determinações federais pautadas no Colégio Pedro II e o Programa Mínimo de 1951. Paralelamente aos movimentos de OS, em 1958, novas determinações flexibilizaram a elaboração de programas de ensino de Matemática, afrouxando a centralização do ensino secundário brasileiro (Valente, 2008).

Para além de sua articulação em âmbito nacional, OS vai aos Estados Unidos, com bolsa *Pan American Union* e *National Science Foundation*, realizar estágio na Universidade de Kansas, entre julho e agosto de 1960. Quando retorna ao Brasil, imediatamente articula mudanças no programa de Matemática a partir da experiência conhecida no exterior. Estava construído o cenário para a entrada da Matemática Moderna, por meio dos livros didáticos para o ginásio. Ainda segundo Valente (2008), em 1963, para uso no ano letivo de 1964, a Cia. Editora Nacional lançou 240 mil exemplares do Volume 1 da obra *Matemática – Curso moderno*.

No presente estudo, a coleção moderna de Sangiorgi publicada em 1964<sup>10</sup> foi comparada à coleção da década de 1950<sup>11</sup>, tendo em vista que a nova apresenta alterações significativas na organização e proposta de ensino de Matemática. Um caráter inovador presente na coleção moderna foi a publicação do *GUIA para uso dos PROFESSORES*, um para cada volume. Valente (2008), uma vez mais, sustenta em seus argumentos que OS permanece na posição de *best seller* da Cia. Editora Nacional, com a coleção *Matemática – Curso Moderno*:

O sucesso da obra foi sendo confirmado pelas novas edições do primeiro volume: em 1965, mais de 250 mil novos livros são editados e assim, anualmente, o livro tem tiragens na casa dos 250 mil exemplares, até 1967, alcançando a sua 10ª. edição, como atesta o “Mapa de Edições” da Editora (Valente, 2008, p. 31).

Acreditamos ter, com base no minucioso estudo histórico realizado por Valente (2008), justificado adequadamente o papel de destaque que tiveram as duas coleções de OS. Vale reafirmar que estamos analisando as duas coleções exclusivamente nas décadas de 1950 e 1960, período que antecede as mudanças que se manifestaram na legislação educacional a partir da década de 1970, especialmente depois da Lei nº 5692/71<sup>12</sup>.

Concordando com o historiador Marc Bloch (2001), ao afirmar que a história não é a ciência do passado, mas sim a ciência dos seres humanos no tempo, acreditamos ser relevante compreender a trajetória profissional e de formação do homem que produziu as coleções didáticas em análise, no seu devido tempo e espaço.

## 2 Breve revisão bibliográfica

Em sua dissertação, Santos (2023) realizou um estudo hermenêutico sobre as

<sup>10</sup> Analisamos a 3ª Edição, publicada em 1967.

<sup>11</sup> Analisamos a 35ª Edição, publicada em 1958.

<sup>12</sup> A Lei nº 5692/71 propôs uma nova estrutura para Educação Básica, que passou a ser: o ensino de 1º grau, com oito anos de escolaridade, e o ensino de 2º grau, com três anos.



demonstrações matemáticas no MMM, buscando significados para o que é demonstração matemática no decorrer da história da Matemática. Acerca das demonstrações nas propostas pedagógicas de sala de aula, a pesquisa indicou que os professores deveriam empregar a abordagem dedutiva, adotando linguagem precisa e rigorosa, e que seu uso estava sempre relacionado ao estudo da geometria.

No nosso estudo, o objeto de investigação é precisamente a geometria dedutiva prescrita a partir da 3ª série ginásial, na qual as demonstrações constituem elemento central. Desse modo, a intenção é realizar um estudo comparativo entre as duas coleções de OS, no que diz respeito à geometria dedutiva e, mais especificamente, com relação às demonstrações, de modo a identificar a apropriação feita pelo autor sobre as propostas modernizadoras.

Leme da Silva (2008) realizou um primeiro estudo acerca do ensino de geometria, de maneira ampla, sobre as duas obras, em que as categorias examinadas foram: prefácio, índice, conceitos de geometria e a geometria dedutiva. Como principais resultados, a autora apontou que a abordagem moderna de OS se aproximou mais da tendência internacional utilizada nos Estados Unidos e baseada em Birkhoff do que da proposta do ensino da geometria pelas transformações geométricas ligada à Klein (que, no caso do livro moderno, as transformações são apresentadas no apêndice). Destacou ainda que OS não se posicionou explicitamente quanto às propostas para o ensino de geometria, e incorporou as duas tendências:

Podemos dizer que Sangiorgi não assume uma posição radical. Não abandona a geometria euclidiana, nem a dedutiva, mas acrescenta novos postulados, uma geometria exploratória. Quanto à abordagem metodológica, realiza um desenvolvimento mais cuidadoso com os conceitos e propriedades geométricas. Ao nosso ver, tal alteração, juntamente com a tentativa de recuperar aspectos exploratórios, representa mudança significativa no ensino de geometria (Leme da Silva, 2008, pp. 91-92).

A pesquisadora Búriço (2015), ao comentar o ensino de geometria debatido no II Congresso Nacional de Ensino de Matemática, realizado em 1957, em Porto Alegre, transcreve parte do depoimento do professor Antonio Rodrigues, fundador do curso de Matemática e catedrático de Geometria da Faculdade de Filosofia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), sobre as práticas pedagógicas do período:

A falta de concatenação lógica inicial dos teoremas e o caráter intuitivo de boa parte deles produz a nociva impressão, na mente do aluno, de que as demonstrações constituem malabarismos do professor. Tiradas do nada são deixadas soltas no ar, sem um fim determinado.

[...] Com o acúmulo do material de estudo, perde o aluno a visão de conjunto. Neste momento ele não percebe as relações mútuas que existem entre os vários teoremas; quando muito sabe que esta demonstração está apoiada no teorema precedente examinado pelo professor. Não forma, também, uma ideia clara do que é uma teoria ou não possui teoria alguma. Só lhe resta, agora, servir-se da memorização, para guardar os teoremas e suas provas, durante o curto prazo de duração dos exames... (Congresso..., 1959 *apud* Búriço, 2015, p. 8).

Assim, podemos constatar que, apesar das demonstrações de teoremas constarem das recomendações normativas nas décadas de 1950 e 1960 e, conseqüentemente, estarem presentes nos livros didáticos, o relato do professor indica que, na prática, tais teoremas eram decorados pelos alunos. Na coleção pré-moderna, OS afirma, no prefácio, o seu objetivo com relação ao ensino de geometria: “grande responsabilidade na iniciação geométrica dedutiva dos alunos da

escola secundária, dentro de uma técnica demonstrativa, acessível e uniforme, tanto quanto possível” (Sangiorgi, 1958, p. 17).

Em sua coleção moderna, dirigindo-se aos alunos no prefácio, OS afirma que

as figuras geométricas quando tratadas *racionalmente*, constituem ótimo estímulo para a *dedução* de certas propriedades comuns a elas e que jamais poderiam ser aceitas se apenas *observássemos*. E se *deduzir* é uma das principais qualidades de ser racional, o estudo da Geometria o fará mais racional ainda! (Sangiorgi, 1967, p. XV, grifos do autor).

Nesta investigação, buscamos compreender, de forma mais aprofundada, como OS mobiliza aportes do MMM para que os alunos “não decorem as demonstrações dos teoremas!” (Sangiorgi, 1966, p. 52), ou seja, parece ser esse um dos seus principais objetivos no livro moderno, haja vista que a dedução estava explicitamente presente na normativa, tanto antes como no momento da publicação da coleção moderna. A pergunta que buscamos responder é: como OS altera a proposta de uma geometria dedutiva para a 3ª série ginásial na coleção moderna comparativamente à coleção pré-moderna?

Para buscar respondê-la, optamos por empreender uma análise da *geometria a ensinar* proposta, considerada como saberes do objeto de seu trabalho, produzidos pelo campo disciplinar da Matemática, no caso, da geometria euclidiana, assim como da *geometria para ensinar*, tomada como saberes mobilizados como ferramentas para a prática docente, saberes para ensinar geometria. Articulamos o exame da exposição dedutiva ao longo dos capítulos de geometria em ambas as coleções, dando ênfase aos aspectos relativos tanto à quantidade como ao conteúdo de postulados e teoremas, bem como às recomendações metodológicas do autor para implementar o ensino proposto.

### 3 Uma análise quantitativa inicial

Uma primeira comparação que realizamos foi no que diz respeito à quantidade de páginas dedicadas exclusivamente ao estudo da geometria, desconsiderando o capítulo IV de trigonometria. No exemplar pré-moderno, o livro dedica os capítulos II e III para o ensino de geometria, totalizando 186 páginas, que correspondem a 65,3% do total de páginas do volume. O livro moderno dedica os capítulos 3 e 4 e o Apêndice inteiro para o estudo da geometria, correspondendo ao total de 200 páginas, ou ainda, 63,7% do total de páginas. Aparentemente, em termos gerais, praticamente não houve diferença significativa na porcentagem de páginas direcionadas ao ensino de geometria nas duas coleções.

De outra parte, a análise geral da quantidade de páginas para o ensino de geometria indica que, para atender à Portaria de 1951, mesmo sem constar ensino de geometria nas 1ª e 2ª séries, para a 3ª série, os conteúdos de geometria ocupam mais de 50% do volume. Ou seja, em termos de quantidade de conceitos a serem abordados, eles estão concentrados nas 3ª e 4ª séries, e abarcam os principais conceitos da geometria euclidiana plana, desenvolvida de maneira dedutiva. Assim, uma primeira consideração importante a ser feita é que, diferentemente da abordagem atual de diluir os conteúdos geométricos ao longo de todos os anos escolares, nas décadas de 1950 e 1960, a geometria apresentava-se concentrada nas duas últimas séries ginásiais, mas de modo algum foi negligenciada ou pouco expressiva nos livros didáticos analisados, o que também não indica um abandono do campo geométrico em detrimento aos campos da aritmética e da álgebra.

É justamente no momento de comparar os temas propostos em cada coleção que as

diferenças ficam explícitas. Os conteúdos distribuídos no Capítulo II do livro pré-moderno correspondem, no livro moderno, aos capítulos 3 e 4. O Capítulo III no pré-moderno destinado ao estudo das linhas proporcionais e semelhança de polígonos foi transferido para o Volume 4 na coleção moderna. Os conceitos, que no livro pré-moderno constam do Capítulo II, estão distribuídos em 150 páginas, os quais correspondem aos capítulos 3 e 4 do livro moderno, dispostos em 186 páginas, ou seja, 36 páginas a mais dedicadas aos mesmos conteúdos, conforme podemos observar no Quadro 2 a seguir.

**Quadro 2:** Correspondência de capítulos de geometria nos dois livros

<b>Livro pré-moderno</b> (Sangiorgi, 1958, p. 83-233)	<b>Livro moderno</b> (Sangiorgi, 1967, p. 111-297)
<p><b>Capítulo II – Figuras geométricas planas. Reta e Círculo</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Entes geométricos, proposições, congruência</li> <li>2. Ângulos</li> <li>3. Linha poligonal, polígonos</li> <li>4. Triângulos</li> <li>5. Perpendiculares e oblíquas</li> <li>6. Teoria das Paralelas</li> <li>7. Soma dos ângulos de triângulos e polígonos</li> <li>8. Quadriláteros, translação</li> <li>9. Circunferência e Círculo</li> <li>10. Arcos e ângulos. Construções geométricas</li> </ol>	<p><b>Capítulo 3 – Estudo das figuras geométricas</b></p> <p>1ª parte – Objetivos/Figuras geométricas/Topologia</p> <p>2ª parte – Relações e Operações com conjuntos de pontos/Estrutura de ordem/Semirreta, Segmento de reta, Semiplano/Medida de segmento</p> <p>3ª parte – Ângulo/Medida de ângulo/Ângulos complementares e suplementares</p> <p>4ª parte – Práticas demonstrativas/Ângulos formados por duas retas coplanares e uma transversal</p>
	<p><b>Capítulo 4 – Estudos dos polígonos e da circunferência</b></p> <p>1ª parte – Polígono/Diagonais/Triângulos/Congruência de triângulos</p> <p>2ª parte – Construção lógica da geometria/Provas/Postulados/Teoremas/Como efetuar uma demonstração/Teorema recíproco/Alguns teoremas</p> <p>3ª parte – Quadriláteros/Paralelogramos/Trapézios/Teoremas fundamentais</p> <p>4ª parte – Circunferência/Teoremas/Círculos</p>

**Fonte:** Elaborado pelas autoras a partir de Sangiorgi (1958, 1967)

É possível observar que a sequência de conteúdos discriminada na coluna do livro pré-moderno foi preservada no livro moderno com inserções de novos tópicos. Ou seja, a quantidade total de temas desenvolvidos sobre geometria foi reduzida, porém, o número de páginas teve um aumento significativo. Os mesmos conceitos passaram a ser propostos com cerca de 28% a mais de espaço. Destacam-se, ainda, as mudanças na materialidade da coleção moderna, como bem apontou Valente (2008):

Nova diagramação na apresentação dos conteúdos escolares, no uso de tipos de letras e números de diferentes tamanhos e formas; inclusão de cores nas páginas internas, fotografias, desenhos. Para trás ficou a estética dos livros de matemática dos anos 1950. A nova coleção, dentre outros elementos, adotou, também, a cor como informação (p. 30).

De todo modo, identificamos que os mesmos conceitos ganham outra roupagem, tanto



no que diz respeito aos saberes geométricos em questão, que podemos designar como a *geometria a ensinar*, assim como no que concerne aos aspectos metodológicos introduzidos que poderiam ser designados por *geometria para ensinar*. Em nossa perspectiva, os dois saberes encontram-se entrelaçados, um justifica o outro e necessitam ser examinados em conjunto.

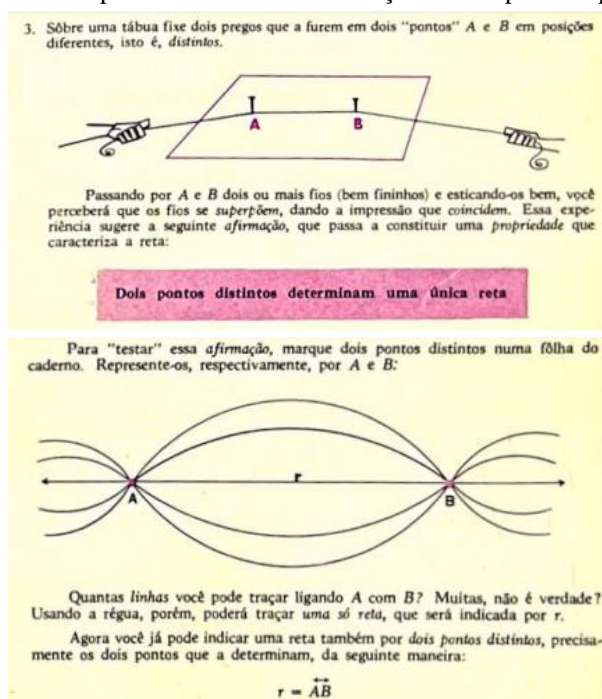
Como já dito, os programas de 1950 e de 1960 indicam uma geometria dedutiva a partir da 3ª série ginásial. Dessa maneira, as duas coleções retratam propostas para o ensino de uma geometria em que certamente estão presentes — postulados, teoremas e demonstrações. Assim, perguntamos: o que se altera em tais temas na abordagem moderna? Como o número de páginas aumenta, poderíamos conjecturar que a coleção moderna apresenta mais postulados e teoremas?

#### 4 O exame dos postulados

Em relação aos postulados, ambos os livros utilizaram esse termo como sinônimo de axiomas. No livro pré-moderno, o termo foi introduzido no início do Capítulo II (no tópico “Grupo das proposições geométricas: Postulados e Teoremas”), na página 85, enquanto no livro moderno, o termo aparece pela primeira vez na página 234, na segunda parte do Capítulo 4 (no tópico “Que é postulado? Que é teorema?”). Com isso, observamos que a lista de postulados no livro moderno só foi apresentada após o estudo de geometria, proposto no Capítulo 3, que trata de noções básicas e tem por objetivo preparar o estudante para a abordagem dedutiva.

A título de exemplo, podemos citar o postulado referente à determinação de reta que, no livro pré-moderno, tem sua aparição “direta”, enunciado como: “por dois pontos passa uma reta e uma só” (1958, p. 87), sendo que a nota de rodapé complementa: “Este postulado também pode ser enunciado: dois pontos determinam uma só reta à qual pertencem” (1958, p. 87); e no livro moderno, aparece primeiro como “exercício exploratório”, no Capítulo 3 (1967, p. 133), para ser enunciado mais de cem páginas depois como postulado, na página 235.

**Figura 1:** Exercício exploratório sobre determinação de reta por dois pontos distintos



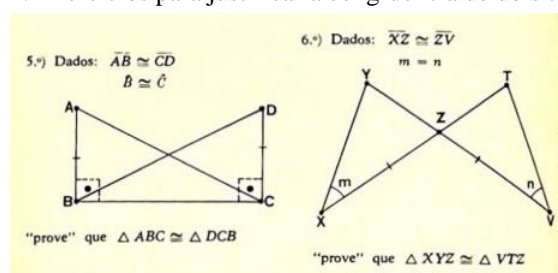
Fonte: Sangiorgi (1967, p. 133)

Ainda no livro moderno, a mesma coisa pode ser dita acerca dos casos de congruência de triângulos. Depois de introduzir o conceito de congruência indicando as seis

correspondências entre lados e ângulos de dois triângulos, o autor propõe a exploração, por meio de construções geométricas, de situações em que as correspondências entre somente três elementos dos triângulos (sempre incluindo um lado) são suficientes para garantir a congruência. Segundo Sangiorgi (1967, p. 219), “os exercícios que dizem respeito a essa ‘economia’ de elementos correspondentes, para saber se dois triângulos são congruentes, sugerem os chamados Casos Clássicos de Congruência de Triângulos”. Isso se dá por meio de uma seção de *Exercícios Exploratórios – Grupo 77*, de quase 20 páginas (p. 219-227), finalizando com um *Lembrete amigo*, na forma de quadro, que traz os enunciados dos quatro casos de congruência de triângulos, com suas respectivas siglas.

Vale mencionar que, na seção do *Teste de Atenção – Grupo 78*, que segue os exercícios exploratórios (p. 228), o Exercício 3 propõe justificar o “porquê” da congruência dos triângulos que fazem parte da mesma figura e, depois de apresentar um exemplo-modelo, todos os oito itens que seguem têm no enunciado o termo “prove” entre aspas (cf. Figura 2).

**Figura 2:** Exercícios para justificar a congruência de dois triângulos



Fonte: Sangiorgi (1967, p. 230)

Interpretamos que a proposição de tais exercícios demonstra certo cuidado de OS com o uso do termo, uma vez que as justificativas vão envolver propriedades de congruência que ainda não foram postuladas nem demonstradas, mas apenas inferidas ou verificadas experimentalmente, por meio de construções geométricas com régua, compasso e transferidor. Posteriormente, no Capítulo 4 (p. 235-236), quando os casos de congruência passam a compor a lista dos postulados, o termo “demonstração” passa a ser utilizado.

A escolha por essa abordagem foi explicitamente justificada no *Guia para uso dos professores*<sup>13</sup>, que acompanha o Volume 3. Segundo Sangiorgi (1966),

dentre as questões de ordem didática que têm provocado celeuma no curso ginásial, está a que diz respeito aos casos de congruência de triângulos, antigamente denominados casos clássicos de igualdade de triângulos.

*Postula-se ou demonstra-se?*

Na verdade, nem uma coisa nem outra (p. 50, grifos do autor).

O trecho acima evidencia o quanto OS estava atento, ao mesmo tempo, às questões curriculares (iniciação à geometria dedutiva na 3ª série ginásial) e aos aspectos didático-pedagógicos, explicando que em seu livro,

os casos clássicos de congruência de figuras *correrão por conta da “exploração” que os alunos farão* em classe, usando régua, compasso e transferidor. Posteriormente, na construção axiomática que se fará da Geometria — *o que terá lugar progressivamente* — esses casos serão englobados no postulado P10 (Sangiorgi, 1966, p. 50, grifo

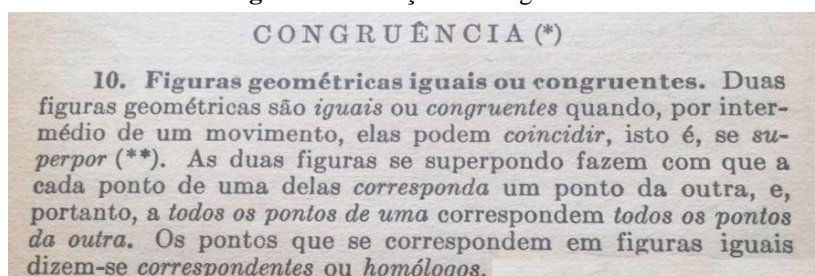
<sup>13</sup> Analisamos a 6ª edição, publicada em 1966.

nosso).

Já o livro pré-moderno adotou uma abordagem bastante diferenciada para tratar a congruência de triângulos — muito próxima daquela trazida por Euclides no livro I de *Os Elementos* — na qual todos os casos de congruência são enunciados como teoremas seguidos de suas respectivas demonstrações. Referindo-se ao 1º caso de congruência, Sangiorgi nos alerta que “poderíamos enunciar este caso de igualdade e outros como *postulado*. Preferimos, na idade em que se encontram os alunos, introduzi-lo como *teorema*, admitindo, no entretanto, o *Postulado do movimento*” (Sangiorgi, 1958, p. 118, grifos do autor). De fato, foi com base no referido postulado que as demonstrações de todos os casos foram feitas e iniciadas por: “*Transportemos o triângulo ABC sobre o triângulo A'B'C' de modo que*” haja coincidência entre os elementos congruentes tomados como hipótese (Sangiorgi, 1958, p. 119, grifos do autor).

Cabe ainda salientar que OS optou por introduzir o conceito de congruência de figuras no início do Capítulo II (p. 90), recorrendo ao princípio euclidiano da sobreposição<sup>14</sup>, dando um caráter mais dinâmico (no sentido de movimento) e de correspondência pontual biunívoca a esse conceito. Na Figura 3, segue a definição apresentada que confirma nossa interpretação.

**Figura 3:** Definição de congruência



**Fonte:** Sangiorgi (1958, p. 90)

Em nota, o autor alerta: “(\*\*) A possibilidade de coincidência está garantida pelo *Postulado do Movimento*” (Sangiorgi, 1958, p. 90, grifo do autor), introduzido duas páginas antes. Consideramos que o recurso ao *Postulado do Movimento*<sup>15</sup>, no início do capítulo, visa dar um caráter menos rigoroso às definições e proposições que seguem, fazendo apelo à intuição e à experiência empírica (evocada) de sobrepor duas figuras por deslocamento rígido no plano.

A partir dessa introdução, as comparações de segmentos, ângulos, triângulos, entre outros objetos geométricos se fazem da mesma forma — apoiadas no *Postulado do Movimento* —, e constituem as bases para o desenvolvimento dedutivo das propriedades geométricas que decorrem no volume pré-moderno.

Para além do que foi citado, as principais diferenças entre o livro pré-moderno e moderno no sentido de instituir um conjunto de axiomas visando iniciar os estudantes à geometria dedutiva estavam na introdução do postulado de Arquimedes e no postulado da divisão no livro pré-moderno; enquanto no livro moderno, as definições de medidas de segmentos e de ângulos tomam lugar no Capítulo 3 (páginas 146 e 159, respectivamente), antecedendo a construção axiomática da geometria. Um quadro síntese dos postulados

<sup>14</sup> Sangiorgi emprega a recíproca do princípio: “E as coisas que se ajustam umas sobre as outras são iguais entre elas” (Euclides, 1990, p. 178, tradução nossa).

<sup>15</sup> “7.a) Uma figura geométrica pode mover-se no plano (ou no espaço) sem se deformar. (Postulado do movimento)” (Sangiorgi, 1958, p. 94).

apresentados em cada livro pode elucidar o que constatamos<sup>16</sup>.

**Quadro 3:** Conjunto de postulados enunciados em cada livro

<b>Livro pré-moderno</b> (Sangiorgi, 1958)	<b>Livro moderno</b> (Sangiorgi, 1967)
1. <sup>a</sup> ) Existem infinitos pontos, infinitas retas e infinitos planos. Numa reta existem infinitos pontos; num plano existem infinitas retas e, portanto, infinitos pontos.	P1: DOIS PONTOS DISTINTOS DETERMINAM UMA E SÔMENTE UMA RETA.
2. <sup>a</sup> ) Por um ponto passam infinitas retas.	P2: NUMA RETA EXISTEM PELO MENOS DOIS PONTOS. EXISTEM PELO MENOS TRÊS PONTOS NÃO NUMA MESMA RETA (NÃO-COLINEARES).
3. <sup>a</sup> ) Por dois pontos passa uma reta e uma só.	P3: TRÊS PONTOS NÃO-COLINEARES DETERMINAM UM E SÔMENTE UM PLANO.
4. <sup>a</sup> ) Por uma reta passam infinitos planos.	P4: SE DOIS PONTOS DISTINTOS DE UMA RETA PERTENCEM A UM PLANO, ENTÃO TODOS OS PONTOS DA RETA PERTENCEM AO PLANO.
5. <sup>a</sup> ) Três pontos, não pertencentes à mesma reta, determinam um plano e um só.	P5: SE B ESTÁ ENTRE A E C, ENTÃO A, B E C SÃO COLINEARES E B TAMBÉM ESTÁ ENTRE C E A.
6. <sup>a</sup> ) A reta que passa por dois pontos quaisquer de um plano pertence a êsse plano.	P6: PARA DOIS PONTOS A E C EXISTE, PELO MENOS, UM PONTO B NA RETA AC, TAL QUE C ESTÁ ENTRE A E B.
7. <sup>a</sup> ) Uma figura geométrica pode mover-se no plano (ou no espaço) sem se deformar. (Postulado do Movimento).	P7: É ÚNICA A RETA PARALELA À RETA $r$ , TRAÇADA POR UM PONTO P QUE NÃO PERTENCE A $r$ . (famoso postulado de Euclides!)
8. <sup>a</sup> ) Uma figura geométrica é igual à soma de suas partes e maior que qualquer destas partes.	P8: Se X está entre A e B, então: $m(\underline{AX}) + m(\underline{XB}) = m(\underline{AB})$ .
<i>Postulado de Arquimedes:</i> “Dados dois segmentos desiguais, existe um múltiplo do menor que supera o maior.”	P9: SE P É UM PONTO INTERIOR AO ÂNGULO AÔB, ENTÃO: $m(\underline{AÔP}) + m(\underline{PÔB}) = m(\underline{AÔB})$ .
<i>Postulado:</i> <i>Todo ângulo tem uma bissetriz e uma só.</i>	P10: SE COM DOIS TRIÂNGULOS OCORRE UM DOS CASOS: L.A.L., A.L.A., L.L.L., L.A.Ao, ENTÃO OS DOIS TRIÂNGULOS SÃO CONGRUENTES.
2. <sup>a</sup> ) <i>Postulado da divisão:</i> <i>Um segmento ou um ângulo podem ser sempre divididos em um número qualquer de partes iguais.</i>	Tôda reta que passa por um ponto interno a uma circunferência, intercepta-a em dois pontos.

<sup>16</sup> Os postulados são listados na ordem e com a formatação em que aparecem nos livros. Os postulados comuns (a menos da ordem) aparecem em destaque em cada coluna.

62. **Postulado de Euclides** (ou das paralelas).  
*Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma, e sómente uma, paralela a esta reta.*

**Fonte:** Elaborado pelas autoras a partir de Sangiorgi (1958, 1967)

O Quadro 3 explicita as inúmeras alterações feitas por OS nos dois livros, em particular na reorganização completa dos postulados. Uma diferença importante diz respeito ao conceito de medida, que no livro pré-moderno não é mencionado nos postulados, enquanto no livro moderno, o P8 e P9 mobilizam este conceito introduzido no Capítulo 3. Ou seja, o conceito de medida constitui, igualmente, mais um elemento na preparação para a abordagem do processo dedutivo, objeto de estudo do Capítulo 4.

A análise dos postulados ainda revela o quanto o autor de livros didáticos, no nosso caso, Sangiorgi, elabora e adapta, em acordo com seus objetivos e concepções, a maneira de produzir uma *geometria do ensino*. Apesar de ser fiel aos princípios do livro de Euclides, a *geometria do ensino* apresenta-se distinta, própria e a todo tempo sofre reformulações, evidenciando o caráter dinâmico da produção escolar.

Em síntese, no livro pré-moderno, a abordagem axiomático-dedutiva da Geometria é iniciada desde a primeira página do Capítulo II intitulado “Figuras geométricas planas. Retas e círculo” (p. 83); e no livro moderno é introduzida no Capítulo 4 (segundo capítulo dedicado à geometria), depois de um trabalho bastante exploratório, experimental e prático, visando preparar os estudantes para tal abordagem, como veremos a seguir. Na nossa leitura, Sangiorgi parece alertar para a importância de uma geometria intuitiva (ou de uma iniciação geométrica) antecedendo a construção axiomática, assim como preconizado nas reformas Campos (de 1931) e Capanema (de 1942), destacadas antes.

## 5 O exame dos teoremas

Iniciando novamente com uma análise quantitativa em relação ao número de teoremas demonstrados nas duas coleções, ao contrário do que conjecturamos pelo aumento de páginas para os mesmos tópicos, o estudo indicou uma queda surpreendente. Na nossa contagem, consideramos somente a designação de “teorema” usada nas duas coleções que foram demonstradas na parte teórica e expositiva, visto que, para além destes, há outros itens com a designação “propriedade”, “teorema recíproco”, “corolário” ou ainda “consequência”, muitos deles igualmente demonstrados. Pois bem, no livro pré-moderno, o número de teoremas demonstrados era de 54 no Capítulo II, e no livro moderno não há demonstração de teoremas no Capítulo 3 e, no Capítulo 4, o total de teoremas demonstrados passa para 28, ou seja, uma redução de praticamente 50% na quantidade de teoremas demonstrados na comparação entre o livro pré-moderno e moderno. Qual seria o objetivo de OS para reduzir drasticamente a quantidade de teoremas em uma proposta de ensino dita dedutiva? E, ainda, quais as razões para as demonstrações iniciarem somente no Capítulo 4?

O próprio autor justifica a escolha da ausência de demonstração no Capítulo 3 (segundo ele, para possibilitar uma vivência ao aluno) e a mudança para uma outra geometria, preconizada por Hilbert, na seção designada por *Observações de ordem pedagógica*, referente ao Capítulo 4, do *Guia para uso dos Professores*:

Nesta fase, o aluno já está “habituação” a verificar que algumas propriedades são consequências de outras mais elementares. É a preparação para o início de uma axiomatização simples, onde serão reunidas sob a forma de postulados (axiomas) as situações encontradas nos exercícios exploratórios.



Constrói-se, assim, uma teoria (preconizada por Hilbert) a partir de conceitos primitivos, de postulados e de teoremas, facilmente demonstrados, por intermédio de um encadeamento lógico de raciocínio.

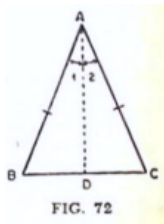
É bem diverso, pois, do que se fazia tradicionalmente o atual tratamento usado para iniciar a Geometria Dedutiva. O aluno não deve mais receber logo nas primeiras aulas de Geometria da 3ª série Ginásial aquele “impacto”: “que é Postulado?”, “que é Teorema?” [...] provocado, principalmente, pela falta exclusiva de amadurecimento do jovem estudante para tais assuntos.

Somente depois de muita vivência (basta ver que, no livro, o Grupo de *dez postulados fundamentais* é introduzido depois de 120 páginas dedicadas à geometria) é que o aluno pode ser iniciado nas *demonstrações* propriamente ditas (Sangiorgi, 1966, p. 51).

Sangiorgi esclarece que os exercícios exploratórios foram introduzidos no Capítulo 3 (antes de iniciar as demonstrações) para que o estudante experimente a verificação de algumas propriedades em decorrência de outras, ou seja, uma vez mais, identificamos a tentativa de inserir uma geometria experimental preparatória para o estudo dedutivo a ser desenvolvido no Capítulo 4. OS indica, igualmente, a construção de uma nova axiomatização para as demonstrações (preconizada por Hilbert) na qual os exercícios exploratórios realizados pelos estudantes no Capítulo 3 tornam-se postulados no momento de demonstrar os teoremas, no Capítulo 4. Tudo indica estar em jogo a compreensão de um processo dedutivo, que incorpora “novos postulados”, de modo a permitir um entendimento mais adequado do raciocínio lógico-dedutivo para os alunos da 3ª série ginásial. O objeto a ser ensinado, no caso, a geometria dedutiva, foi modificada tanto no seu objeto de ensino — *geometria a ensinar* —, e igualmente, nas ferramentas de trabalho do professor — *geometria para ensinar* —, no momento de inserir exercícios exploratórios, configurando uma *geometria do ensino*, elaborada por OS.

Para ilustrar as mudanças entre a abordagem pré-moderna e moderna, apresentamos o teorema dos ângulos da base de um triângulo isósceles, demonstrado nas duas coleções. No livro pré-moderno, ele é o primeiro teorema demonstrado depois dos casos de congruência de triângulos, que são considerados como teoremas e todos demonstrados, exatamente 36 páginas depois do início do estudo de geometria. No Quadro 4, reproduzimos seu enunciado e a demonstração apresentada.

**Quadro 4:** Demonstração de Teorema

<p><b>38. Propriedades do triângulo isósceles.</b>  <b>a) Teorema:</b> <i>Em todo triângulo isósceles os ângulos da base são iguais.</i>          Seja o triângulo <math>ABC</math> (fig. 72).          Temos:  <math>H \{ AB = AC</math>  <math>T \{ \hat{B} = \hat{C}</math></p>	 <p>FIG. 72</p>	<p><b>DEMONSTRAÇÃO:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Tracemos a bissetriz do ângulo do vértice <math>A</math> que encontra <math>BC</math> no ponto <math>D</math>. Logo: <math>\hat{1} = \hat{2}</math> (def. de bissetriz).</li> <li>2. Os triângulos <math>ABD</math> e <math>ADC</math> são iguais, pelo 1º caso de congruência (L.A.L.), e, portanto, são necessariamente iguais os ângulos correspondentes <math>\hat{B}</math> e <math>\hat{C}</math>. Logo:  <math>\hat{B} = \hat{C}</math> c.q.d.</li> </ol>
--	--	--


**Fonte:** Sangiorgi (1958, p. 119-120, grifos do autor)

No livro moderno, esse teorema é o primeiro a ser apresentado, no Capítulo 4, 124 páginas depois de iniciar o estudo de geometria. O resultado da tese a ser demonstrada foi objeto de estudo e exploração no Capítulo 3, como exercício exploratório (Figura 4a, p. 207); depois no exercício de teste de atenção (Figura 4b, p. 218).

**Figura 4:** Exercícios exploratórios (a) e Teste de atenção (b)

**EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 74**

1. *Construção de triângulos isósceles:* Considere um qualquer segmento  $\overline{AB}$  como base do triângulo isósceles que você quer construir. Escolhido um comprimento dado pela abertura de um compasso, basta determinar um dos pontos  $C$  (\*), intersecção das circunferências traçadas quando se fixa a ponta do compasso respectivamente nos pontos  $A$  e  $B$ .



a) Será que existe sempre o ponto  $C$ ?  
 b) Quando é que “não existe”?  
 c) Por que o triângulo obtido é isósceles, quando existe  $C$ ?

2. *Um resultado importantíssimo para os triângulos isósceles:*  
 De cada triângulo isósceles que você construiu, meça com o transferidor os ângulos da base. Que observou? Se um dos ângulos da base de um triângulo isósceles mede  $40^\circ$ , por exemplo, quanto medirá o outro ângulo da base? Será também  $40^\circ$ ? “Explore” esse resultado com outros triângulos isósceles.  
 Na certa você irá concluir que em qualquer triângulo isósceles os ângulos da base têm medidas iguais.  
 Um enunciado mais geral para os resultados obtidos no exercício 2 é:

Se dois lados de um triângulo têm o mesmo comprimento, então os ângulos opostos a esses lados têm a mesma medida

ou: se  $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BC})$  então  $m(\widehat{B}) = m(\widehat{A})$

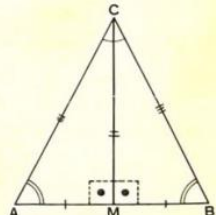
(a)

**TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 76**

2. Dois triângulos congruentes podem fazer parte da mesma figura. Exemplo:

$$\text{onde: } \begin{cases} A & M & C \\ | & | & | \\ B & M & C \end{cases}$$

Logo:  $\triangle AMC \cong \triangle BMC$



(b)

**Fonte:** Sangiorgi (1967, p. 207 e 218)

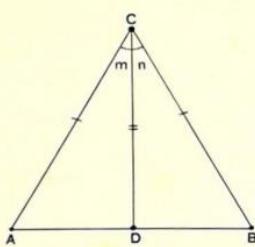
Além das propostas acima identificadas, Sangiorgi ainda propõe, mais à frente, um outro teste de atenção, conforme a Figura 5.

**Figura 5:** Teste de atenção

3. Justifique o “porquê” da congruência dos triângulos que fazem parte da mesma figura. Exemplos-modelo:

1.º) Dados:  $\overline{AC} \cong \overline{BC}$   
 $m = n$

“prove” que  $\triangle ACD \cong \triangle BCD$



Solução:

Basta empregar um dos casos de congruência estudados, desde que se disponha de três elementos correspondentes, respectivamente congruentes, guardando a mesma posição.

Como:  $\begin{cases} \overline{AC} \cong \overline{BC} & \text{(dado)} \\ m = n & \text{(dado)} \\ \overline{CD} \cong \overline{CD} & \text{(é o mesmo na figura)} \end{cases}$

segue-se que:  $\triangle ACD \cong \triangle BCD$   
 pelo caso L.A.L.

**Fonte:** Sangiorgi (1967, p. 229)

A demonstração do teorema é feita efetivamente apenas no Capítulo 4, como já dito. Porém, por ser o primeiro teorema e a primeira demonstração apresentada aos alunos, ela é desenvolvida em três páginas (239 a 241), conforme as figuras 6 e 7 (a e b). Nota-se que esse teorema aparece como “exemplo-modelo” do tópico 11 (p. 239), intitulado *Como “enfrentar” um teorema com êxito*, no qual Sangiorgi discorre sobre alguns aspectos relacionados à forma de conduzir uma demonstração matemática. Entendemos, com isso, que o referido texto, destinado aos alunos, se presta a anunciar que estes serão convidados a produzir suas próprias demonstrações.

O exemplo elucidada as “novidades” incorporadas no livro moderno, comparativamente ao pré-moderno. Desde a exploração proposta no Capítulo 3, no exercício exploratório, em que os alunos são convidados a construir diferentes triângulos isósceles, procurar um resultado válido em todos eles, assim como no teste de atenção, em que os alunos devem buscar observar casos similares resolvidos, constituem uma preparação para o estudo da geometria dedutiva, utilizando inclusive a expressão “prove”, novamente, entre aspas.

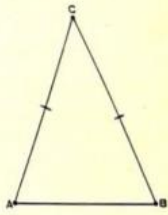
Figura 6: Teorema T1 do livro moderno

Exemplo-modelo: Demonstrar o teorema:

**T.1**: Em qualquer triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

Temos: SE um triângulo é isósceles, ENTÃO os ângulos da base são congruentes.

H  $\{\Delta ABC \mid \overline{AC} \cong \overline{BC}$   
 T  $\{\hat{A} \cong \hat{B}$



Um plano de demonstração: Para provar que os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são congruentes, basta provar que esses ângulos participam de figuras congruentes (triângulos, por exemplo; você já sabe reconhecer facilmente se são congruentes).

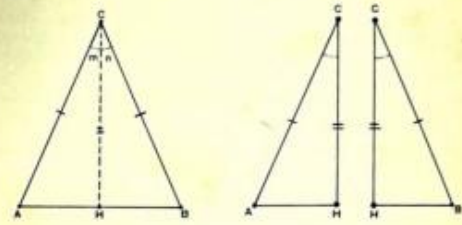
Nestas condições, traça-se algum segmento, de propriedades conhecidas, que decomponha o  $\Delta ABC$  em dois novos triângulos. Tal segmento poderá ser:

- a bissetriz relativa ao ângulo  $\hat{C}$
- ou a mediana relativa à base  $\overline{AB}$
- ou a altura relativa à base  $\overline{AB}$

Fonte: Sangiorgi (1967, p. 239)

Figura 7: Demonstrações do Teorema T1

Se for a bissetriz, esta irá dividir o ângulo  $\hat{C}$  em dois ângulos congruentes, isto é, de medidas iguais ( $m = n$ ), ensejando a formação dos triângulos:  $\Delta ACH$  e  $\Delta CHB$ , nos quais figuram os dois ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  que nos interessam.



Confrontando esses triângulos, observa-se que eles possuem:

- $\overline{AC} \cong \overline{BC}$  (por hipótese) (L)
- $m = n$  (por construção da bissetriz) (A)
- $\overline{CH} \cong \overline{CH}$  (por ser lado comum) (L)

e, portanto, são triângulos congruentes pelo 1.º Caso (L.A.L.).

Dêsse modo os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , como correspondentes de triângulos congruentes, são congruentes, isto é:  $\hat{A} \cong \hat{B}$ , como queríamos demonstrar.

**OBSERVAÇÃO:** Se em vez da bissetriz você traçasse a mediana, relativa à base  $\overline{AB}$ , e seguisse o mesmo raciocínio, provaria também que  $\hat{A} \cong \hat{B}$ , porque agora os triângulos obtidos seriam congruentes pelo caso L.L.L. Experimente!

Outro "caminho" para provar que  $\hat{A} \cong \hat{B}$  é traçar a altura, relativa à base  $\overline{AB}$ , pois nesse caso os triângulos obtidos seriam congruentes por serem retângulos que possuem a hipotenusa e um cateto, respectivamente, congruentes. Sabe por quê?

Porque é sempre possível "compor" um triângulo isósceles com dois triângulos retângulos que possuam a hipotenusa e um cateto, respectivamente, congruentes. E tais triângulos são congruentes, nessa "composição", pelo caso L.A.A.

Depois de você se acostumar a este tipo de raciocínio, será possível sintetizar as demonstrações mediante esquemas que indicam as diversas "passagens" da demonstração.

Como exemplo, vamos conduzir a demonstração do T.1 usando um esquema comum, onde, à esquerda, figuram as afirmações feitas e, à direita, as justificativas respectivas:

se um triângulo é isósceles, ENTÃO os ângulos da base são congruentes.

H  $\{\Delta ABC \mid \overline{AC} \cong \overline{BC}$   
 T  $\{\hat{A} \cong \hat{B}$

(a)

**DEMONSTRAÇÃO:**

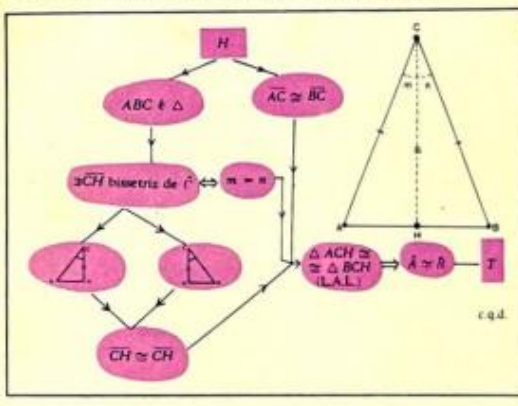
<p><b>Afirmações</b></p> <p>1) <math>\overline{CH}</math> é bissetriz de <math>\hat{C}</math>, ou seja, <math>m = n</math></p> <p>2) <math>\Delta ACH \cong \Delta BCH</math></p> <p>3) <math>\hat{A} \cong \hat{B}</math></p>	<p><b>Justificativas</b></p> <p>1) Todo ângulo admite uma bissetriz e, portanto, pode-se construir <math>\overline{CH}</math>.</p> <p>2) Caso L.A.L. <math>\left\{ \begin{array}{l} \overline{AC} \cong \overline{BC} \text{ (hipótese)} \\ m = n \text{ (construção)} \\ \overline{CH} \cong \overline{CH} \text{ (lado comum)} \end{array} \right.</math></p> <p>3) Ângulos que se correspondem em triângulos congruentes</p> <p style="text-align: right;">c.q.d.</p>
--	--

Pode-se, também, efetuar a demonstração do teorema por meio de esquemas desenhados (\*\*), coloridos de preferência, onde figuram uma série de deduções através de construções ( $\rightarrow$ ), de equivalências ( $\Leftrightarrow$ ) e de implicações ( $\Rightarrow$ ), que permitem sair da hipótese e chegar à tese.

Assim, por exemplo, voltando ao teorema:

"SE um triângulo é isósceles, ENTÃO os ângulos da base são congruentes"

sua demonstração será esquematizada da seguinte maneira:



c.q.d.

\*)  $\overline{CH} \cong \overline{CH}$  pela propriedade reflexiva da congruência de segmentos.  
 \*\*) Essa é a técnica preferida pela matemática e pedagogia francesa Lucienne Félix.

(b)

Fonte: Sangiorgi (1967, p. 240-241)

Quando chega ao Capítulo 4, em que a demonstração é feita, OS vai comentando e explicando cada uma das etapas. Além disso, ele utiliza novas estratégias metodológicas, que não eram empregadas antes, como a demonstração em duas colunas (afirmações e justificativas) e a demonstração por meio de esquemas desenhados, conforme a Figura 7b. É preciso destacar a valorização de diferentes resoluções e diversas representações para a demonstração do mesmo teorema, para que o aluno possa compreender a diversidade de caminhos no processo dedutivo.



Um pouco mais adiante, ainda no Capítulo 4, OS ressalta a necessidade de o estudante produzir a sua demonstração em um “Lembrete amigo”: “Não ‘decore’ demonstração de teorema! Valorize-se, usando qualquer dos métodos apresentados. Dê o seu próprio ‘toque’ ao empregar tais métodos e você estará realizando-se em Matemática!” (Sangiorgi, 1967, p. 258, grifos do autor).

Com o exemplo exposto e examinado em detalhes, fica explicada a necessidade de reduzir os teoremas demonstrados na coleção moderna, visto que o tratamento para as demonstrações ganha outra perspectiva, muito mais explicativa, mobilizando diferentes registros de representação para o encadeamento lógico. Podemos inferir que tais inovações correspondem a maneira que OS criou, elaborou, a partir do momento em que ele estava mergulhado no debate do MMM, para que um(a) jovem de 13 anos compreenda o processo dedutivo ao invés de decorar os teoremas e suas demonstrações.

Outro aspecto a ser considerado na abordagem moderna diz respeito aos professores, que passaram a contar com o *Guia para uso dos Professores* como um apoio importante para subsidiar as práticas pedagógicas, contendo orientações didáticas, comentários de erros frequentes dos alunos, entre outras contribuições. Além disso, o Guia trazia as respostas dos exercícios propostos nos livros. No caso das demonstrações dos teoremas, o Guia fornecia o desenvolvimento destas, o que podemos inferir como um apoio pedagógico para os professores terem mais segurança no trabalho com as demonstrações em sala de aula. Nele encontramos explicitamente a posição de Sangiorgi, que confirma nossas interpretações acerca da abordagem dedutiva e a decisão justificada da redução do número de teoremas: “Alguns *teoremas fundamentais*, responsáveis pela iniciação da Geometria Dedutiva no Ginásio, permitem deixar de lado uma série enorme de ‘teoremas’ que, tradicionalmente exigidos dos alunos, mais representavam um trabalho ‘maçante’ — só os ‘venciam’ na base da ‘decoração’ — do que produtivo!” (Sangiorgi, 1966, p. 51, grifos do autor).

## 6 Considerações finais

O artigo buscou examinar e comparar duas coleções didáticas de um mesmo autor, reconhecido e de grande sucesso editorial, de modo a trazer mais elementos para compreender a complexidade do MMM, particularmente em relação à geometria dedutiva. A primeira conclusão que podemos sustentar é que as mudanças para o ensino de geometria apresentadas no Volume 3 de cada coleção foram significativas e mereceram destaque na abordagem moderna, como ressaltou Sangiorgi ao afirmar ser o ensino de geometria o “bom-bocado” do livro. Entendemos que com as análises produzidas foi possível evidenciar como OS elaborou formas alternativas para desenvolver demonstrações de teoremas em geometria.

Oswaldo Sangiorgi conjugava dois elementos relevantes para um autor de livros didáticos produzir inovações: ele tinha uma sólida formação matemática que lhe permitia segurança para alterar postulados, em filiar-se a uma geometria sustentada por Hilbert, juntamente com o curso de verão realizado nos Estados Unidos, em que muito provavelmente, tomou contato com debates e experiências entre diferentes geometrias a serem empregadas no ensino. De outra parte, ele também tinha a expertise como professor de aulas particulares para estudantes de renomados colégios paulistanos, o que lhe permitia conhecer as dificuldades, os erros mais comuns realizados pelos alunos, como ele mesmo relata no *Guia para uso dos Professores*. Em outras palavras, OS transitava com habilidade tanto na *geometria a ensinar* como na *geometria para ensinar*, o que possibilitava anunciar recomendações pertinentes aos estudantes e professores sobre a *geometria do ensino*.

A segunda conclusão relaciona-se com o caráter inovador evidenciado em nossas

análises: a coleção moderna de OS trouxe alterações significativas no enfoque construído para a geometria dedutiva proposta ao ensino ginásial, tanto no âmbito da geometria euclidiana, de uma *geometria a ensinar*, como nos aspectos didáticos metodológicos ao propor a inserção de exercícios exploratórios e experimentais, além dos diferentes registros de representações como uma maneira de preparar a geometria dedutiva, o que corresponde, em nosso ponto de vista, a uma *geometria para ensinar*, que pode ser interpretada como uma geometria intuitiva, retirada das 1ª e 2ª séries no Programa Mínimo de 1951.

Jean Dieudonné (1906-1992), matemático francês, líder do grupo Bourbaki e que trabalhou na USP, enunciou a seguinte frase que marcou o MMM: “Se eu quisesse resumir numa frase todo o programa que tenho em mente, fá-lo-ia com o slogan: Abaixo Euclides!” (O.E.C.E., 1961, p. 35). Para nós, Osvaldo Sangiorgi (1921-2017), matemático brasileiro, líder do Grupo de Estudos de Ensino de Matemática (GEEM), formado na USP, a frase que traduziria sua apropriação acerca da geometria do ginásio no MMM seria: “Não ‘decora’ demonstração de teorema!” (Sangiorgi, 1966, p. 158).

Ainda que as coleções analisadas tenham circulado pelo estado de São Paulo e fora dele, tendo em vista a significativa quantidade de edições, não se pode, de maneira alguma, generalizar ou adotar a proposta moderna de OS como aquela que representa ou caracteriza o ensino moderno de geometria no Brasil. Todavia, não podemos, tampouco, ignorar a análise minuciosa que o presente artigo nos mostra como resultado: a tentativa de OS em abolir a decoreba das demonstrações dos teoremas.

A complexidade do MMM, associada a uma análise em relação às políticas públicas de formação de professores, certamente precisam ser inseridas no contexto analítico para uma interpretação mais fidedigna sobre o ensino de geometria nesse período, assim como uma representação histórica sobre como vinha sendo proposta a geometria nas reformas anteriores ao Movimento.

Nossa análise nos convida a refletir que o debate geometria experimental-intuitiva *versus* geometria axiomática-dedutiva permeia há tempos as discussões para o ensino de geometria no curso ginásial. E ainda considerar que, em nosso processo analítico de exame dos postulados e teoremas, deparamo-nos com a impossibilidade de um processo analítico separado dos ditos *saberes a ensinar (geometria a ensinar)* e *saberes para ensinar (geometria para ensinar)*, de modo a produzir uma história plausível sobre as propostas de ensino da geometria dedutiva na perspectiva de Osvaldo Sangiorgi e a decifrar suas apropriações do MMM.

### Agradecimentos

Agradecemos ao GHEMAT Brasil pela disponibilização do *Arquivo Pessoal Osvaldo Sangiorgi (APOS)*, que nos permitiu o acesso às fontes documentais; ao mestrando Guilherme Rodrigues Magalhães pela colaboração na digitalização e na conversão dos arquivos para *pdf* pesquisável; e ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciência (UNESP, Bauru) pelo apoio financeiro para a tradução.

### Referências

- Bloch, M. (2001). *Apologia da História ou O ofício de historiador*. Rio de Janeiro, RJ: Jorge Zahar Editora.
- Búrigo, E. Z. (2015). Professores de Matemática deveriam estudar história? In: *Anais do XII Encontro Gaúcho de Educação Matemática* (pp. 1-14). Porto Alegre, RS.
- Caldatto, M. E. & Pavanello, R. M. (2015). Um panorama histórico do ensino de geometria no



- Brasil: de 1500 até os dias atuais. *Quadrante*, 24(1), 103-128.
- Euclides (1990). *Les Éléments*, vol. 1, traduzidos do texto de Heiberg. Introdução geral por M. Caveing. Livros I-IV: Geometria Plana. Tradução de B. Vitrac. Paris: PUF.
- Hofstetter, R. & Valente, W. R. (2017). (Org.). *Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores*. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física.
- Jahn, A. P. & Magalhães, G. R. (2023). As transformações geométricas em tempos pré-modernos: um estudo preliminar. In: *Anais do XV Encontro Paulista de Educação Matemática* (pp. 1-12). Guaratinguetá, SP.
- Munakata, K. (2016). Livro didático como indício da cultura escolar. *História da Educação*, 20(50), 119-138.
- Leme da Silva, M. C. (2008). A geometria escolar moderna de Osvaldo Sangiorgi. In: W. R. Valente (Org.). *Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno*. (pp. 69-93). São Paulo, SP: Annablume Editora.
- Leme da Silva, M. C. (2022). Abandono do ensino de geometria e a Matemática Moderna: uma revisão histórica. *Zetetiké*, 30, 1-22.
- OECE (Organização Europeia para a Cooperação Económica). (1961). *Mathématiques Nouvelles*. Paris: OECE.
- Pastor, E. S. & Leme da Silva, M. C. (2023). O ensino de geometria para o 1º ciclo do curso secundário em tempos pré-modernos. In: *Anais do XV Encontro Paulista de Educação Matemática* (pp. 1-13). Guaratinguetá, SP.
- Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, 1, 7-17.
- Sangiorgi, O. (1958). *Matemática para a Terceira Série Ginásial*. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Sangiorgi, O. (1967). *Matemática Curso Moderno*. 3º Volume para os ginásios. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Sangiorgi, O. (1966). *GUIA para uso dos PROFESSORES*. 3º Volume – Matemática Curso Moderno. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Santos, J. G. (2023). *Um estudo hermenêutico sobre as demonstrações no Movimento da Matemática Moderna*. 182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP.
- Valente, W. R. (2008). Osvaldo Sangiorgi, um *best seller*. In: W. R. Valente (Org.). *Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno*. (pp. 13-41). São Paulo, SP: Annablume Editora.
- Valente, W. R. & Bertini, L. F. (2022). *A Matemática do ensino: por uma história do saber profissional, 1870-1960*. São Paulo, SP: Universidade Federal de São Paulo.