Sociedade Brasileira de Educação Matemática

RIPEM

Reflexões de licenciandos em Matemática sobre suas estratégias de resolução de um problema de combinação simples

Marcelo Carlos de Proença
Universidade Estadual de Maringá
Maringá, PR — Brasil
mcproenca@uem.br
0000-0002-6496-4912

Caleb da Silva Araujo Campelo
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
Imperatriz, MA — Brasil
caleb.campelo@uemasul.edu.br
0000-0001-5328-0825

Ana Beatriz de Oliveira
Universidade Estadual de Maringá
Maringá, PR — Brasil
anaboliveirac@gmail.com
0000-0002-4362-9111

CC BY NC SA

2238-0345

10.37001/ripem.v14i1.3618

Recebido • 12/09/2023
Aprovado • 06/12/2023
Publicado • 01/01/2024

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Este artigo tem o objetivo de analisar e evidenciar as reflexões de futuros professores de matemática sobre as estratégias na resolução de um problema de combinação simples. Desenvolvemos uma pesquisa qualitativa no contexto de aulas teóricas de uma disciplina do curso de licenciatura acerca da teoria da resolução de problemas. Para isso, 11 estudantes paranaenses resolveram um problema de combinação simples. Os resultados mostraram que os participantes acreditavam que as estratégias de diagrama e tabela eram iguais. Após as discussões, compreenderam que as estratégias em si apresentam as próprias representações, porém não mencionaram de forma clara as ligadas à execução. Concluímos que as reflexões dos licenciandos em Matemática proporcionaram a compreensão das representações das estratégias e que passaram a valorizá-las ao trabalho em sala de aula.
Palavras-chave: Resolução de Problemas. Combinatória. Estratégia. Representação.

Prospective mathematics teachers' reflections on their strategies for solving a simple combination problem

Abstract: This article aims to analyze and highlight prospective mathematics teachers' reflections on the strategies used to solve a simple combination problem. We carried out a qualitative study in the context of theoretical classes in an undergraduate course on the theory of problem-solving. To this end, 11 students from Paraná solved a simple combination problem. The results showed that the participants believed the diagram and table strategies were the same. After the discussions, they understood that the strategies have their own representations but did not mention those linked to execution. We conclude that the reflections of the mathematics undergraduates provided an understanding of the representations of the strategies and that they began to value them when working in the classroom.

Keywords: Problem Solving. Combinatorial. Strategy. Representation.

Reflexiones de estudiantes de pregrado en Matemáticas sobre sus estrategias para resolver un problema de combinación simple

Resumen: El artículo tiene como objetivo analizar y evidenciar las reflexiones de los futuros profesores de matemáticas sobre sus estrategias para la resolución de un problema de combinación simple. Desarrollamos una investigación cualitativa en el contexto de las aulas teóricas de una asignatura de la carrera de teoría de la resolución de problemas, en la que 11 estudiantes de Paraná resolvieron un problema de combinación simple. Los resultados mostraron que los participantes creían que las estrategias del diagrama y de la tabla eran iguales. Después de las discusiones, entendieron que las estrategias mismas tienen sus propias representaciones, pero no mencionaron claramente las representaciones vinculadas a la ejecución. Concluimos que las reflexiones de los estudiantes de pregrado en Matemáticas lograron brindar una comprensión de las representaciones de sus estrategias y que comenzaron a valorar dichas representaciones en su trabajo en el aula.

Palabras clave: Solución de Problemas. Combinatoria. Estrategia. Representación.

1 Introdução

Indica-se a resolução de problemas como um caminho no ensino para ajudar os alunos a desenvolverem competências, habilidades, conhecimentos matemáticos e a relação da matemática com o mundo (Lester & Cai, 2016; Brasil, 2018; Proença, Campelo & Santos, 2022). Compreender a resolução de problemas para o ensino implica desenvolver conhecimentos inerentes à formação de professores que ensinam matemática, como os de cunho matemático, pedagógico e curricular (Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008; Carrillo-Yañez *et al*., 2018).

Um aspecto significativo da resolução de problemas envolve o processo, o qual, do ponto de vista cognitivo, orienta alguém a seguir etapas de pensamento. Elas podem ser compreendidas como a sequência não linear: representação (compreender o problema), planejamento (apresentar uma estratégia), execução (realizar essa estratégia) e monitoramento (rever a resposta e a resolução seguida) (Proença, 2018).

Sobre a etapa que envolve apresentar uma estratégia de resolução, a literatura mostra que a maioria dos estudos foca em investigar acerca dos tipos de estratégias de resolução de vários problemas por alunos e futuros professores, e as que os professores realmente utilizam no ambiente de sala de aula (Pantziara, Gagatsis & Elia, 2009; Lockwood, 2015; Gomes & Viseu, 2017; Aydin-Güç & Daltaban; 2021; Fidelis *et al*., 2021; Martins & Martinho; 2021; Wu & Molnár, 2022). Apenas o estudo de Lockwood e Gibson (2016) enfatizou a compreensão da estratégia específica do uso de lista sistemática e lista parcial. Por sua vez, a pesquisa de Oliveira e Proença (2022) dedicou-se a compreender características, potencialidades e limitações da estratégia de uso da tabela. Ambos os trabalhos envolveram futuros professores. Contudo, é relevante realizar e ampliar estudos voltados à diferenciação de estratégias de resolução de problemas.

O contexto deste artigo se deu em aulas de uma disciplina do curso de licenciatura em Matemática que tratou das etapas de resolução de problemas, especificamente sobre identificar estratégias de resolução de um problema de combinatória. Durante essas aulas, os licenciandos apontaram que eram iguais algumas estratégias consideradas por eles. Isso foi o grande motivador para esta pesquisa. Assim, este trabalho objetivou analisar e evidenciar as reflexões de futuros professores de matemática sobre as estratégias na resolução de um problema de combinação simples. Elaborou-se a estrutura do artigo, de modo a apresentar a resolução de problemas e as estratégias de resolução de problemas, bem como sua importância no ensino. Em seguida, apresentam-se a metodologia, os resultados e a discussão, finalizando com as conclusões.

2 Resolução de problemas

Autores como Schoenfeld (1985), Mayer (1992), Polya (1994), Echeverría (1998), Sternberg (2010) e Proença (2018) versam sobre dois aspectos teóricos da resolução de problemas. O primeiro trata do que é um problema, ou seja, do significado do termo. O segundo aborda o processo de resolução de problemas, a fim de elucidar o caminho cognitivo percorrido ao resolver um problema, o que envolve etapas de resolução. Sobre o que é um problema, Proença (2018) aponta que

> uma situação de Matemática se torna um problema quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta. Não se trata, assim, do uso direto de uma fórmula ou regra conhecidas — quando isso ocorre, a situação tende a se configurar como um exercício (pp. 17-18).

Portanto, há a diferença entre problema e exercício. Enquanto o primeiro necessita da criação de um caminho de resolução, o segundo apresenta um meio imediato para encontrar a resposta (Echeverría, 1998). Nesse sentido, o processo de resolução de problemas, ou seja, o caminho a ser trilhado, perpassa por etapas. Proença (2018) descreve quatro etapas do processo de resolução de problemas: representação, planejamento, execução e monitoramento.

A *representação* se relaciona à interpretação e à compreensão do problema, envolvendo: a) o conhecimento linguístico, associado aos termos e às expressões da língua materna que fazem parte do enunciado; b) o conhecimento semântico que corresponde aos termos matemáticos que fazem parte do problema; c) o conhecimento esquemático que consiste em reconhecer a natureza do problema, ou seja, se é ligado à álgebra, à geometria, à aritmética entre outros.

Na segunda etapa, o *planejamento*, estabelece-se um caminho de resolução. Para isso, é necessário o conhecimento estratégico, que consiste na organização de um caminho (estratégia) para chegar à resposta. Na etapa de *execução*, coloca-se em prática a estratégia estabelecida, o que envolve o conhecimento procedimental que consiste na realização dos cálculos matemáticos, na criação de esquemas, diagramas, desenhos etc. Por fim, o *monitoramento* implica rever a resolução realizada, corrigir possíveis erros e validar a resposta, analisando se condiz com o contexto do problema.

3 Estratégias de resolução de problemas e sua importância no ensino

Especificamente sobre a etapa de planejamento, o uso de estratégias de resolução é um ponto relevante. Dentre as possibilidades de estratégias de resolução de problemas, a literatura evidencia várias, como: tentativa e erro; fazer um desenho, um diagrama, um gráfico, um esquema, uma lista organizada, uma tabela; descobrir um padrão; trabalhar do fim para o princípio; usar dedução lógica; reduzir a um problema mais simples; fazer uma simulação (Krulik & Rudnick, 1982; Chi & Glaser, 1992; Polya, 1994; Vale & Pimentel, 2004; Posamentier & Krulik, 2009; Proença, 2018).

Segundo Chi e Glaser (1992), criar uma estratégia é buscar pelo espaço de solução. Para os autores, todo problema tem um estado inicial e um estado desejado, e a estratégia é o caminho percorrido entre esses dois estados. Dessa forma, Vale e Pimentel (2004) definem as estratégias como artifícios de raciocínio utilizados para conseguir resolver o problema.

Nesse sentido, Pozo e Angón (1998) defendem que o uso de estratégias se sustenta em processos psicológicos dos indivíduos, como o metaconhecimento, o qual implica a reflexão sobre o problema e a maneira como a pessoa soluciona, e o que chamaram de processos básicos, que seriam os esquemas de pensamento desenvolvidos pela pessoa. Corroborando essa visão sobre o indivíduo, Sternberg (2010, p. 387) explicou que “a boa estratégia depende, ao mesmo tempo, do problema e das preferências pessoais quanto aos métodos de resolução de problemas”.

No caso de seguir a estratégia de diagrama, pode-se pensar em uma contagem ou no conhecido diagrama de árvore de possibilidades, o que corresponde à preferência da pessoa, ligada à sua forma de raciocinar a partir do problema. As estratégias de diagrama, geralmente apresentadas em livros didáticos, correspondem a tipos de representações simbólicas, conforme mostraram Lima e Borba (2022).

Dreyfus (1991) explicou que as representações simbólicas são o primeiro passo de um processo do pensamento matemático avançado, junto dos aspectos cognitivos da pessoa. Essas representações são requisitadas no processo de resolução de problemas. Conforme Proença (2022) esclareceu a respeito da etapa de planejamento, a pessoa deve mobilizar a habilidade matemática de pensar em símbolos matemáticos.

Diante disso, a importância a respeito das estratégias de resolução no ensino está em o (futuro) professor desenvolver o conhecimento de que uma estratégia é um caminho de resolução e com várias possibilidades de estratégias. Isso é importante e imprescindível ao professor que pretende abordar a resolução de problemas em seu ensino (Krulik & Rudnick, 1982; Proença, 2018). Logo, deve perceber que as estratégias possuem diferentes formas de representação simbólica: um diagrama, uma tabela, um desenho e uma fórmula matemática são diferentes entre si. Além disso, deve saber que a escolha por determinada estratégia depende das preferências dos alunos, o que envolve suas escolhas diante dos conhecimentos. Sobretudo, ao abordar e discutir as estratégias dos alunos, em sala de aula, pode levá-los ao desenvolvimento de habilidades matemáticas na resolução de problemas, para o uso e o manejo de símbolos matemáticos, favorecendo a construção do pensamento matemático.

4 Metodologia

Esta é uma pesquisa de natureza qualitativa, a qual, na visão de Gerhardt e Silveira (2009, p. 31), “não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização etc.”. Nesse sentido, para compor o grupo social investigado para alcançar o objetivo de pesquisa, participaram 11 estudantes do curso de licenciatura em Matemática, de uma universidade estadual pública do Paraná.

Os licenciandos cursavam a disciplina de Estágio Curricular Supervisionado III, que faz parte do sétimo semestre do curso. Durante as aulas, envolveram-se no estudo da teoria sobre a resolução de problemas. Aceitaram participar da pesquisa, mediante aval ao Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Com isso, realizou-se uma atividade inicial que consistiu na resolução da seguinte situação de matemática (possível problema):

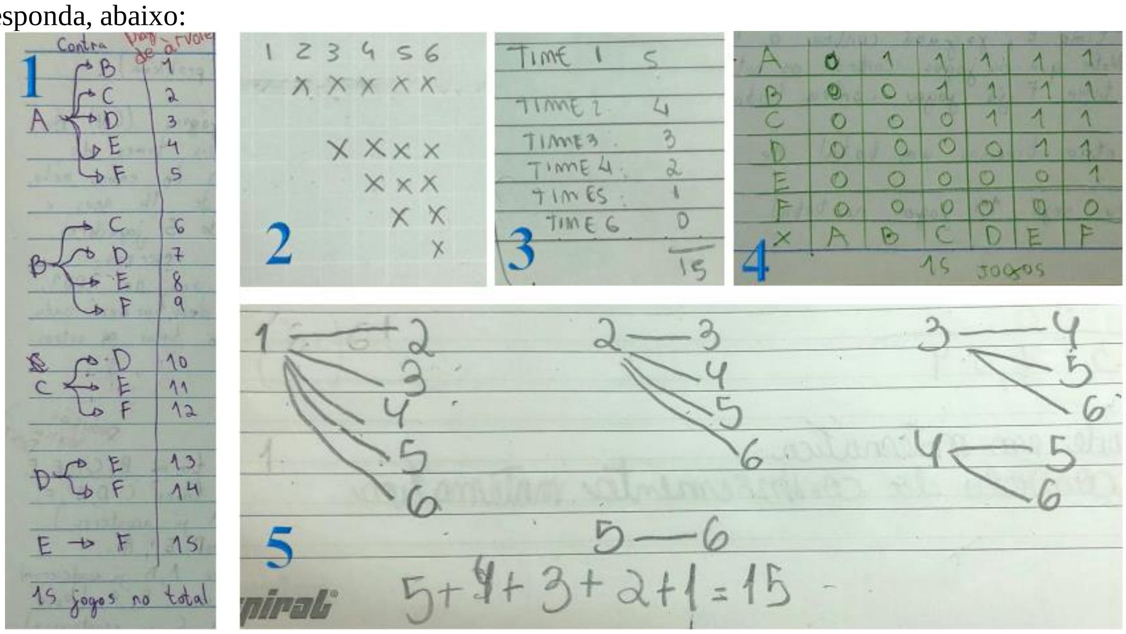
> *No Colégio de Aplicação Pedagógica da cidade de Maringá, no Paraná, há seis times de futebol de salão, envolvendo alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Esses alunos têm idade média de 16 anos e cada time deve ser composto por cinco jogadores, além de, no máximo, cinco jogadores reservas. Haverá um torneio no final do ano de 2021, de maneira que no planejamento deste torneio cada time jogue uma única vez com todos os outros. Quantos jogos devem ocorrer?*

Solicitaram-se as resoluções, usando a maior variedade de caminhos. Em seguida, eles as apresentaram na lousa. Também demonstramos duas estratégias não previstas pelos estudantes: o desenho de um hexágono e a fórmula de diagonal de um polígono (para o hexágono). Depois, explicou-se o que é uma estratégia e classificaram-se as estratégias utilizadas por eles, delimitando-as em diagrama de árvore, dedução lógica, tabela e da fórmula matemática (Combinação Simples).

Durante esse momento em que os licenciandos apresentaram as estratégias, eles disseram, curiosamente, que as estratégias dos colegas eram iguais. Esse fato chamou a atenção, pois uma tabela não é um diagrama, por exemplo. Diante disso, solicitaram-se esclarecimentos do motivo dessas respostas, e realizou-se a discussão e a reflexão sobre as ideias. Diante desse contexto, para entender a visão dos estudantes de que as estratégias eram iguais e evidenciar as reflexões oriundas das aulas da disciplina, elaborou-se um questionário *on-line*, com as estratégias que afirmaram serem iguais e com três perguntas sobre elas, conforme o Quadro 1.

Quadro 1: Questionário online

Considere as estratégias a seguir, feitas para resolver a situação dos times de futebol de salão. Responda, abaixo:



A cada colega que expôs em lousa a estratégia utilizada, foi perguntado quem tinha feito diferente. De modo geral, o entendimento da sua turma foi que as estratégias são iguais. Explique para este primeiro momento o motivo dessa primeira impressão que você teve.

Após as estratégias terem sido expostas a todos, fez-se a seguinte provocação: na verdade, essas estratégias não são iguais. Explique qual foi o seu entendimento/reflexão com base no novo olhar que teve dessas estratégias.

Qual o seu entendimento sobre a importância de o professor conhecer as estratégias de resolução de problemas como essas, tendo em vista o que os alunos podem fazer para resolver uma situação de matemática? Explique.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Para delimitar os dados, considerou-se o contexto formativo que gerou as reflexões dos licenciandos, e estabeleceram-se três eixos gerais: a) Compreensão inicial sobre as estratégias; b) Reflexões sobre as estratégias; e c) Reflexões sobre a importância de o professor conhecer estratégias de resolução. Assim, a análise das respostas dos licenciandos ocorreu por meio da Análise de Conteúdo, de acordo com os pressupostos de Bardin (2011), com base nas etapas de: 1) Pré-análise, na qual organizaram-se os dados para constituir o *corpus* da pesquisa; 2) Exploração do material, com uma leitura aprofundada para estabelecer as categorias, obtidas *a posteriori*, resultado das unidades de registro; e 3) Tratamento dos resultados, com a discussão e a interpretação dos dados, a partir de pesquisas sobre a resolução de problemas.

5 Resultados e discussão

O Quadro 2 mostra os resultados das explicações dos licenciandos a respeito da *compreensão inicial sobre as estratégias* as quais os levaram a apontar que seriam iguais.

Quadro 2: Compreensão inicial sobre as estratégias serem iguais

Categorias	Unidades de Registro
Estratégias utilizam de mesmo raciocínio	L4 — A princípio foi natural pensar que as estratégias são as mesmas, visto que todos chegaram numa mesma resposta. Além disso, **o raciocínio para resolver a questão é parecido na maior parte dos casos**, o que acaba dando a impressão de que as estratégias são as mesmas.
	L7 — Elas são iguais em sua essência, com algumas diferenças representativas, **elas possuem o mesmo princípio**, descrever cada jogos e anotar o total. Por exemplo, a 1 e 5 fazem o mesmo diagrama da árvore, e a 3 anota o resultado de cada diagrama. Já a 2 e a 4 são praticamente idênticas, exceto pelas representações notacionais, elas distribuem o diagrama da árvore em forma de tabela.
	L8 — Acredito que pareceram iguais **por ambos estarem relacionados, uma vez que se tratava do mesmo problema. Além disso, por serem ambos dispostos em tabelas e diagramas podem parecer a mesma estratégia a princípio**.
	L9 — A primeira impressão que eu tive, foi que **as estratégias 1, 2, 3 e 5 são as mais fáceis de compreensão, são parecidas com a estratégia que eu adotei**. A 4 estratégia é muito boa, porém não passou pela minha cabeça em montar um quadro.
	L10 — No primeiro momento as estratégias parecem as mesmas **pois já sabemos que o conteúdo é sobre combinação**, e como todos os caminhos utilizam conceitos de tal, acreditamos serem iguais.
	L11 — (...) tivemos que **fazer algum tipo de contagem ou adição para encontrarmos a solução para essa situação problema**, também a análise feita de maneira lógica, jogo a jogo de cada time de futsal. Fica bem evidente isso ao analisarmos a Estratégia 1, Estratégia 2, a Estratégia 3 e a Estratégia 5, percebe-se que as estratégias são parecidas (...).
Estratégias apenas apresentam organizações diferentes	L1 — A princípio as estratégias pareceram iguais pois **todas elas chegavam ao mesmo resultado de solução para a situação matemática e, também, havia semelhanças na maneira de escrevê-las**, então antes de entender o porquê elas eram diferentes a primeira impressão que se têm é que todas elas eram iguais.
	L2 — No primeiro momento pode parecer que as estratégias são iguais, pois olhamos para elas e vemos que **todas elas claramente chegam no mesmo**

	resultado, ou seja, sem usar um método muito diferente aí ficamos com a impressão de que são iguais por exemplo com as estratégias 1 e 5 que são extremamente iguais, a estratégia 4 pode parecer as duas anteriores só que representada em uma tabela e assim por diante, então sem um conhecimento prévio podemos falar que são todas iguais.
	L3 — Comentamos que as estratégias eram parecidas pois **ao olhar visualmente nos exemplos 1, 3 e 5 percebemos uma semelhança na resolução** e, assim, somos levados a entender que as estratégias podem ser consideradas iguais ou semelhantes.
	L5 — Veja que as estratégias parecem iguais, principalmente as 1, 3 e 5 e as 2 e 4, tanto que no início da discussão nós acreditávamos que **eram as mesmas estratégias, mas escritas de maneira diferente, mudando o nome dos times (de letras para números) e dispondo no papel de maneiras parecidas**, mas não iguais.
	L6 — A impressão de que as estratégias 1, 3 e 5 são as mesmas surge por serem diagramas que apenas foram organizados de forma diferentes. O mesmo acontece para as estratégias 2 e 4 onde foram feitas tabelas para a organização dos possíveis jogos, **novamente apenas organizados de maneiras diferentes**.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

As duas categorias — *Estratégias utilizam de mesmo raciocínio* (L4, L7, L8, L9, L10 e L11) e *Estratégias apenas apresentam organizações diferentes* (L1, L2, L3, L5 e L6) — mostram que, quando os licenciandos expuseram na lousa, aparentemente não revelaram conhecer que se tratava de diferentes estratégias. Isso fica claro, como nas falas dos estudantes L6 e L8, que responderam: "(...) *novamente apenas organizados de maneiras diferentes*" (L6); "*Além disso, por serem ambos dispostos em tabelas e diagramas podem parecer a mesma estratégia a princípio*" (L8). Isso vai ao contrário do que pesquisadores, como Krulik e Rudnick (1982), Posamentier e Krulik (2009) e Proença (2018), defenderam sobre a importância de conhecer claramente diversas estratégias para tratá-las, quando abordarem a resolução de problemas em sala de aula.

Esse resultado revela um aspecto que não foi foco dos estudos sobre estratégias de resolução de problemas, em geral, e de combinatória, em específico. Apenas os trabalhos de Lockwood e Gibson (2016) e Oliveira e Proença (2022) trataram sobre diferenciações, mas de estratégias específicas. Assim, conforme Gomes e Viseu (2017), ao investigar as estratégias de 12 futuros professores, é necessário, inicialmente, que licenciandos em Matemática se envolvam em uma formação que trate de diversas estratégias, como foi feito segundo este contexto formativo. Logo, além de os participantes terem a oportunidade do envolvimento com diferentes estratégias na resolução do problema de combinação simples, o Quadro 3 mostra os resultados das *reflexões sobre as estratégias*, após a discussão feita no coletivo com os licenciandos.

Quadro 3: Reflexões dos licenciandos após discussão das estratégias não serem iguais

Categorias	Unidades de Registro
As estratégias se	L2 — Após essa provocação falando que as estratégias não são iguais, começamos a ver de um jeito diferente as resoluções, sabendo que cada detalhe pode fazer a estratégia mudar totalmente, pois **você usa de artifícios diferentes**

diferenciam de acordo com suas particularidades	**e que fazem elas mudarem e, também, mudar a maneira de interpretação e analisar ela** (...).
	L10 — Cada estratégia **apresenta sua individualidade diferenciando-a das outras, apesar de apresentarem semelhanças (1 e 5 fazem diagrama, 2 e 4 fazem tabela), possuem linhas de pensamentos distintas o que cria diferentes resoluções**.
	L11 — (...) essas Estratégias estão relacionadas **a maneira de como cada aluno pensou particularmente** (...). Pensemos, neste caso eram 6 times de futsal, mas se a situação problema perguntar a quantidade de jogos para 20 times de futsal, as Estratégias poderiam ser outras, onde neste caso por exemplo, particularmente eu não usaria a Estratégia 1 e Estratégia 5, pois não me resultaria uma abreviação do processo de raciocínio matemático (...).
As estratégias se diferenciam de acordo com seus tipos	L3 — Ao observarmos novamente as estratégias entendemos que elas não são iguais pois **cada uma vai utilizar um processo**, por exemplo, visual 5, tabular 4. E esses processos utilizam diferentes conceitos matemáticos.
	L4 — Percebi que, ainda que o raciocínio para resolver o problema tenha sido parecido em cada caso, **o modo de fazer é diferente** e, portanto, as estratégias são distintas. Com isso, não podemos concluir que as estratégias são as mesmas apenas porque o resultado foi o mesmo.
	L5 — Em relação as estratégias 1, 3 e 5 perceba que **na 1 foram descritos todos os jogos e depois escrito o número de cada um, um por um, já na estratégia 3 por exemplo, foram descritas as quantidades de jogos de cada time e depois somados**, logo são estratégias diferentes. Em relação as estratégias 2 e 4 perceba que a 4 está mais explicita os times de cada jogos, já na 2 foi apenas colocados os times e um x, porém note que no fim, **a estratégia 2 conta a quantidade de x e a estratégia 4 soma de 1 em 1 a quantidade de jogos**.
	L6 — Após a explicação percebe-se que as estratégias são **diferentes principalmente no momento de execução do planejamento** (...).
	L7 — Elas são diferentes pois o jeito que cada aluno pensou para resolver é diferente. **A dois contou o número de x's, já a 4 somou todos os números da tabela.** Ambas as **1 e 5 fizeram o diagrama da árvore**, **porém a primeira conta um por um o número de jogos, já a outra somou o número de jogos de cada time, e a 3 resume a 1 e a 5 sem a necessidade do diagrama da árvore**.
	L8 — Na realidade, as estratégias elaboradas foram diferentes. **A primeira foi feita por um diagrama de setas, a segunda com uma tabela com assinalados, a terceira com uma tabela vertical de valores, a quarta com uma tabela das possibilidades de jogos e a quinta com um diagrama parecido com a primeira**. Apesar de todos serem parecidos, não se pode dizer que são iguais.
Compreensão da existência de tipos de estratégias	L1 — Entender que as estratégias não são iguais, por mais que pareçam, antes de ter esse conhecimento é abrir **um novo olhar para diferentes tipos de estratégias** que muitas não são conhecidas, ampliando a nossa base de conhecimento.
	L9 — (...) eu não havia pensado em outras estratégias, **foi interessante ver os**

	outros métodos.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

As três categorias — *As estratégias se diferenciam de acordo com suas particularidades* (L2, L10 e L11), *As estratégias se diferenciam de acordo com seus tipos* (L3, L4, L5, L6, L7 e L8) e *Compreensão da existência de tipos de estratégias* (L1 e L9) — revelam haver um entendimento dos licenciandos da diferenciação entre suas estratégias. Isso leva a inferir que possivelmente passaram a compreender os tipos de estratégias apresentadas, as quais autores, como Krulik e Rudnick (1982), Posamentier e Krulik (2009), Vale e Pimentel (2004) e Proença (2018), apontaram na literatura.

Essa compreensão pode ser ilustrada pelo estudante L10, que respondeu: "(...) *apresenta sua individualidade diferenciando-a das outras, apesar de apresentarem semelhanças (1 e 5 fazem diagrama, 2 e 4 fazem tabela), possuem linhas de pensamentos distintas o que cria diferentes resoluções*". Além disso, revela uma reflexão direcionada a apontar o pensamento envolvido. Nesse sentido, é possível que a compreensão dos tipos de estratégias também amplie a compreensão dos participantes de haver uma preferência e um processo psicológico, movidos por esquemas de pensamento e representações simbólicas próprios da pessoa, segundo Dreyfus (1991), Pozo e Ángon (1998) e Sternberg (2010).

Esses resultados mostram que os licenciandos puderam ampliar a compreensão sobre os tipos de estratégias, revelando as diferenças, o que ocorreu aos licenciandos em Matemática nos estudos de Lockwood e Gibson (2016) e Oliveira e Proença (2022) para estratégias específicas. Isso revela avançar em pesquisas já feitas, como para os trabalhos com foco apenas em mostrar as estratégias e o desempenho de futuros professores, como Lockwood (2015) e Wu e Molnár (2022), envolvendo problemas combinatórios; e Gomes e Viseu (2017), sobre um problema geométrico.

Portanto, se os futuros professores não desenvolverem compreensão consistente sobre os tipos de estratégias e suas características e diferenças, é possível, em sala de aula, o professor apenas levar estratégias diferentes a seus alunos para uso direto, e não tecer reflexões sobre diferenças e similaridades, como ocorreu no estudo de Aydın-Güç e Daltaban (2021). Diante dessa reflexão e compreensão que os participantes vivenciaram nas aulas da disciplina sobre as estratégias, o Quadro 4 mostra os resultados acerca das *reflexões sobre a importância de o professor conhecer estratégias de resolução* para abordar em sala de aula. As duas primeiras categorias relacionam ao professor e as duas últimas, com foco nos alunos.

Quadro 4: Reflexões sobre a importância da abordagem das estratégias em sala de aula

Categorias	Unidades de Registro
Favorecer o conhecimento de estratégias de resolução do professor	L3 — Acredito que a importância seja em relação ao aluno e **sobre o professor estar preparado para as possíveis respostas que podem surgir, para assim direcionar o aluno na estratégia** quando necessário.
	L8 — A visão da resolução de problemas **ajuda a desenvolver um raciocínio lógico e estratégico mais apurado [do professor]**, uma vez que ajuda na compreensão de cada etapa da resolução de uma situação matemática.
	L9 — O professor deve estar preparado para os questionamentos que os alunos farão durante a resolução do problema. **Conhecer todas as estratégias por trás de um problema ajuda o professor se preparar.**

	L10 — Devemos conhecer algumas estratégias (ao menos as possíveis mais frequentes), pois assim **é viável imaginar o que o aluno irá desenvolver e como trabalhar isso como parte do processo ensino-aprendizagem**, fazendo um planejamento que construa novos conceitos através dos conhecimentos prévios.
Apresentar aos alunos estratégias de resolução	L11 — (...) como todo professor, queremos que o aluno construa seu conhecimento, então mesmo que o aluno ainda não conheça neste caso, essas estratégias (1, 2, ..., 5, ..., n), onde sabe apenas utilizar a fórmula de combinação simples, **cabe nós como professores ter esse conhecimento de várias estratégias para essa situação problema para serem apresentadas aos alunos, para que os mesmos já comecem a terem esse contato** (...)".
Valorizar os pensamentos dos alunos	L4 — (...) se o professor reconhece as diversas estratégias, **valoriza o aluno por seu pensamento**. Além disso, não se corre o risco de o professor alegar que a resolução de um aluno está incorreta simplesmente por não conhecer aquela estratégia.
	L5 — Ao conhecer as possíveis estratégias que os alunos podem tomar **o professor consegue lidar com a situação da melhor maneira sabendo se os pensamentos dos alunos estão corretos ou não**.
	L7 — O professor precisa estar preparado para as mais diversas estratégias, pois **o professor precisa compreender qual o raciocínio lógico usado pelo aluno**, para, desta forma, saber qual o nível de compreensão do aluno em relação ao conteúdo.
Valorizar as estratégias dos alunos	L1 — Se o professor conhece diferentes caminhos de solução para uma determinada situação de matemática **ele consegue "aceitar" a solução dos alunos de diversas formas apresentadas**, e isso mostra que ele está bem-preparado de certa forma, não assumindo que só existe a resposta dele como certa!
	L2 — (...) em sala de aula os alunos podem resolver de maneiras diferentes e ter pensamentos distintos para chegar no mesmo resultado e **o professor tem que ter o discernimento para não apontar que o aluno resolveu de forma errada só pelo motivo de ter resolvido de uma maneira distinta da que ele tinha preparado**, ele deve explicar e apontar que um problema tem diversas estratégias de resolução para chegar em um mesmo resultado.
	L6 — É importante o professor conhecer as estratégias, pois nem sempre os alunos vão pelos possíveis caminhos em que o professor havia pensado, desse modo **ele consegue mediar de uma maneira mais assertiva, sem desmerecer o trabalho feito por seu aluno**.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

As duas categorias relativas ao professor — *Favorecer o conhecimento de estratégias de resolução do professor* (L3, L8, L9 e L10) e *Apresentar aos alunos estratégias de resolução* (L11) — mostram que esses licenciandos enfatizaram em maior grau a necessidade de o professor conhecer sobre as estratégias de resolução de problemas. Isso é importante para a formação do futuro professor, indo na direção do defendido por autores, como Krulik e Rudnik (1982), Vale e Pimentel (2004) e Proença (2018), de conhecer e compreender estratégias de resolução para tratar no ensino de matemática.

L9 destaca essa questão, ao responder que: "*Conhecer todas as estratégias por trás de um problema ajuda o professor se preparar*". Os estudos de Lockwood e Gibson (2016) e Oliveira e Proença (2022) proporcionaram essa preparação a futuros professores, e puderam refletir sobre as estratégias abordadas, indo para o patamar de compreender as estratégias e suas diferenças, limites e possibilidades. Além disso, as duas categorias relativas ao professor revelam a necessidade formativa nos cursos de licenciatura em Matemática e de formação continuada de professores. Isso leva a conhecer as estratégias de resolução de problemas combinatórios, conforme mostrou o estudo de Gomes e Viseu (2017), sobre dificuldades de futuros professores em resolver problemas e diversificar as estratégias de resolução. Também, conduz a compreender estratégias de resolução de problemas de outros conteúdos (Proença, 2012; Mendes & Proença, 2020).

As duas categorias relativas aos alunos — *Valorizar os pensamentos dos alunos* (L4, L5 e L7) e *Valorizar as estratégias dos alunos* (L1, L2 e L6) — mostram que os licenciandos tiveram maior preocupação sobre a aprendizagem dos alunos. Possivelmente, pelas respostas, há uma atenção ao raciocínio dos alunos no uso de estratégias, conforme Vale e Pimentel (2004), aos processos psicológicos de esquemas de pensamento para uso de estratégias, segundo Pozo e Angón (1998), e às preferências estratégicas dos alunos, de acordo com Sternberg (2010).

Essa preocupação com os alunos e suas estratégias foi revelada no estudo de Pantziara, Gagatsis e Elia (2009), envolvendo 194 estudantes de sexta série. Como nem todos tiveram os aspectos cognitivos alinhados para determinado tipo de diagrama na resolução de problemas combinatórios, concluíram a necessidade de valorizar as preferências dos alunos. E ao reconhecer o pensamento dos alunos e suas estratégias, os participantes deste estudo evidenciam que se trata de algo importante à sua formação como futuros professores, pois se constituem conhecimentos pedagógicos e matemáticos ao ato de ensinar (Shulman, 1986).

6 Conclusões

O objetivo deste artigo foi analisar e evidenciar as reflexões de futuros professores de matemática sobre as suas estratégias na resolução de um problema de combinação simples. Para isso, 11 licenciandos resolveram o problema proposto e, após as discussões na disciplina, tendo como motivação o fato de terem dito que as estratégias eram iguais, responderam a um questionário *on-line*.

As categorias de análise emergiram das respostas dos participantes e mostraram que a compreensão dos licenciandos, após resolverem o problema, indicou que, para eles, não havia de forma clara uma diferença entre as estratégias de diagrama e tabela utilizadas. Considerando as discussões e as reflexões nas aulas, as categorias de análise evidenciaram que os licenciandos passaram a compreender a diferença entre as estratégias que se valeram do diagrama e da tabela. Dessa forma, as categorias de análise sobre suas reflexões de tratar estratégias de resolução de problemas em sala de aula mostraram que os licenciandos valorizaram a importância de conhecerem as estratégias de resolução e, sobretudo, reconhecerem as estratégias dos alunos e suas formas de pensamento.

Contudo, as reflexões dos licenciandos nas aulas da disciplina puderam levá-los a compreender que as estratégias utilizadas são diferentes, e evidenciaram que, mesmo com o mesmo princípio (combinatório), apresentam representações e organizações diferentes. Com isso, essas reflexões permitem concluir que esses licenciandos compreenderam a importância de valorizar as estratégias dos alunos e seus pensamentos no uso de estratégias no ensino em sala de aula.

Apesar de este estudo ter se direcionado, naturalmente, às estratégias de diagrama e tabela, a diferenciação às outras estratégias tratadas nas aulas também ocorreu. Isso porque os participantes perceberam que a fórmula da combinação simples utilizada, a fórmula de diagonal de polígonos e a representação dos dados pelo desenho de um hexágono eram distintas entre si e das demais. Um limite deste trabalho pode ter sido não tratar de obter resultados sobre as reflexões dos estudantes sobre as três estratégias, de modo a identificarem as similaridades e as diferenças com as estratégias analisadas. Também, por não se buscou explorar se haveria mais estratégias que, de alguma forma, se valessem de outros conteúdos matemáticos ou formas de representação.

Enfim, este estudo contribui para a formação de futuros professores no campo da resolução de problemas, ao tratar dessas estratégias de resolução, pois possibilita uma compreensão das diferenças e para o uso em sala de aula. Do ponto de vista da investigação científica, esta pesquisa colabora ao avançar sobre os estudos já feitos, pois buscou e mostrou a reflexão de licenciandos sobre as suas estratégias, ao contrário da maioria dos trabalhos que se detiveram em revelar tipos de estratégias de resolução de problemas dos participantes. Portanto, pesquisas futuras podem avançar mais e investigar as diferenças, as potencialidades e os limites do uso de várias estratégias a um mesmo problema e, inclusive, tratar de problemas com contextos diferentes para ampliar a compreensão dessas estratégias por professores e por futuros professores.

Referências

Aydin-Güç, F. & Daltaban, D. (2021). An investigation of the use of specific problem-solving strategies by Mathematics teachers in lessons. *Journal of Pedagogical Research*, 5(1), 126-140.

Ball, D. L.; Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo*. Edições 70.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio*. Brasília, DF: MEC/SEB.

Carrillo-Yañez, J.; Climent, N.; Montes, M.; Contreras, L. C.; Flores-Medrano, E.; Escudero-Ávila, D.; Vasco, D.; Rojas, N.; Flores, P.; Aguilar-Gonzalez, A.; Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.

Chi, M. T. H. & Glaser, R. (1992). A capacidade para a solução de problemas. In: R. Sternberg, (Ed.), *As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações* (pp. 249-275). Porto Alegre, RS: Artmed.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In: D. Tall. (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Echeverría, M. P. P. (1998). A solução de problemas em matemática. In: J. I. Pozo. (Org.), *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* (pp. 43-65). Porto Alegre, RS: Artmed.

Fidelis, J. M.; Nogues, C. P; Lima, E. M. & Dorneles, B. V (2021). Relações entre Raciocínio Quantitativo e Resolução de Problemas Matemáticos: um estudo sobre as estratégias de um grupo de estudantes de 3º e 4º anos do Ensino Fundamental. *Bolema*, 35(71), 1658-1677.

Gerhardt, T. E. & Silveira, T. F. (Ed.). (2009). *Métodos de Pesquisa*. Editora da UFRGS.

Gomes, A. & Viseu, F. (2017). Estratégias de resolução de problemas geométricos por futuros professores dos 1.º/2.º ciclos. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, 6, 1-5.

Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1982). Teaching problem solving to preservice teachers. *Arithmetic Teacher*, 29(6), 42-45.

Lester, F. K. & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. In: P. Felmer; E. Pehkonen & J. Kilpatrick. (Ed.). *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). New York: Springer.

Lima, E. T. & Borba, R. E. S. R. (2022). Combinatória, Probabilidade e suas articulações em livros didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. *Bolema*, 36(72), 164-192.

Lockwood, E. & Gibson, B. R. (2016). Combinatorial tasks and outcome listing: Examining productive listing among undergraduate students. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 247-270.

Lockwood, E. (2015). The Strategy of Solving Smaller, Similar Problems in the Context of Combinatorial Enumeration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(3), 339-362.

Martins, L. G. & Martinho, M. H. (2021). Strategies, Difficulties, and Written Communication in Solving a Mathematical Problem. *Bolema*, 35(70), 903-936.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2. ed.). New York, WH Freeman and Company.

Mendes, L. O. R. & Proença, M. C. (2020). O ensino de Matemática via Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores. *Revista de Educação Matemática*, 17, 1-24.

Oliveira, A. B. & Proença, M. C. (2022). A estratégia da 'tabela' na resolução de problemas: possibilidades e limitações apontadas por licenciandos em Matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *13*(2), 1-22.

Pantziara, M.; Gagatsis, A. & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 39-60.

Polya, G. (1994). *A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático* (Tradução de H. L. Araújo). Rio de Janeiro, RJ: Interciência.

Posamentier, A. S. & Krulik, S. (2009). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions, grades 6-12: a resource for the mathematics teacher*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Pozo, J. I. & Angón, Y. M. (1998). A solução de problemas como conteúdo procedimental da educação básica. In: J. I. Pozo. (Org.), *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* (pp. 139-165). Porto Alegre, RS: Artmed.

Proença, M. C. (2012). *A resolução de problemas na licenciatura em Matemática*: análise de um processo de formação no contexto do estágio curricular supervisionado. 210f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência). Universidade Estadual Paulista. Bauru, SP.

Proença, M. C.; Campelo, C. S. A. & Santos, R. R. (2022). Problem Solving in BNCC: reflections for its insertion in the curriculum and in Mathematics teaching at Elementary School. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *13*(6), 1-19.

Proença, M. C. (2022). Habilidades Matemáticas na Resolução de Problemas: análise da compreensão de futuros professores. *Bolema*, 36(74), 1135-1157.

Proença, M. C. (2018). *Resolução de Problemas*: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá, PR: EdUEM.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Shulman, L. S. (1986). Those Who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Sternberg, R. J. (2010). *Psicologia cognitiva* (Tradução de M. R. B. Osório; 5. ed.). Porto Alegre, RS: Artmed.

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In: P. Palhares (Coord.). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7-52). Lisboa: Lidel.

Wu, H. & Molnár, G. (2022). Analysing Complex Problem-Solving Strategies from a Cognitive Perspective: The Role of Thinking Skills. *Journal of Intelligence*, *10*(46), 1-17.