Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Tarefas de aprendizagem profissional e o conhecimento matemático envolvendo a estrutura algébrica de Grupos: uma experiência na licenciatura em Matemática

Vania Batista Flose Jardim
Instituto Federal de São Paulo
São Caetano do Sul, SP — Brasil
vaniaflose@ifsp.edu.br
0000-0001-7325-267X

Marcia Aguiar
Universidade Federal do ABC
São Paulo, SP — Brasil
marcia.aguiar@ufabc.edu.br
0000-0001-5824-0697

Alessandro Jacques Ribeiro
Universidade Federal do ABC
São Paulo, SP — Brasil
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br
0000-0001-9647-0274

2238-0345

10.37001/ripem.v13i4.3621

Recebido • 09/05/2023
Aprovado • 10/08/2023
Publicado • 01/09/2023

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Considerando a formação inicial de professores, o objetivo deste artigo é compreender como tarefas de aprendizagem profissional são realizadas em aulas de uma disciplina de Álgebra na licenciatura em Matemática. Utilizando ciclos de *Design-Based Research*, foram coletados documentos e gravações em vídeo ao longo do desenvolvimento das aulas. Os dados foram analisados de modo a interpretar como os futuros professores mobilizam o Conhecimento do Conteúdo Relacionado à Escola e como as formadoras geram oportunidades de aprendizagem profissional para eles. Os resultados indicam a possibilidade de abordar a matemática acadêmica em disciplinas específicas da licenciatura, tendo como foco a formação docente e as modificações que os conhecimentos dos licenciandos podem sofrer durante a formação. Conclui-se que o uso de recursos que exploram conexões entre a matemática acadêmica e escolar, como foi o caso das tarefas formativas, parece ser um caminho para a promoção de discussões matemáticas e didáticas na licenciatura.

Palavras-chave: Formação Inicial de Professores. Matemática Acadêmica. Ensino de Matemática. Aprendizagem Profissional. Álgebra.

Professional learning tasks and mathematical knowledge involving the algebraic structure of Groups: an experience in the degree in Mathematics teaching

Abstract: Considering the teacher education of prospective teachers, the objective of this article is to understand how professional learning tasks are carried out in classes of a course of Algebra in the teacher education. Using Design-Based Research cycles, documents and video recordings were collected throughout the course of the classes. Data were analyzed in order to interpret how future teachers mobilize School-Related Content Knowledge and how teacher educators generate professional learning opportunities for them. The results indicate the possibility of approaching academic mathematics in specific-content disciplines of the teacher education, focusing on teacher training and the changes that future teachers' knowledge may undergo during training. It is concluded that the use of resources that explore connections between academic and school mathematics, as was the case with formative tasks, seems to be a way to promote mathematical and didactic discussions in the teaching degree.

Keywords: Prospective Teacher Education. Academic Mathematics. Mathematics Teaching. Professional Learning. Algebra.

Tareas de aprendizaje profesional y conocimiento matemático involucrando la estructura algebraica de Grupos: una experiencia en la licenciatura en Matemáticas

Resumen: Teniendo en cuenta la formación inicial de los profesores, este artículo tiene como objetivo comprender cómo se llevan a cabo las tareas de aprendizaje profesional en las clases de una asignatura de Álgebra en la carrera de Matemáticas. Usando ciclos de Investigación Basada en Diseño, la investigación recopiló documentos y grabaciones de video del desarrollo de la clase. Los datos se analizaron para interpretar cómo los futuros maestros movilizan el conocimiento del contenido relacionado con la escuela y cómo los capacitadores generan oportunidades de aprendizaje profesional. Los resultados indican la posibilidad de abordar la matemática académica en disciplinas específicas de la carrera, considerando la formación docente y cómo se pueden modificar los saberes de los futuros docentes durante el proceso de formación. Se concluye que el uso de recursos que exploren conexiones entre las matemáticas académicas y escolares puede ser una forma de promover discusiones matemáticas y didácticas en la carrera docente.

Palabras clave: Formación Inicial Docente. Matemáticas Académicas. Enseñanza de las Matemáticas. Aprendizaje Profesional. Álgebra.

1 Introdução

O entendimento do conhecimento matemático não mais como único, levou ao uso de termos como “matemática escolar e matemática acadêmica” (Moreira & David, 2008; Klein, 2009). Ao mesmo tempo, pesquisas mais recentes têm buscado esclarecer a conexão entre estas duas formas de conhecimento e os benefícios que podem trazer à profissão docente (Wasserman, 2016).

Em relação aos professores, Fiorentini e Oliveira (2013) defendem que estes devem conhecer a matemática de forma profunda e diversificada, indo além do campo científico e atingindo, sobretudo, a matemática escolar. Isto porque tais conhecimentos podem proporcionar o desenvolvimento de uma aula de matemática significativa aos alunos, levando-os a atingir uma conexão entre o que é aprendido por eles e o que foi historicamente produzido. Dessa forma, o conhecimento matemático para a formação do professor deve estar direcionado à prática docente e se opor à visão colecionadora de fórmulas e procedimentos, como têm apontado estudos relacionados ao tema, conforme indicam Patrono e Ferreira (2021).

Nesse sentido, o conhecimento profissional vai além do entendimento do conteúdo e deve considerar o contexto em que o professor está inserido. Isso exige habilidades ainda maiores por parte dos formadores de professores (Fiorentini & Oliveira, 2013; Ribeiro & Ponte, 2020; Aguiar, Doná, Jardim & Ribeiro, 2021a), tornando necessário repensar a formação dos professores de acordo com as necessidades da profissão (Antunes, Cambrainha, Moustapha-Corrêa & Matos, 2021). Um exemplo seria abordar os conteúdos da matemática acadêmica com um olhar voltado para a matemática escolar, visando aprimorar a formação docente (Wasserman, 2017). No entanto, isso pode ser um desafio quando se trata de disciplinas específicas, como é o caso da Álgebra (Zazkis & Leikin, 2010).

Sendo assim, neste artigo, busca-se *compreender como as tarefas de aprendizagem profissional são realizadas em aulas de uma disciplina de Álgebra na licenciatura em Matemática.* Para isso, se busca responder duas questões: i) De que maneira os conhecimentos profissionais são modificados por futuros professores na realização de tarefas de aprendizagem profissional em uma abordagem de Ensino Exploratório? e ii) Que práticas e como os formadores as utilizam para gerar oportunidades de aprendizagem profissional quando procuram articular os conhecimentos matemáticos da estrutura algébrica dos Grupos ao ensino dos conteúdos escolares?

Diante disso, na próxima seção, apresentaremos o embasamento teórico sobre o conhecimento e as oportunidades de aprendizagem profissional na formação do professor, destacando, também, a importância da álgebra e suas conexões com o ensino. O objetivo é fornecer suporte à análise de um conjunto de aulas ministradas para duas turmas da disciplina Álgebra, abordando o tema de “Estrutura Algébrica de Grupos”.

2 O Conhecimento Matemático e a formação inicial do professor

Em continuidade às ideias apresentadas por Shulman (1986) sobre o conhecimento necessário para ensinar, novos estudos têm sido considerados no Brasil em relação a essa temática. Alguns deles estão relacionados a modelos específicos do conhecimento dos professores que ensinam matemática (Patrono & Ferreira, 2021). Entre esses modelos, destaca-se o Modelo de Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT, na sigla original em inglês), que combina conhecimento, prática de ensino e aprendizagem dos alunos, permitindo compreender como o conhecimento matemático é mobilizado na docência (Ball, Thames & Phelps, 2008).

No entanto, segundo Speer, King e Howell (2015), os seis domínios do MKT não esclarecem a relação entre a matemática acadêmica e a escolar, uma vez que os estudos que originaram esses domínios observaram professores atuando em contextos correspondentes aos anos iniciais e finais do ensino fundamental brasileiro. As mesmas autoras argumentam que o domínio do Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), relacionado ao conhecimento da matemática, de um modo mais geral, e o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), exclusivo ao ensino, parecem não ser suficientes para abordar o conhecimento matemático mobilizado por professores que lecionam no ensino médio ou no ensino superior. Apesar das semelhanças no ensino nos diversos níveis, Speer *et al*. (2015) indicam que a diversidade de abordagens e o uso de definições com o avanço na escolaridade, até o ensino superior, apontam para uma utilização diferenciada do conhecimento matemático acadêmico para sustentar o ensino, o que requer um melhor entendimento.

Para enquadrar um tipo de conhecimento necessário aos professores que atuam no ensino médio, Dreher, Lindmeier, Heinze e Niemand (2018) apresentam o *Conhecimento do Conteúdo Relacionado à Escola*[1] (SRCK, sigla em inglês), o qual considera as relações não triviais entre a Matemática Escolar (ME) e a Matemática Acadêmica (MA), e divide-se em três facetas (Figura 1):

i) Conhecimento sobre a estrutura curricular e sua legitimação no sentido de razões metamatemáticas: trata da relação dialética entre a matemática acadêmica e a escolar, abordada a partir de ideias fundamentais que permitem a inclusão de determinados conteúdos no currículo escolar.

ii) Conhecimento da relação entre a ME e a MA: explora como os tópicos da matemática

[1] Tradução para o português de *school-related content knowledge*.

escolar estão fundamentados pela matemática acadêmica, desvelando, assim, teoremas, provas e ideias que estão por trás de um conteúdo escolar.

iii) Conhecimento da relação entre a MA e a ME: apoia-se na transformação de conteúdos matemáticos de nível acadêmico, para fins didáticos, descomprimindo ou aparando a matemática acadêmica em matemática escolar.

Figura 1: Concepção do Conhecimento do conteúdo relacionado à escola (SRCK)

Fonte: Adaptado de Dreher *et al.* (2018, p. 330)

O SRCK compartilha conhecimentos com os matemáticos e não se mistura com o conhecimento pedagógico no que diz respeito aos equívocos dos alunos, por exemplo. Assim, é caracterizado por um olhar específico para a matemática, necessário para o desenvolvimento do conhecimento matemático do professor e que pode influenciar nas tomadas de decisão de cunho matemático e de seu ensino.

Ainda que a formação inicial de professores de Matemática, no Brasil, apresente diferenças com o contexto no qual o MKT foi originado, acredita-se que, ao considerar o SRCK, seja possível desvelar e entender como o conhecimento matemático pode ser mobilizado por futuros professores em um curso de licenciatura em matemática, o qual proporciona formação específica para atuar nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

3 A Álgebra Abstrata para o ensino

A Álgebra é uma área da matemática presente na Educação Básica, "por ser uma linguagem amplamente utilizada em diversos campos da Matemática, bem como de outras ciências" (Silva, Mondrini, Mocrosky & Pereira, 2021). Ela pode ser explorada em conjunto com os números e a geometria. Apesar das diversas concepções de álgebra apresentadas por professores e seus formadores, é importante compreender o ensino e a aprendizagem da álgebra por meio de conexões claras e objetivas, a fim de romper com modelos tecnicistas ainda encontrados nas aulas de matemática (Ribeiro, 2016; Silva *et al.*, 2021).

Por seu lado, Wasserman (2016) sugere que o ensino da matemática escolar, justificado pela Álgebra Abstrata, pode alterar o entendimento dos professores e promover influências no ensino. Zazkis e Marmur (2018) utilizam do conhecimento da matemática avançada para exemplificar ideias matemáticas elementares em cursos de formação inicial de professores, que podem ser amparadas pela estrutura algébrica de Grupos (EAG). Em ambos os estudos foram abordados o tratamento de propriedades algébricas, como a associatividade, comutatividade de operações em diferentes conjuntos e a relação entre um elemento, seu simétrico (ou inverso) e o neutro em um determinado conjunto munido de uma operação, bem como o uso do subscrito -1 para denotar o elemento simétrico (Wasserman, 2017; Zazkis & Kontorovich, 2016).

Já no estudo de McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase & Senk. (2012), encontramos o Conhecimento Matemático da Álgebra para o Ensino que, além de tratar o conhecimento matemático *per se*, explora as práticas no uso matemático do conhecimento no ensino, o que também foi abordado por Gonçalves, Ribeiro e Aguiar (2022). Segundo McCrory *et al.* (2012), são três as práticas que podem auxiliar na compreensão e avaliação do conhecimento dos professores para o ensino da álgebra: *conectar* tópicos, representações e domínios da álgebra; *aparar* a complexidade de um tópico da matemática avançada para obter entendimentos da matemática escolar; e *descompactar* significados ocultos em fórmulas e procedimentos, bem como direcionar e clarificar possíveis restrições.

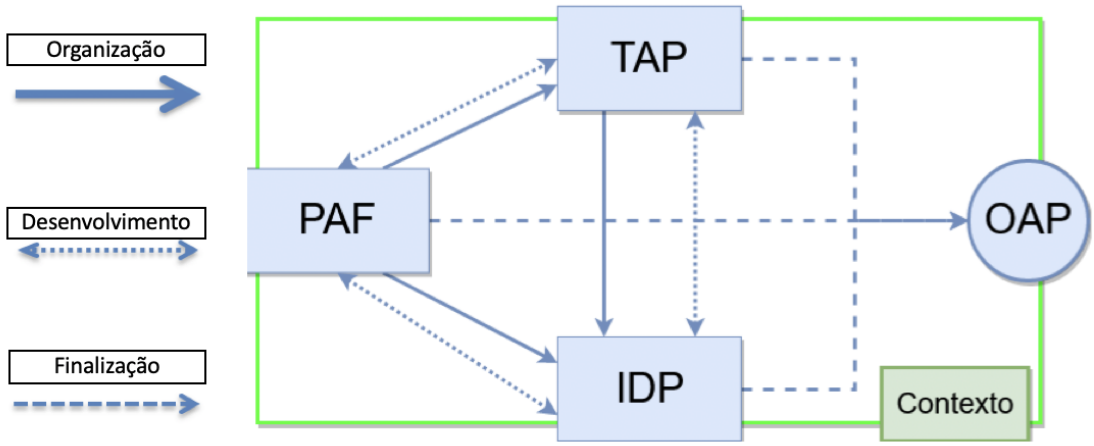
Ainda que McCrory *et al.* (2012) e Gonçalves *et al.* (2022) tenham explorado as práticas em contextos da escola básica, acreditamos que tais práticas possam ser exploradas na formação de professores em que se discute a Álgebra. É assim que utilizamos o referencial em nosso estudo.

4 As Oportunidades de Aprendizagem Profissional e o Ensino Exploratório na Formação de Professores

As oportunidades de aprendizagem profissional (OAP) são caracterizadas por "momentos coletivos em que os professores trabalham e discutem situações matemáticas e didáticas a fim de ampliar seus saberes profissionais para a docência" (Ribeiro & Ponte, 2019, p. 50) e utilizam de tarefas de aprendizagem profissional como um elemento chave para gerar tais oportunidades.

Os mesmos autores, em um outro estudo (Ribeiro & Ponte, 2020), apresentam um modelo teórico-metodológico denominado *Oportunidades de Aprendizagem Profissional para Professores* — Modelo PLOT[2] (Figura 2), o qual pode ser utilizado para organizar processos formativos com professores, bem como para avaliar a promoção de oportunidades de aprendizagem a partir da integração de três domínios: Papel e Ações do Formador (PAF), Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) e Interações Discursivas entre os Participantes[3] (IDP). De acordo com Ribeiro e Ponte (2020), cada um dos domínios apresenta duas componentes conceituais e duas operacionais, as quais serão mais bem exploradas a seguir.

Figura 2: Modelo PLOT



Fonte: Adaptado de Ribeiro e Ponte (2020)

O domínio PAF, explorado em detalhes no trabalho de Aguiar *et al.* (2021a), contempla, na dimensão conceitual, a *Aproximação* entre a matemática escolar e a matemática acadêmica

[2] Optamos em usar o acrônimo de *Professional Learning Opportunities for Teachers*, como já tem sido utilizado em outros trabalhos.

[3] Por fugir ao escopo deste artigo, não exploraremos o domínio IDP, o qual é detalhado por Trevisan, Silva, Silva e Ribeiro (2023, no prelo)

(e vice-versa), tomando-se por referência as ideias apontadas por Moreira e David (2008); e a componente *Articulação,* que considera as relações entre as dimensões matemática e didática do Conhecimento Profissional (Ponte, 1999). Já na dimensão operacional, têm-se as componentes *Gestão* de um ambiente de ensino exploratório (Ponte & Quaresma, 2016) e *Orquestração* de discussões matemáticas e didáticas (Borko, Jacobs, Seago & Mangram, 2014).

No domínio TAP, a dimensão conceitual é composta pelas componentes *Conhecimento Profissional*, caracterizado pelos conhecimentos matemáticos e didáticos para ensinar de forma integrada (Silver, Clark, Ghousseini, Charalambous & Sealy, 2007); e o *Ensino Exploratório*, que direciona um processo formativo de forma a proporcionar aos participantes um ambiente de ensino e aprendizagem exploratório (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). Na dimensão operacional, a TAP tem como componente a *Tarefa Matemática* de nível escolar e os *Registros de Prática*, que são evidências da aplicação da tarefa matemática na escola básica e outros materiais ligados à docência (Aguiar, Ponte & Ribeiro, 2021b).

Além de uma estrutura conceitual que apoie o *design* de processos formativos, é necessário considerar a importância de envolver professores e futuros professores no planejamento de aulas a serem realizadas na Educação Básica, as quais utilizem o Ensino Exploratório como abordagem didática (Aguiar *et al*., 2021b; Trevisan, Ribeiro & Ponte, 2020; Trevisan, Silva, Silva & Ribeiro, 2023). Entretanto, compreender como ocorre o desenvolvimento de aulas destinadas a futuros professores ainda é algo a ser mais bem explorado, já que “o ambiente em que a matemática é aprendida define o conhecimento que é criado” (Ticknor, 2012, p. 309).

O ensino exploratório propicia um ambiente de ensino e aprendizagem com momentos de trabalho autônomo organizado em etapas de introdução, realização, discussão e sistematização de uma tarefa (Canavarro *et al.*, 2012). Por sua vez, a gestão desse ambiente de ensino pode ser efetivada com o apoio de práticas que facilitem as discussões matemáticas dessas tarefas, como as cinco práticas pedagógicas apresentadas por Stein, Engle, Smith & Hughes (2008): antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e conectar as respostas dos alunos.

De uma forma análoga, Borko *et al.* (2014) apresentam um conjunto de práticas para gerenciar discussões baseadas em vídeo na formação de professores e as dividem em duas partes: planejamento e orquestração. As práticas direcionadas ao planejamento incluem a definição dos objetivos, a identificação de recursos e a elaboração de questões norteadoras para a discussão, as quais foram discutidas em Jardim, Ribeiro e Aguiar (2023). Já as práticas essenciais para a orquestração de discussões, segundo Borko *et al*. (2014), focam em auxiliar os professores na observação dos recursos ligados ao conteúdo matemático abordado, o pensamento dos alunos e os aspectos didáticos observáveis em vídeo. Segundo os autores, a primeira prática visa despertar o pensamento dos professores sobre o tema abordado, o que pode ser realizado ao incentivá-los a apresentar um comentário descritivo e, assim, ajudá-los a detalhar as ações observáveis no vídeo. A partir disso, a segunda prática propõe que o formador oriente e dê suporte na elaboração das ideias, procurando evidências nas alegações apresentadas pelos participantes. Por fim, a terceira prática visa ajudar os professores a conectarem suas análises às principais ideias matemáticas e didáticas, objetivadas inicialmente.

Ainda que tais práticas sejam propostas para explorar vídeos, nos parece que estas podem ser utilizadas para explorar outros recursos de prática, como protocolos com resoluções de alunos ao resolver tarefas, relatos ou episódios de aulas, entre outros, já que o uso destes artefatos apresenta propósitos semelhantes na formação, que é promover a aprendizagem dos professores (Ticknor, 2012; Ribeiro & Ponte, 2019; Aguiar *et al.,* 2021b).

5 Contexto do Estudo

O curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal de São Paulo, campus São Paulo, oferece a disciplina intitulada “Álgebra” para os alunos que estão no 6º semestre do curso, e aborda estruturas algébricas, como Anel, Corpo e Grupos. É nesse contexto que foram realizadas duas TAP, ambas abordando definições e propriedades relacionadas a EAG. A primeira (TAP-1) apresentava potencial para realizar conexões entre diferentes conteúdos matemáticos da escola básica (números racionais e matrizes) e a segunda (TAP-2) explorava, por meio de tarefas matemáticas, o conceito de função em diferentes níveis escolares.

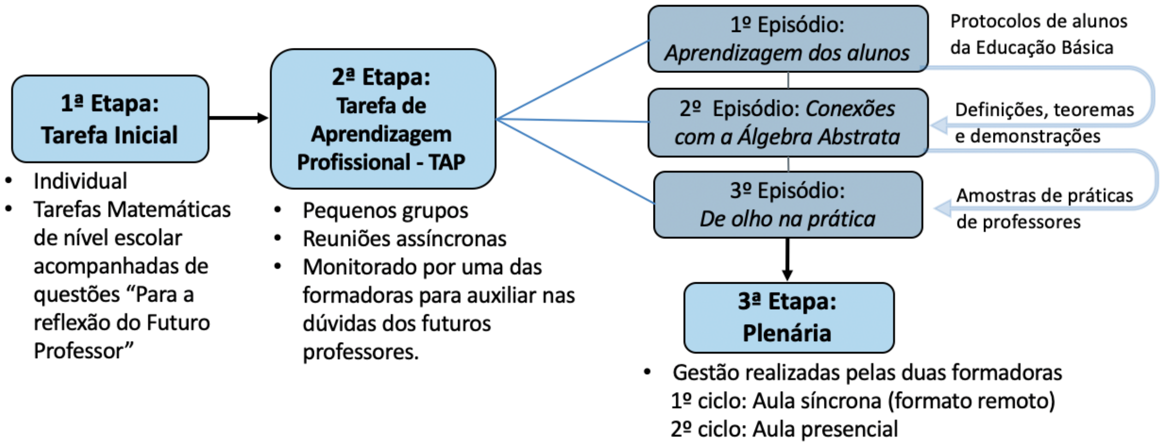
Para desenvolvê-las, utilizou-se a abordagem do ensino exploratório e o processo formativo ocorreu em três etapas: a introdução utilizando-se de uma tarefa inicial (TI); a realização das TAP em pequenos grupos (PG); e, por fim, a discussão e sistematização em plenárias. Na primeira etapa, os futuros professores (FP) resolveram individualmente uma tarefa inicial composta por cinco tarefas matemáticas que envolviam conteúdos matemáticos da Educação Básica. A tarefa foi complementada por perguntas intituladas “Para a reflexão do Futuro Professor”, as quais visavam a reflexão individual dos FP sobre os conteúdos matemáticos envolvidos e buscavam sondar seus conhecimentos acerca das dificuldades que alunos da Educação Básica poderiam ter ao resolverem tais tarefas matemáticas.

Após a primeira etapa, os futuros professores foram divididos em PG, de quatro a seis participantes para resolver as TAP de forma autônoma. Elas foram estruturadas em três partes, contendo questões para discussão a partir das tarefas matemáticas e protocolos com resolução de alunos; envolvendo conexões com a matemática acadêmica e práticas autênticas de professores da Educação Básica por meio de vídeos ou relatos de aulas, denominados por nós como “Casos de Prática”.

A TAP-1, intitulada “Mundo Paralelo”, foi disponibilizada aos FP acompanhada de instruções para que os PG discutissem e elaborarem suas resoluções. Após o envio das resoluções dos FP, foi realizada uma plenária com todos os participantes, na qual as resoluções da TAP foram compartilhadas, discutidas e sistematizadas.

Para as aulas, bem como para a coleta de dados, foram utilizadas as plataformas *Moodle* e *TEAMS*. A primeira foi usada para compartilhar os materiais didáticos e enviar resoluções, enquanto a segunda possibilitou a gravação em vídeo. Os encontros assíncronos dos PG foram realizados no ambiente tecnológico, sendo que as plenárias ocorreram em aulas síncronas no primeiro ciclo, realizado com uma turma no ano de 2021, e presencialmente no segundo ciclo, realizado com uma nova turma em 2022. A Figura 3 sintetiza todo o processo.

Figura 3: Desenvolvimento das TAP em cada ciclo



Fonte: Elaboração própria

Da mesma forma, a TAP-2, intitulada "Mundo Antagônico", foi disponibilizada aos PG e repetiu-se a segunda e terceira etapas do processo descrito na Figura 3. Após cada plenária, as formadoras conversaram sobre suas impressões e estabeleceram pontos positivos e negativos observados, a fim de refletir suas ações e propor novas possibilidades para a reaplicação da TAP. A gravação em áudio ou vídeo dessas conversas, juntamente com as avaliações dos FP realizadas por meio de questionário, compõe o momento de reflexão das formadoras.

Todo o processo envolvendo as duas TAP foi realizado com duas turmas do mesmo curso de licenciatura em anos subsequentes e, portanto, compõe dois ciclos de Planejamento, Desenvolvimento e Reflexão, ou ciclo PDR[4] (Trevisan *et al.*, 2020).

6 Métodos e procedimentos

A partir dos objetivos do estudo, do qual este artigo[5] faz parte, adotou-se uma abordagem qualitativa, e os dados coletados para análise nos levaram a uma perspectiva interpretativa do construtivismo social (Esteban, 2010). Adotou-se como método o *Design-Based Research* (DBR) (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer & Schauble, 2003), de modo a investigar as TAP como um artefato na abordagem de um problema. Isso foi concretizado por meio de ciclos de DBR, em que cada ciclo buscava delinear como: utilizar tais artefatos, desenvolver os planejamentos para sua utilização e, por fim, avaliar os resultados do uso e possíveis repercussões, com vistas à execução de um novo ciclo (Barbosa & Oliveira, 2015). Sendo assim, este artigo apresenta parte da avaliação dos dados da fase de desenvolvimento das TAP nos dois ciclos PDR, conforme foi descrito anteriormente no contexto do estudo. Vale esclarecer que, ao longo de toda a fase de desenvolvimento da DBR, a pesquisadora (e primeira autora deste artigo) estabeleceu parceria com a formadora responsável pelas turmas de FP para juntas aplicarem as TAP com o objetivo de abordar a EAG com vistas ao ensino de conteúdos da matemática escolar.

A formadora "Paulista" foi escolhida para participar da pesquisa por apresentar experiência em lecionar Álgebra para a licenciatura em Matemática e por demonstrar interesse em utilizar abordagens que envolvam os FP em experiências ligadas à sala de aula da educação básica. Além disso, sua formação acadêmica (licenciatura em Matemática, mestrado em Matemática, na área de Álgebra, e doutorado em Educação Matemática) chamou a atenção para uma possível visão multifacetada da formadora.

No total, além da formadora, participaram 35 futuros professores, sendo 15 no 1º ciclo (divididos em três PG) e 20 no 2º ciclo (divididos em cinco PG). A maioria desses FP (11 dos 15 FP — 1º ciclo; e 14 dos 20 FP — 2º ciclo) relatou ter alguma experiência com o ensino de matemática ao iniciarem a disciplina (p.e. participação em programas, como o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e Residência Pedagógica), e quase todos pretendiam realizar o estágio supervisionado no referido semestre letivo, exceto dois participantes do 2º ciclo.

Os dados coletados e utilizados para análise, neste artigo, consistiram nas resoluções produzidas pelos FP e nas gravações em vídeo, tanto dos momentos de resolução das TAP nos PG, como das plenárias conduzidas pelas formadoras nos dois ciclos PDR. Isso é ilustrado na Tabela 1, onde o código $PG3_2$-T1, por exemplo, indica a gravação do pequeno grupo de FP 3

[4] Consideramos que o desenvolvimento das duas TAP faz parte de um ciclo PDR, visto que ambas foram elaboradas simultaneamente.
[5] Este artigo compõe a tese de doutorado elaborada no Programa de Pós-Graduação em Ensino e História das Ciências e da Matemática da Universidade Federal do ABC, organizada em formato *multipaper*, escrita pela primeira autora e orientada pelos demais autores.

do 2º ciclo ao resolverem a TAP-1.

Tabela 1: Códigos para os dados em vídeo do desenvolvimento das TAP

Ciclo	TAP	Pequenos Grupos - PG					Plenárias
1º ciclo	TAP-1	$PG1_1$-T1	$PG2_1$-T1	$PG3_1$-T1	---	---	$P1_1$-T1
	TAP-2	$PG1_1$-T2	$PG2_1$-T2	$PG3_1$-T2	---	---	$P2_1$-T1
2º ciclo	TAP-1	$PG1_2$-T1	$PG2_2$-T1	$PG3_2$-T1	$PG4_2$-T1	$PG5_2$-T1	$P1_2$-T2
	TAP-2	$PG1_2$-T2	$PG2_2$-T2	$PG3_2$-T2	$PG4_2$-T2	$PG5_2$-T2	$P2_2$-T2

Fonte: Elaboração própria

Com base nos dados coletados, foi elaborado um relatório descritivo detalhando todo o processo, a partir do qual foram selecionados três episódios para elucidar as etapas do processo e, assim, compor o *corpus* de análise. Como metodologia de análise de dados, considerando as questões de pesquisa, foi utilizada a Análise de Conteúdo (Bardin, 2016) para subsidiar a construção de categorias. Tal construção se deu por meio de uma abordagem dedutiva, com base no aporte teórico apresentado anteriormente.

A organização das categorias é apresentada levando-se em conta duas vertentes: a primeira refere-se aos conhecimentos mobilizados pelos FP ao se envolverem com as TAP e tem por base teórica as ideias de Dreher *et al.* (2018) sobre o SRCK e é apresentada na Tabela 2:

Tabela 2: Categorias de análise relacionadas aos conhecimentos dos futuros professores

Fundamentos Teóricos	Categoria	Descrição	Indicadores
SRCK Conhecimento do conteúdo relacionado à escola (DREHER *et al.*, 2018)	Estrutura Curricular e Ideias Fundamentais (SR-EcIf)	Metaconhecimento da matemática e suas ideias fundamentais.	• Abordar conceitos e ideias fundamentais e seus significados em diferentes anos escolares
	De baixo para cima, ou da ME para a MA (SR-MeMa)	Exploração de tópicos da matemática escolar à luz da matemática acadêmica.	• Avaliar a integridade matemática de conceitos, teoremas, provas ou procedimentos utilizados em contextos escolares; • Tratar uma definição no contexto escolar considerando a Matemática Acadêmica; • Identificar razões e/ou provas que estão por trás de afirmações e suposições implícitas no contexto escolar.
	De cima para baixo, ou da MA para a ME (SR-MaMe)	Transformação da matemática acadêmica para fins didáticos	• Aparar ideias matemáticas para fins escolares mantendo a integridade matemática; • Descompactar uma ideia matemática; • Avaliar problemas/tarefas para o ensino de determinada ideia matemática.

Fonte: Elaboração própria

Já a segunda vertente refere-se às ações das formadoras para oferecer OAP (Ribeiro & Ponte, 2020) e incluem a utilização do conhecimento matemático por meio das práticas no ensino de álgebra (McCrory *et al.*, 2012) e as práticas para a orquestração de discussões (Borko *et al.*, 2014). Isso está sintetizado no Tabela 3.

Tabela 3: Categorias de análise relacionadas às práticas dos formadores

Fundamentos Teóricos	Categoria	Descrição	Indicadores
Práticas com uso do conhecimento matemático no ensino (McCRORY *et al.*, 2012)	Conectar conceitos (PR-CO)	Conexão entre conceitos e ideias matemáticas.	- Conectar e vincular conceitos e ideias matemáticas.
	Aparar ideias (PR-AP)	Reconhecimento de conhecimentos mais complexos em prol de um conceito	- Direcionar a matemática acadêmica para obter um entendimento local.
	Descompactar (PR-DE)	Evidências para a promoção de entendimentos matemáticos.	- Ajudar os FP a entender procedimentos; - Ajudar os FP a reconhecer restrições.
Práticas essenciais para a orquestração de discussões (BORKO *et al.*, 2014)	Despertar (OR-DP)	Estímulos para que as reflexões sejam compartilhadas	- Solicitar um comentário descritivo; - Atrair os FP para a discussão.
	Procurar evidências (OR-PE)	Procura por evidências nas alegações apresen-tadas	- Orientar os FP na elaboração das ideias expostas; - Extrair inferências das observações apresentadas.
	Conectar conhecimentos profissionais (OR-CC)	Conexão as análises e ideias matemáticas e pedagógicas.	- Solicitar que os FP façam conexões entre tópicos matemáticos e pedagógicos. - Sistematizar as discussões de acordo com os objetivos da aula.

Fonte: Elaboração própria

7 Resultados

Para a exposição dos resultados, os FP tiveram seus nomes identificados por nomes de bairros ou cidades ou próximas de São Paulo, e os momentos da resolução das TAP em PG e plenárias são apresentados por meio de três episódios nomeados como *Conhecimento para justificar*, *Conhecimento para explorar* e *Conhecimento para conectar*.

Episódio 1: Conhecimento para justificar

Na TAP-1, entre os protocolos com resoluções de alunos e trechos de materiais didáticos, foi apresentada uma vinheta de uma aula em que foi exposto o procedimento para realizar a divisão entre duas frações (Figura 4):

Figura 4: Parte da 3ª parte da TAP-1

1º Caso de Prática: Uma aula sobre divisão de frações

Durante uma aula destinada para o 7º ano do Ensino Fundamental, foi apresentada o seguinte procedimento para realizar a divisão entre duas frações:

Vinheta 1 - *Recorte do vídeo: 7:44 a 8:43*

Sabendo que (Q^*, ·) é um exemplo de grupo, responda às seguintes questões:

O que significa dizer *a gente inverte essa operação* [multiplicação] *e para compensar, a gente tem que inverter esta última fração?* Indique as conexões com a estrutura algébrica de Grupo apresentada acima.

Como você se utilizaria dessas conexões com a estrutura de grupos para explicar o procedimento apresentado no vídeo para seus alunos?

Fonte: Dados de Pesquisa

Com base em uma vinheta, as formadoras incluíram duas questões na 3ª parte da TAP-1, com o objetivo de *solicitar que os FP façam conexões entre tópicos matemáticos e pedagógicos.* Para isso, era necessário que os FP utilizassem a EAG para pensar em uma estratégia de ensino, o que seria explorado na primeira questão. Durante a resolução da TAP-1 no 1º ciclo, o PG1 explorou outros casos (p.e. $\frac{9}{10}:\frac{3}{5}$) para buscar uma justificativa e comentaram:

> Grajaú: *Agora, por que a divisão entre frações, eu posso trocar a operação, transformar em uma multiplicação e inverter* [a segunda fração]. *Eu não sei explicar isso. Eu não sei justificar. De verdade, eu só sei que pode.* [...]
>
> Lapa: *Acho que é aquela propriedade dos Grupos, que é a existência do inverso multiplicativo. Mas sair dessa propriedade e ir lá para o algoritmo para mim é bem distante* ($PG1_1$-T1, 2021).

Durante a resolução, os FP tiveram dificuldades em justificar o procedimento apresentado (*Eu não sei explicar*) e apontaram para a distância entre o conteúdo escolar e acadêmico (*para mim é bem distante*). Uma das formadoras monitorou os PG durante o trabalho autônomo e realizou uma intervenção para ajudar os FP a conectar o procedimento de divisão entre frações com as propriedades da EAG:

> Pesquisadora: *Olha lá, o que ela* [a professora no vídeo] *está fazendo é o 'algoritmo' que a gente aprendeu de toda a vida, certo?* [...] *Para que inverter o segundo para trocar para a multiplicação?* [...]
>
> Lapa: *A gente está multiplicando por 1?*
>
> Pesquisadora: *Humm, tem alguma coisa por aí* [....] *Pega essas frações aí* [referindo-se à multiplicação que os FP que estava na tela, 9/10 dividido por 3/5], *e ao invés de escrever desse jeito, qual é a outra forma que a gente pode escrever essa divisão? No papel talvez seja mais fácil* ($PG1_1$-T1, 2021).

A formadora iniciou sua mediação, refazendo a questão abordada na TAP e buscou resgatar o contexto escolar vivenciado pelos FP (*é o algoritmo que a gente aprendeu de toda a vida, certo?)* e, assim, *atraiu a atenção dos FP para a discussão do procedimento* ali tratado. Na sequência, ela confirmou a suposição de um dos FP (*tem alguma coisa por aí!*) e sugeriu uma nova representação para divisão inserida por eles e, assim, visava *extrair inferências das observações apresentadas*. Com sua ajuda, os FP conseguiram estabelecer uma justificativa para o procedimento:

> Grajaú: [...] *eu pensei assim: a gente vai para a multiplicação.* [...] *E na propriedade de Grupo eu tenho o elemento inverso, que daí dá 1* [quando operado com o simétrico] [...] *então se eu multiplicar por '1', e esse '1' for, em cima e embaixo da fração,* [...] *o inverso do denominador, então eu tenho no denominador 1 e daí eu trabalho só com as* [frações] *de cima, daí vai ser 9/10 vezes 5/3.*
>
> Lapa: *Nossa, agora eu entendi.*
>
> Grajaú: *Caraca!*
>
> Lapa: *O de baixo é o inverso, daí o de baixo 'some' porque multiplica pelo inverso, e fica 1. Multiplicar pelo inverso fica 1, que é a parte de baixo da fração, e a parte de cima você multiplica por 5/3, por que é o que sobra desse processo* ($PG1_1$-T1, 2021).

Para justificar o procedimento apresentado na TAP-1, os FP se utilizaram das propriedades da existência do elemento neutro (*Se eu quisesse que o meu denominador fosse* 1) e simétrico (*o inverso do denominador*) do Grupo em questão e, desse modo, *avaliam a integridade matemática do procedimento utilizado no contexto escolar*. Em seguida, dois FP reescreveram o exemplo como resposta à segunda questão da TAP e elucidaram aos demais participantes do PG o que foi discutido (Figura 5).

Figura 5: Exemplo apresentado pelos FP no GP1

$$\frac{\frac{9}{10}}{\frac{3}{5}} * 1 = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{3}{5}} * \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{9}{10}}{1} * \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{3}$$

Fonte: Dados de Pesquisa

Os participantes do PG utilizaram as propriedades da EAG para justificar a divisão entre duas frações e demonstrar como ensinariam essa ideia para alunos da Educação Básica. Isso permitiu que eles construíssem um novo significado para o procedimento explorado ao *aparar uma ideia matemática para um fim escolar mantendo a integridade matemática.*

Após conectar o conteúdo acadêmico com o escolar, o PG indicou uma possível mudança na forma como podem ensinar o referido procedimento. Isso pode ser observado no diálogo a seguir:

> Lapa: *Agora fez sentido! Eu acho que no vídeo ela* [a professora] *poderia ter dado um exemplo parecido, por que fica bem mais claro assim, do que só colocar o algoritmo.*
>
> Grajaú: [...] *a gente aceita como verdade e faz* [...] *e só agora eu descobri, por que a gente pode fazer isso* ($PG1_1$-T1, 2021).

Os FP aprimoraram seu conhecimento sobre o conteúdo matemático e refletiram sobre uma possibilidade para ensinar divisão entre frações, em comparação com a forma como haviam aprendido anteriormente.

Neste episódio, a formadora teve papel fundamental no uso das práticas de orquestração (OR-DP; OR-PE; OR-CC) para *ajudar os FP a entenderem o procedimento* para a divisão entre frações, o que se caracteriza como uma prática de descompactar um conhecimento para justificar um procedimento (PR-DE). Além disso, a formadora *direcionou a matemática acadêmica para obter um entendimento local*, o que caracteriza uma prática de *aparar* (PR-AP).

Por outro lado, os FP exploraram o conhecimento relacionado à EAG atrelada ao ensino de operações com racionais, partindo ora do contexto escolar, ora das propriedades algébricas (SR-MeMa, SR-MaMe).

2º Episódio: Conhecimento para explorar

A tarefa matemática 2, que fazia parte da TAP-1, abordava o conteúdo de multiplicação de matrizes e também foi acompanhada de protocolos de alunos da Educação Básica, parte dos quais são apresentados na figura 6:

Figura 6: Tarefa Matemática 2 acompanhada de um dos protocolos

Tarefa Matemática 2

Cilene está com algumas dúvidas em relação à multiplicação de duas matrizes (A e B).

a) Pode existir o produto A.B, por exemplo, e não existir o produto B.A?

b) As matrizes produto A.B e B.A podem ser de tipos diferentes?

c) Podemos ter A.B = B.A e A.B ≠B.A?

Protocolo de um aluno para o item c)

c) Sim, se A for matriz identidade, por exemplo, A.B = B.A
O ~~mes~~ mesmo vale se B for matriz identidade.
Se nem A nem B forem identidade, teremos A.B ≠ B.A

Fonte: Dados de Pesquisa

Ainda no primeiro ciclo, durante a plenária, a formadora Paulista perguntou aos FP sobre o item c (Figura 6):

Paulista: *Que tipo de propriedade eles estão pedindo aqui?*

Mooca: *A Comutativa?*

Paulista: *Isso! O que vocês ensinam ou aprendem no ensino básico [...], o que acontece com as matrizes? [...] o que pode ocorrer, ou não pode ocorrer [referindo-se à comutatividade]*

Mooca: *Que não, pois a gente aprende que a comutativa não vale pra elas ($P1_1$-T1).*

Paulista busca *atrair os FP para a discussão* e, ao mesmo tempo, resgatar o conhecimento comum adquirido por eles sobre propriedade comutativa durante a Educação Básica. Em seguida, ela direciona a discussão para um aprofundar do tema:

Paulista: *A forma como a gente decora* [...] *que o conjunto de matrizes para operação de multiplicação não é comutativo. Ponto! Aí a pergunta é: para todo tipo de matriz? [...] Bom, tem algumas restrições pra gente fazer a multiplicação de matrizes, mas será que dentro desse conjunto não existem matrizes que quando eu multiplico A por B e B por A esses produtos não seriam iguais? Existe?*

Capão Redondo: *Existe.*

Paulista: *Quais são? Me dá um exemplo.*

Capão Redondo: *Um exemplo seria A igual a B, e as elas sendo quadradas.* (P1$_1$-T1).

As formadoras direcionaram perguntas para fazer com que os FP *identificassem razões que estão por trás de afirmações e suposições implícitas no contexto escolar,* abordadas por meio de restrições. Esse exercício é comumente feito em disciplinas como Álgebra, em que exemplos de objetos matemáticos já conhecidos são usados para restringi-los ou expandi-los a fim de explorar novas ideias ou conceitos objetivados pela disciplina.

Na 2ª parte da TAP, são apresentadas as definições de EAG e de grupo abeliano, e as formadoras exploram tais propriedades do ponto de vista acadêmico, enfatizando a necessidade de um conjunto e uma operação definida. E ela continua a explorar a propriedade comutativa:

> Paulista: *Esse é um exemplo de que o enunciado* [da tarefa Matemática], *segundo vocês, tem que estar bem claro. Eu estou pensando no espaço de todas as matrizes? Eu consigo reduzir esse espaço, eu consigo trabalhar com alguns tipos de elementos específicos de matrizes que valem essa propriedade* [comutatividade]*?* [...]
>
> Pesquisadora: *Vamos restringir lá no 2x2. Então a gente já tem a matriz identidade* [referindo-se ao elemento neutro]. *Quando eu consigo garantir que os elementos das matrizes de ordem 2x2 tem inverso?* [...]
>
> Bela Vista: *Determinante?!*
>
> Pesquisadora: *Isso! Eu preciso que o determinante seja…*
>
> Bela Vista: *Seja… diferente de zero!*
>
> Pesquisadora: *Isso.* [...] *Quem sistematiza para mim, uma resposta para a segunda pergunta* [da TAP]*: 'Qual conjunto de matrizes, mediante a operação de multiplicação apresenta as propriedades de um Grupo?' Vou dar um pontapé: de ordem 2, mas vai valer para ordem n.*
>
> Capão Redondo: *Toda a matriz A que tiver determinante diferente de zero.*
>
> Pesquisadora: *Isso, e vai ser comutativo? Vai ser um grupo abeliano?*
>
> Capão Redondo: *Não!*
>
> Pesquisadora: *Só se eu fizer uma outra restrição, que foi o que a gente discutiu lá atrás* [referindo-se a discussão da tarefa matemática 2] (P1$_1$-T1).

As formadoras exploram a existência de conjuntos de matrizes em que as propriedades algébricas da multiplicação, como a comutatividade e a existência do elemento simétrico, pudessem estar presentes ao restringir e estender determinados conjuntos com uma operação. Dessa forma, as formadoras *ajudam os FP a reconhecer restrições* ligadas à ideia de comutatividade da multiplicação em conjuntos de matrizes para que se tenha uma EAG.

Ao utilizar exemplos de subconjuntos de matrizes que satisfazem a propriedade de comutatividade da multiplicação, as formadoras auxiliam os FP a *avaliar a integridade matemática do conceito.* Para isso, elas buscaram *extrair inferências das observações apresentadas* por meio de exemplos em que a multiplicação de matrizes é comutativa, pois os FP identificaram apenas casos triviais na Tarefa Inicial, como o uso da matriz identidade ou nula ou ainda quando as matrizes A e B são iguais. As formadoras usaram matrizes de ordem 2 com determinante diferente de 0 e matrizes diagonais não nulas para exemplificar um Grupo comutativo e permitir que os FP *avaliassem a tarefa de ensino* que lhes foi apresentada inicialmente.

A formadora retomou a questão da TAP para *sistematizar as discussões de acordo com o objetivo da aula,* que era explorar subconjuntos de matrizes que apresentam estrutura de subgrupo. Ela pediu a participação dos FP para responder a pergunta: *Qual conjunto de matrizes, mediante a operação de multiplicação, apresenta as propriedades de um Grupo?"*

As formadoras utilizaram a prática de *descompactar* (PR-DE) para abordar a comutatividade (ou não) de objetos matemáticos, usando matrizes como exemplo, e mostraram como construir conjuntos em que a multiplicação é comutativa ou não, ao passo que orquestraram as discussões (OR-DP; OR-PE; OR-CC). Essas discussões foram conectadas com uma tarefa matemática como pano de fundo e ajudaram os FP a usar conhecimentos escolares e acadêmicos juntos (SR-MeMa; SrMaME).

3º Episódio: Conhecimento para conectar

A TAP-2 "Mundo Antagônico" envolvia três Tarefas Matemáticas relacionadas ao conceito de funções em diferentes níveis escolares. O episódio em foco, neste momento, refere-se a uma dessas Tarefas Matemáticas, apresentada na figura 7:

Figura 7: Tarefa Matemática 3 da TAP-2 acompanhada de um protocolo

Tarefa Matemática 3: (Adaptado de UESC)

Uma mensagem pode ser codificada de inúmeras maneiras. Se, por exemplo, a cada letra do alfabeto for associado um número inteiro positivo n, considerando-se uma função f(n), de conhecimento apenas do remetente e do destinatário da mensagem, é possível estabelecer uma forma de codificação. Nesse caso, a função f é usada para codificar e sua inversa f^{-1}, para decodificar a mensagem. Considerando *A = 1, B = 2, ..., W = 23, X = 24, Y = 25, Z = 26 e f(n) = n + 3* para codificar a letra U, ao invés de transmitir o número associado a ela, que é 21, transmite-se a letra associada a *f (21) = 24*, que é X. Para decodificar a letra X recebida, observa-se que ela corresponde a 24. Logo, $f^{-1}(24) = 21$, que é U. Admitindo-se, hipoteticamente, que a função *f(x) = 2x+3* possa ser considerada função-chave para codificação de certo padrão de mensagens, qual é a expressão de sua inversa a ser utilizada na decodificação dessas mensagens?

Protocolo de um aluno para a TM3

Para obtermos o inverso de $f(x)=2x+3$
temos que inverter o resuttado para
sua forma original

então $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 3$

Fonte: Dados de Pesquisa

Durante a plenária do segundo ciclo da TAP-2 ($P2_2$-T2), a formadora Paulista comparou os elementos simétricos da multiplicação de racionais, abordados na TAP-1, com as funções inversas apresentadas na TAP-2, a partir de uma observação de um FP sobre o uso subscrito -1. Ela também apresentou uma interpretação para o equívoco apresentado no protocolo (Figura 7):

Diadema: *Esse é um problema que se tem em usar um mesmo símbolo para representar diferentes coisas* [...] *tem que estabelecer essas coisas, tem que deixar claro!*

Paulista: O *'-1' está associado com o que? Quando eu falo x elevado a -1, vocês estão pensando em quê?*

Alguns FP: *No inverso multiplicativo.*

Paulista: *No inverso multiplicativo, certo? De um número!* [...] *Então, quando eu pergunto para vocês,* *“qual é o inverso multiplicativo do 2?”, “é o um meio” por que?*

Perus: *Porque, se você multiplicar 2 por ½ dá o elemento neutro.*

Paulista: Que *é 1. A gente não fala isso para o aluno. Você só ensina o aluno assim: "ah, é o inverso multiplicativo do 2, troca!"* [numerador pelo denominador]. [...] *Se é 2 então é ½. Mas por que só troca?* [...] *Você troca, por quê? Olha, ele é o inverso porque quando eu pego eu pego ½ e, múltiplo por 2 dá 1, que é o elemento neutro. E daí ele* [o aluno] *está sabendo o que ele está fazendo* [...] *porque toda vez que ele ver o ‘-1’, ele troca”. Daí vê a função, e “troca”* [...]. *E na verdade esse não é o conceito do elemento simétrico. O simétrico é sempre quando você opera* [um elemento] *com o simétrico e obtém o elemento neutro* [...] *E aqui quando a gente estava falando o aluno pensou desse jeito mesmo.* [...] *ele só inverteu o 2, porque, ele só aprendeu a inverter 'números'.*

Paulista: *Primeiro, o inverso de uma função é uma coisa, e o inverso multiplicativo é outra. O conceito é o mesmo: se é inverso eu multiplicado e dá o elemento neutro, mas qual é a operação aqui?* ($P2_2$-T2, 2022).

Diadema iniciou a discussão sobre uso do subscrito -1, sem citar os conteúdos específicos que poderiam *identificar aspectos dos conceitos em diversos anos escolares* para o uso da referida notação. A formadora utilizou-se de questionamentos para *atrair os FP para a discussão* e alguns apresentaram uma interpretação do subscrito -1 como um indicador para o inverso multiplicativo. Embora utilizassem o termo “inverso multiplicativo”, ligado ao conhecimento acadêmico, os FP tinham dúvidas sobre esse conceito comum. A formadora explorou a definição de elemento simétrico para vincular o conceito de funções ao uso do subscrito -1 com comentários e questionamentos para *orientar os FP na elaboração das ideias expostas*.

A FP Perus mencionou a relação entre elemento, seu simétrico e o neutro e, assim, *tratou uma definição no contexto escolar considerando a Matemática Acadêmica,* e Paulista explorou esse conceito, apontando a definição de elemento simétrico. Dessa forma, a formadora *conectou e vinculou conceitos e ideias matemáticas.* Na sequência, buscou-se entender o significado da função inversa:

Paulista: *Primeiro, o inverso de uma função é uma coisa, e o inverso multiplicativo* [de um número] *é outra. O conceito é o mesmo: se é inverso* [simétrico] *eu opero e dá o elemento neutro, mas qual é a operação aqui?* [alguns segundos de silêncio]

Pesquisadora: *Por que essa função* [f(x)=2x+3] *é a inversa dessa* [f(x)= (x+3)/2]*? Tem que ter a operação! Qual é a operação?* [...]

Alguns FP: *Composição!*

Outros FP: *Multiplicação?*

Pesquisadora: *Então eu posso usar multiplicação?* [...] *Quando vocês acharam essa função inversa, qual procedimento vocês utilizaram?*

São Miguel: *A gente inverteu as variáveis!* [...]

Pesquisadora: *Vocês usaram um procedimento, mas esse procedimento está ligado à composição, certo? Por que?* [os FP refletem e comentam entre si].

Pesquisadora: *A relação entre as duas funções é a composição, porque uma é inversa da outra por causa da composição. E quem é elemento neutro da composição?*

São Miguel: *x.*

Diadema: *A função identidade*

Pesquisadora: *Isso, a função identidade, I(x)=x.*

Paulista: *Porque agora é a composição!* ($P2_2$-T2, 2022).

Observou-se a falta de consenso entre os FP em relação à operação envolvida pela Tarefa Matemática (composição ou multiplicação), o que foi explorado pela formadora ao *solicitar um comentário descritivo,* perguntando "qual procedimento vocês utilizaram?" para resgatar o que foi feito pelos FP ao resolverem a Tarefa Matemática e discutido nos PG. Como os FP não se sentiram confiantes em expor suas suposições, a formadora utilizou novas perguntas para *extrair inferências das observações apresentadas* e *atrair os FP para a discussão* na busca pelas conexões objetivadas.

> Pesquisadora: *E qual é a relação da função identidade com essas funções aqui?* [aponta para $f(x) = 2x + 3$ e $f(x) = (x + 3)/2$ escritas na lousa].
>
> Diadema: *Quando você opera uma* [função] *com a outra, dá a função identidade.*
>
> Pesquisadora: *Isso! Se eu fizer $f \circ f^{-1}$ou $f^{-1} \circ f$ resulta na função identidade.* [Anota na lousa $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$] (P2$_2$-T2, 2022).

Direcionados por tais questionamentos, os FP conseguiram *descompactar uma ideia matemática* fundamentada na relação entre um elemento, seu simétrico e o elemento neutro das funções em relação à operação de composição ($f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$). Esta ideia foi discutida anteriormente com a multiplicação de números racionais, como exemplificado na fala de Perus ($2 \cdot \frac{1}{2} = 1$), em que ambos envolvem o uso do subscrito -1, inicialmente levantado por Diadema. Tais colocações levaram as formadoras a *sistematizarem as discussões de acordo com o objetivo da aula,* que era explorar o Grupo das funções em relação à composição.

Com este processo, os FP identificaram uma razão para o uso comum do subscrito -1 em conceitos aparentemente distintos, ao *abordarem conceitos e ideias fundamentais e seus significados em diferentes anos escolares*, levando-os a *identificar uma razão que estava por trás de uma afirmação e de suposições implícitas no contexto escolar.*

Neste episódio, as formadoras utilizaram práticas para orquestrar discussões (OR-DP; OR-PE; OR-CC) e *conectaram* conceitos de inversos, utilizados na Educação Básica, com a definição de simétrico em uma EAG (PR-CC). Já os FP mobilizam conhecimentos sobre o uso do subscrito -1 no currículo escolar e apresentam pontos de vista da matemática escolar e acadêmica (SR-EcIf; SR-MeMa; SR-MaMe), o que pode levar a um novo significado do conceito matemático para os FP.

8 Discussão

Com o intuito de responder às questões de pesquisa: *De que maneira os conhecimentos profissionais são modificados por futuros professores na realização de Tarefas de Aprendizagem Profissional em uma abordagem de Ensino Exploratório?* e *Que práticas e como os formadores as utilizam para gerar oportunidades de aprendizagem profissional quando procuram articular os conhecimentos matemáticos da estrutura algébrica dos Grupos ao ensino dos conteúdos escolares?* — discutimos os resultados à luz do referencial teórico apresentado anteriormente e apresentamos, ao final, um esquema que busca sintetizar os conhecimentos mobilizados pelos futuros professores e as ações tomadas pelas formadoras na promoção de oportunidades de aprendizagem profissional.

As Tarefas Matemáticas permitiram levantar os conhecimentos matemáticos prévios dos FP, sem qualquer menção à matemática acadêmica ou ao ensino. Entretanto, ao passo que os Registros de Prática, como protocolos e vinhetas, foram explorados pelas formadoras, por meio do Ensino Exploratório atrelado às práticas para orquestração de discussões matemáticas e didáticas (Canavarro *et al*., 2012; Borko *et al*., 2014), foram observados momentos em que o conhecimento profissional foi abordado para oportunizar a aprendizagem profissional dos FP, (Ribeiro & Ponte, 2019, 2020; Aguiar *et al.,* 2021b).

No primeiro episódio, conhecimentos da matemática acadêmica e escolar foram mobilizados pelos FP para justificar o procedimento de divisão entre frações a partir das propriedades da EAG (Zazkis & Marmur, 2018). Os FP foram capazes de utilizar as ideias discutidas para pensar em como ensinar o procedimento de forma diferente da apresentada inicialmente nas discussões, o que indica uma mudança na forma de ensinar, ou seja, no SCK. Neste episódio, o direcionamento da formadora para aparar e descompactar conhecimentos matemáticos foi essencial para a mobilização dos conhecimentos profissionais dos FP (McCrory *et al.*, 2012).

No segundo episódio, discutiu-se a operação de multiplicação de matrizes e buscou-se encontrar conjuntos em que esta operação seja comutativa (Zazkis & Marmur, 2018). O direcionamento realizado pelas formadoras permitiu o desempacotamento da ideia (McCrory *et al.*, 2012) relacionada a não comutatividade da multiplicação entre matrizes e a existência de subconjuntos em que tal propriedade pode ser contemplada (Wasserman, 2017). Apesar de não ter sido abordado como tais conhecimentos poderiam modificar a forma como os FP podem ensinar, observa-se uma alteração no entendimento destes em relação à propriedade comutativa, o que é defendido por Wasserman (2016).

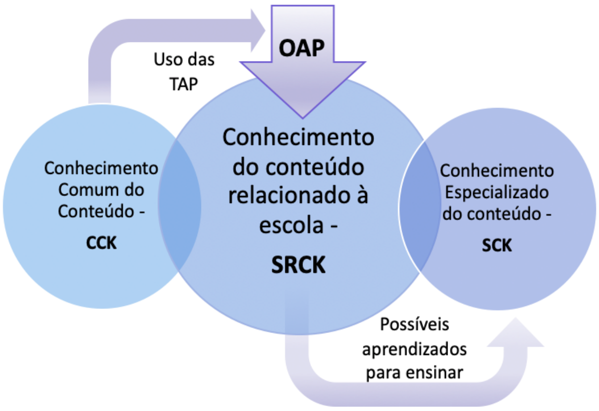
No último episódio, os elementos da TAP permitiram aos FP problematizar o uso do subscrito -1 atrelado à relação dos elementos de um Grupo G e o elemento neutro da operação (Zazkis & Kontorovich, 2016; Zazkis & Marmur, 2018; Wasserman, 2016). Explorar diferentes Grupos permitiu que as formadoras desvelassem o entendimento acerca do uso do subscrito -1 em diferentes conteúdos escolares que percorrem o currículo (McCrory *et al.*, 2012; Dreher *et al*., 2018).

Nos três episódios, as formadoras utilizaram as práticas essenciais para a Orquestração de Discussões (Borko *et al*., 2014), sendo que o primeiro episódio se baseou na utilização de um vídeo. Na disciplina de Álgebra na licenciatura, as formadoras conectaram conhecimentos sobre a EAG com conceitos da matemática escolar, como racionais, matrizes e funções (Zazkis & Marmur, 2018), utilizando as práticas *conectar*, *aparar* e *descompactar* conhecimentos (McCrory, *et al.,* 2012; Gonçalves *et al.*, 2022) o que caracterizou-se como OAP aos FP (Ribeiro & Ponte, 2019, 2020) conforme as TAP foram discutidas em um ambiente com este propósito (Ticknor, 2012).

Os FP apresentaram conhecimentos prévios sobre procedimentos e conceitos (CCK), mas conforme se envolveram com a TAP e foram indagados nas diferentes fases do Ensino Exploratório (Canavarro *et al*., 2012), mobilizaram conhecimentos do conteúdo relacionados à escola, o SRCK (Dreher *et al*., 2018), obtendo melhor entendimento sobre os conceitos matemáticos abordados, conforme é ilustrado na Figura 8.

Ao final, seus conhecimentos são modificados e estes podem ser utilizados em prol do ensino, o que estaria ligado ao SCK. Isto ficou explícito no primeiro episódio quando se propõe ensinar o procedimento baseado na estrutura algébrica discutida.

Figura 8: Relação entre os constructos do conhecimento do conteúdo



Fonte: Elaboração própria

9 Considerações

Utilizar-se das conexões entre a matemática escolar e acadêmica, em cursos de formação inicial de professores, é ainda um desafio dada a falta de pesquisas sobre o tema (Moreira & David, 2008; Wasserman, 2017). Ao encontro disto, este artigo buscou *compreender como as tarefas de aprendizagem profissional são realizadas em aulas de uma disciplina de Álgebra na licenciatura em Matemática* para, assim, desvelar um caminho pelo qual formadores de professores podem se utilizar destas conexões no ensino de conteúdos escolares.

O uso do constructo SRCK para conectar a matemática escolar à acadêmica na e para a aprendizagem profissional do professor parece ser essencial em um contexto de formação inicial para professores de matemática para a Educação Básica (Moreira & David, 2008; Speer *et al*., 2015), pois permite explorar as facetas necessárias para o conhecimento do conteúdo e sua utilização no ensino (Dreher *et al*., 2018).

Além disso, a exploração do Conhecimento Matemático da Álgebra para o Ensino expande o que foi exposto por McCrory *et al.* (2012), uma vez que as práticas relacionadas a este conhecimento foram observadas em um ambiente acadêmico de ensino. Quanto ao uso das TAP associadas às práticas para a orquestração, tal articulação nos parece um caminho para promover discussões matemáticas e didáticas em um contexto de formação inicial (Borko *et al*., 2014; Ribeiro & Ponte, 2020, Trevisan *et al*., 2023).

No entanto, é importante ressaltar que a modificação dos conhecimentos não foi uniforme entre os participantes e, sendo assim, ainda é necessário investigar se e como essas aprendizagens são incorporadas na prática docente, além de novos estudos para compreender como as discussões entre aos participantes contribuíram para a criação das OAP durante este processo. Por fim, entendemos que também são necessárias mais pesquisas para explorar as possibilidades de abordar as conexões entre a matemática acadêmica e a escolar em outras áreas da matemática, como em Análise ou Geometria, para enriquecer a formação dos professores de matemática (Moreira & David, 2008).

Referências

Aguiar, M., Doná, E. G., Jardim, V. B. F. & Ribeiro, A. J. (2021a). Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores de matemática: desvelando as ações e o papel do formador durante um processo formativo. *Acta Scientiae*, 23(4), 112-140.

Aguiar, M., Ponte, J. P. D. & Ribeiro, A. J. (2021b). Conhecimento Matemático e Didático de

Professores da Escola Básica acerca de Padrões e Regularidades em um Processo Formativo Ancorado na Prática. *Boletim de Educação Matemática*, *35*(70), 794-814.

Antunes, G., Cambrainha, M., Moustapha-Corrêa, B. & Matos, D. (2021). Os encontros temáticos da licenciatura em matemática da Unirio como espaço de (auto) formação de formadores de professores. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, *11*(3), 57-75.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Sage Journals*, *59*(5), 389-407.

Barbosa, J. C., & Oliveira, A. M. P. (2015). Por que a pesquisa de desenvolvimento na Educação Matemática? *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18), 526-546.

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo*. (1) Lisboa: Edições 70.

Borko, H., Jacobs, J., Seago, N., & Mangram, C. (2014). Facilitating video-based professional development: Planning and orchestrating productive discussions. In: Y. Li; E. A. Silver & S. Li. (Ed.). *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 259-281). Cham: Springer International Publishing.

Canavarro, P.; Oliveira, H. & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In: *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Cobb, P.; Confrey, J.; DiSessa, A.; Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Dreher, A.; Lindmeier, A.; Heinze, A. & Niemand, C. (2018). What kind of content knowledge do secondary mathematics teachers need? *Journal für Mathematik-Didaktik*, *2*(39), 319-341.

Esteban, M. P. S., (2010). *Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições*. Tradução Miguel Cabrena. Porto Alegre, RS: AMGH.

Fiorentini, D. & Oliveira, A. T. D. C. C. D. (2013). O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Boletim de Educação Matemática*, *27*(47), 917-938.

Gonçalves, M. M.; Ribeiro, A. J. & Aguiar, M. (2022). Ressignificando conhecimentos profissionais de um professor em pesquisa sobre a própria prática: o ensino de álgebra e o conceito de simetria. *Boletim GEPEM*, *80*, 193-230.

Jardim, V. B. F.; Ribeiro, A. J.; & Aguiar, M. (2023) O uso de Tarefas de Aprendizagem Profissional para o ensino da estrutura algébrica de Grupos na Licenciatura em Matemática. *Perspectivas da Educação Matemática*, *16*(42), 1-23.

Klein, F. (2009) Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior. (v. I, parte I: Aritmética). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

McCrory, R.; Floden, R.; Ferrini-Mundy, J.; Reckase, M. D. & Senk, S. L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584-615.

Moreira, P. C. & David, M. M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 23-40.

Patrono, R. M. & Ferreira, A. C. (2021). Levantamento de pesquisas brasileiras sobre o conhecimento matemático para o ensino e formação de professores. *Revemop, 3*, 1-24.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: *IV Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (pp. 59-72). Aveiro: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, *93*, 51-66.

Ribeiro, A. J. (2016). Álgebra e seu ensino: dando eco às múltiplas "vozes" da educação básica. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *7*(4), 1-14.

Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae, 21*(2), 49-74.

Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetiké, 28*, 1-20.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Silva, L. C. P.; Mondrini, F.; Mocrosky, L. F. & Pereira, A. L. (2021). Compreensões de professores de Matemática sobre a presença da Álgebra no Ensino Fundamental II. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, *11*(3), 112-126.

Silver, E. A.; Clark, L. M.; Ghousseini, H. N.; Charalambous, C. Y. & Sealy, J. T. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 261-277.

Speer, N. M.; King, K. D. & Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*, 105-122.

Stein, M. K.; Engle, R. A.; Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Ticknor, C. S. (2012). Situated learning in an abstract algebra classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *81*, 307-323.

Trevisan, A. L.; Silva, D. I. B. D.; Silva, J. M. P. D. & Ribeiro, A. J. (2023). Oportunizando Aprendizagens Profissionais a Professores: interações discursivas em um processo formativo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *37(76)*, 688-708.

Trevisan, A. L.; Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2020). Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-Based Teacher Education Program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2), 1-14.

Wasserman, N. H. (2016). Abstract algebra for algebra teaching: Influencing school mathematics instruction. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *16*, 28-47.

Wasserman, N. H. (2017). Making sense of abstract algebra: Exploring secondary teachers' understandings of inverse functions in relation to its group structure. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 181-201.

Zazkis, R. & Kontorovich, I. (2016). A curious case of superscript (− 1): Prospective secondary mathematics teachers explain. *The Journal of Mathematical Behavior*, *43*, 98-110.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical thinking and learning*, *12*(4), 263-281.

Zazkis, R. & Marmur, O. (2018). Groups to the rescue: Responding to situations of contingency. *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers*, 363-381.