Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Uma discussão a respeito da natureza do conceito de infinito

João Henrique Lorin
Universidade Estadual do Paraná
Maringá — PR, Brasil
joaohenrique.lorin@unespar.edu.br
0000-0002-4370-5858

Irinéa de Lourdes Batista
Universidade Estadual de Londrina
Londrina — PR, Brasil
irinea2009@gmail.com
0000-0001-8690-2344

2238-0345

10.37001/ripem.v13i2.3355

Recebido • 04/03/2023
Aprovado • 07/05/2023
Publicado • 18/05/2023

Editor • Gilberto Januario

Resumo: Este artigo é resultado de uma investigação teórica acerca da natureza do conceito de infinito na Matemática, em que se apresenta elementos da epistemologia desse conceito com objetivo de identificar e descrever mudanças de significado no decorrer da história. Desse modo, apresentamos uma síntese histórica, mais especificamente, a constituição e diferenciação dos conceitos de infinito potencial e infinito atual em três recortes históricos, o primeiro situado no pensamento grego antigo, o segundo pela conceituação dada por Bernard Bolzano em sua obra *Os Paradoxos do Infinito* (1851), e o terceiro a formalização do conceito de infinito atual na teorização apresentada por Cantor. Como resultados deste ensaio, temos a compreensão de que foi necessária a criação de novos objetos conceituais (conjuntos) para que houvesse uma mudança conceitual do infinito, e ainda, a criação de um modo de comparar conjuntos infinitos, por meio do conceito de cardinalidade.

Palavras-chave: Infinito Potencial. Infinito Atual. Conjuntos Infinitos. Cardinalidade. História do Infinito.

A discussion about the nature of the concept of infinity

Abstract: This article is the result of a theoretical investigation about the nature of the concept of infinity in Mathematics, in which we present elements of the epistemology of this concept in order to identify and describe changes in its meaning throughout history. In this way, we present a historical overview, more specifically, the constitution and differentiation of the concepts of potential infinity and actual infinity in three historical periods, the first situated in ancient Greek thought, the second through the conceptualization given by Bernard Bolzano in his work Paradoxes of Infinity (1851), and the third the formalization of the concept of actual infinity in the theory presented by Cantor. As results of this essay, we have the understanding that it was necessary to create new conceptual objects (sets) for there to be a conceptual change of infinity, and also, the creation of a way to compare infinite sets, through the concept of cardinality.

Keywords: Potential Infinity. Actual Infinity. Infinite Sets. Cardinality. History of Infinity.

Una discusión acerca de la naturaleza del concepto de infinito

Resumen: Este artículo es el resultado de una investigación teórica acerca de la naturaleza del concepto de infinito en Matemáticas, en la que se presentan elementos de la epistemología de este concepto con el fin de identificar y describir los cambios de significado a lo largo de la historia. De esta forma, presentamos una síntesis histórica, más concretamente, la constitución y diferenciación de los conceptos de infinito potencial e infinito actual en tres cortes históricos, el primero situado en el pensamiento griego antiguo, el segundo por la conceptualización dada por Bernard Bolzano en su obra Os Paradoxos do Infinity (1851), y la tercera la formalización del concepto de infinito actual en la teoría presentada por Cantor. Como resultado de este ensayo, tenemos el entendimiento de que era necesario crear nuevos objetos conceptuales (conjuntos) para que hubiera un cambio conceptual de infinito, y también, la creación de una forma de comparar conjuntos infinitos, a través del concepto de cardinalidad.

Palabras clave: Infinito Potencial. Infinito Actual. Conjuntos Infinitos. Cardinalidad. Historia del Infinito.

1 Introdução

Uma frase que pode ter permeado o imaginário de muitos adultos, desde a infância até a época em que vivemos, é: *O espaço, a fronteira final! Estas são as viagens da nave estelar Enterprise...* Esse monólogo introdutório da série de tevê americana *Star Trek* pode causar o seguinte pensamento indutivo e ingênuo: se o espaço é a fronteira final e o espaço é infinito, então a fronteira não tem final? Essa dúvida é causada, principalmente, pela relação de identificação entre o infinito e o ilimitado, isto é, se algo tem limite, logo, não é infinito. Entretanto, quando estudamos conteúdos de Matemática que se relacionam com processos infinitos, percebemos que, em alguns casos, essa identificação não está adequada.

Inicialmente, podemos conjecturar que a falta de diferenciação entre os tipos de infinitos na matemática está no cerne dessa inadequação. No consenso científico vigente, os conceitos de infinito na matemática são definidos por infinito potencial e infinito atual. No senso comum, geralmente, as representações de infinito são aquelas associadas ao conceito de infinito potencial, que relaciona a ideia de infinito à ausência de limites, àquilo que se estende sem fim, ao devir; já o conceito de infinito atual está atrelado à ideia de totalidade, de completude, de finalização do processo.

> [...] la primera está asociada a la ausencia de límites o de fronteras, a la falta de conclusión o de término de um proceso que se repite o que progresa indefinidamente. Bajo esta significación, el infinito es, literalmente, lo que no tiene fin, lo que siempre (infinito temporal) se puede continuar. A este tipo de infinito lo llamamos infinito potencial [...] En la segunda connotación, el infinito está asociado a la idea de totalidad, de completez y de unidad. Un proceso (potencialmente infinito en sus orígenes) se considera ahora acabado y los límites, alcanzados. Esta es la forma en la que el matemático piensa hoy en el conjunto de todos los números, sin que tenga la necesidad de nombrar o pensar cada uno de ellos, individualmente. Este infinito se llama infinito actual [...] (Waldegg, 1996, pp. 107-108).

Na comunidade matemática, a discussão a respeito da natureza do infinito não é nova. É possível encontrar o interesse em discussões a respeito do infinito desde as civilizações antigas, como na egípcia e na babilônica.

> Ao longo do tempo o conceito de infinito foi alvo de uma discussão ardente. Desde a Grécia clássica que se tenta definir tal conceito. Demócrito, Zenão, Aristóteles, Arquimedes, Galilei, Bolzano, Dedekind, Cantor, Weierstrass, Poincaré, Hilbert, Borel, Russel, Robinson... são apenas alguns dos matemáticos que se dedicaram a este assunto (Sampaio, 2016, p. 1).

Todavia, foi no final do século XIX e início do século XX que ficou explicitada uma das maiores crises nos fundamentos da matemática e que atingiu as bases de todas as áreas desse conhecimento. Em 1925, David Hilbert, em uma palestra intitulada *Sobre o Infinito*[1], dizia que a natureza do infinito precisava ser elucidada, já que os matemáticos e os filósofos da época buscavam um consenso acerca da natureza da verdade matemática. David Hilbert afirmava que só era possível trilharmos os caminhos da verdade matemática se fôssemos capazes de desvendar a natureza do infinito. Esse caminho, para Hilbert, passava pela concepção de infinito completado:

> Alguém que desejasse caracterizar brevemente a nova concepção do infinito que Cantor introduziu, poderia afirmar que em análise lidamos com o infinitamente grande e o infinitamente pequeno somente como conceitos-limite, como algo a acontecer ou vir a ser, isto é, como infinito potencial. Mas este não é o verdadeiro infinito. Encontramos o verdadeiro infinito somente quando consideramos a totalidade dos números 1, 2, 3, 4, ... como uma unidade completa, ou quando tomamos os pontos de um intervalo como uma totalidade que existe, de uma só vez. Este tipo de infinito é conhecido como infinito atual ou completado[2] (Hilbert, 1926, p. 167).

Neste artigo, apresentaremos uma síntese histórica a respeito do conceito de infinito na matemática, mais especificamente, a construção e diferenciação dos conceitos de infinito potencial e infinito atual em três recortes históricos. Adotamos, como síntese histórica, a definição apresentada por Gaston Bachelard em sua obra *A Epistemologia*:

> É uma síntese cultural que implica a reunião de vários séculos de cultura. Como assinala Louis de Broglie: "Muitas ideias científicas de hoje seriam diferentes se os caminhos seguidos pelo espírito humano para as atingir tivessem sido outros." Em si mesma, esta observação coloca todo o problema da objetividade científica, uma vez que situa todo o problema da objetividade na confluência de uma história humana e de um esforço de atualidade essencial a toda a investigação científica (Bachelard, G. 2006, p. 203).

Apresentar esse panorama histórico da construção dos conceitos de infinito potencial e infinito atual tem por objetivo trazer elementos fundamentais para entendermos como se constituiu esse conceito tão complexo e importante da matemática. Para isso, escolhemos três recortes históricos: num primeiro momento, vamos investigar o pensamento grego antigo e sua abordagem ao infinito como categoria filosófica; o segundo, pela conceituação dada por Bernard Bolzano em sua obra *Os Paradoxos do Infinito* (1851), que trouxe à tona a discussão acerca da possibilidade de introduzir o infinito como objeto de estudo na matemática; e o terceiro, a formalização do conceito de infinito atual na teorização apresentada por Cantor.

A escolha desses três recortes históricos, além de reunir elementos suficientes para caracterizarmos o seu conjunto como uma síntese histórica na concepção de Bachelard (2006), também é consequência de escolhas metodológicas dos autores. Por esse motivo, não foi possível contemplar outras discussões acerca do infinito durante o intervalo da antiguidade

---

[1] Conferência proferida em 4 de junho de 1925 num congresso da Sociedade Matemática da Westfalia, em Münster, em homenagem a Karl Weierstrass. Traduzido por W.A.Carnielli a partir do original alemão publicado em Mathematische Annallen (Berlim) v. 95 (1926), pp. 161-190.

[2] Tradução nossa de: Will man in Kürze die neue Auffassung des Unendlichen, der Cantor Eingang verschafft hat, charakterisieren, so könnte man wohl sagen: in der Analysis haben wir es nur mit dem Unendlichkleinen und dem Unendlichengrobem als Limesbegriff, als etwas Werdendem, Entstehendem, Erzeugtem, d. h., wie man sagt, mit dem potentiellen Unendlichen zu tun. Aber das eigentlich Unendliche selbst ist dies nicht. Dieses haben wir z. B., wenn wir die Gesamtheit der Zahlen 1, 2, 3, 4,… selbst als eine fertige Einheit betrachten oder die Punkte einer Strecke als eine Gesamtheit von Digen ansehen, die fertig vorliegt. Diese Art des Unendlichen wird als aktual unendlich bezeichnet

grega até as discussões apresentadas por Galileu no século XVII. Contudo, acreditamos que os recortes apresentam elementos suficientes para percebermos as mudanças de abordagem de tratamento do conceito de infinito que, a princípio, na filosofia grega, assume um papel de qualificar o modo de pensar e, posteriormente, após Bolzano e Cantor, como objeto de estudo na matemática, inclusive sujeito a manipulações algébricas.

Apesar do longo período de discussões a respeito do infinito potencial e infinito atual na comunidade matemática, essa diferenciação pode passar despercebida na formação inicial de futuros professores de Matemática, resultando num tratamento não apropriado ao conceito de infinito no ensino básico e no superior.

> [...] no existe en los programas escolares — desde la escuela elemental hasta el fin de los estudios secundários — ningún capítulo dedicado al tratamiento del infinito que prepare la unificación de ideas y operaciones, y la confrontación de aspectos intuitivos y formales. Continuamente se evitan situaciones que consideren como actual lo no-acabado o como terminada una operación que progresa al infinito. No existe, en suma, una preparación cognitiva para interiorizar el infinito actual (Waldegg, 1996, p. 108).

Waldegg (1996) chamou a atenção para a falta de um tratamento adequado acerca do conceito de infinito em programas escolares, correspondentes ao ensino básico. Em geral, evita-se uma abordagem que considera o infinito como um objeto acabado. Essa inadequação na educação básica a respeito do conceito de infinito pode dificultar ainda mais o seu entendimento, considerado um dos mais complexos e um dos obstáculos a ser superado no ensino de matemática.

2 O conceito de infinito como uma categoria filosófica

Discussões a respeito da natureza de conceitos tais como o de espaço, o de tempo, e da matéria contribuíram para que os filósofos gregos da Antiguidade abordassem o infinito. Entretanto, alguns autores sugerem que nas primeiras tentativas de entender o infinito, a Matemática e a Filosofia foram levadas a paradoxos. Os mais citados dessa época são os de Zenão de Eleia, discípulo de Parmênides.

> Até o século IV. C., alguns atomistas, como Leucipus e seu discípulo Demócrito, pensavam que a matéria era composta por um número infinito de indivisíveis (Lucrecio, trans., 1985) e, também, postularam um universo infinito. Parmênides e seu discípulo Zenão, que apontaram vários paradoxos sobre o infinito, discordaram. No diálogo de Parmênides, Platão (trad.169) coloca Sócrates e Aristóteles com os dois anteriores discutindo acerca do movimento e considerando que tanto a postura atomística quanto o seu oposto levariam a contradições[3] (Mena-Lorca A., Mena-Lorca J., Montoya E., Morales A. & Parraguez M., 2015, p. 334).

O paradoxo mais conhecido de Zenão, segundo Aczel (2003), é o de *Aquiles e a Tartaruga*. Nele, Zenão descreve uma corrida entre Aquiles, um corredor famoso da Grécia antiga, e uma tartaruga. Aquiles largou atrás em relação à posição da tartaruga, já que ela era muito lenta, e por isso foi dada a ela certa vantagem. Na argumentação apresentada por Zenão,

[3] Tradução nossa de: Hacia el siglo IV a. C., algunos atomistas, como Leucipo y su discípulo Demócrito, pensaban que la materia estaba compuesta de un número infinito de indivisibles (Lucrecio, trad. 1985), y postulaban además un universo infinito. Parménides y su discípulo Zenón, quien señaló varias paradojas acerca del infinito, estaban en desacuerdo. En el diálogo Parménides, Platón (trad. 1969) sitúa a Sócrates y Aristóteles con los dos anteriores discutiendo acerca del movimiento y considerando cómo la postura atomista y su contraria llevarían ambas a contradicciones.

quando Aquiles alcançasse o ponto onde a tartaruga estava quando começou a corrida, a tartaruga teria avançado certa distância. E, quando Aquiles percorresse essa segunda distância até a tartaruga, ela consequentemente teria avançado mais um pouco. Esse argumento continua *ad infinitum*. Portanto, concluiu Zenão que Aquiles nunca alcançaria tartaruga.

Na cultura grega, mais especificamente na obra de Aristóteles, o infinito aparece como categoria filosófica, mas não ainda como um "objeto matemático": apenas a ideia de infinito potencial era aceita na concepção aristotélica (Moreno & Waldegg, 1991).

Moreno e Waldegg (1991) apresentam uma análise gramatical a respeito dos papéis que a palavra *infinito* tinha na cultura grega. O primeiro como substantivo, "aparecendo somente em contos mitológicos, teológicos ou metafísicos: O 'infinito' pertence ao reino dos deuses"[4] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 202).

O segundo papel gramatical que o infinito assume na Grécia antiga, de acordo com Moreno e Waldegg (1991), é como um adjetivo que descreve um substantivo, ou seja,

> ele só é usado quando este tem as características de um absoluto, como o Universo, o Ser, o espaço ou o tempo. Aristóteles só usa essa forma para negar sua real existência (física), uma vez que o conceito abarca um infinito atual que a filosofia aristotélica realista não permite[5] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 202).

Ainda segundo Moreno e Waldegg (1991), a existência do infinito assumindo um dos dois papéis gramaticais supracitados, ou seja, como adjetivo ou como substantivo, não era possível por razões filosóficas, as quais não admitiam a existência ideal ou real de objetos infinitos.

O infinito nos papéis de adjetivo e substantivo, na concepção aristotélica, era empregado apenas quando se referia a entidades não pertencentes ao mundo terreno; não se permitia conceber ao infinito um status de objeto acabado. Também a esse respeito, Kolar e Čadež (2012) dizem que, para Aristóteles, é impossível conceber o infinito como uma totalidade concluída porque não se pode pensar em uma coleção em sua totalidade sem se refletir acerca de cada um dos seus elementos, ou seja, sem a realização física ou mental de cada etapa.

O terceiro papel gramatical do infinito foi o que Aristóteles considerou possível de ser adotado. Neste caso, o infinito assume o papel de advérbio de modo, isto é,

> é utilizado para qualificar as ações (mentais), por exemplo, para estender, subdividir, para continuar, para somar, para aproximar etc. Esse uso do infinito tem a ver com o que denominamos infinito potencial, isto é, quando o processo em questão poderia ser continuado indefinidamente[6] (Moreno & Waldegg, 1991, p. 202).

Para Aristóteles, o infinito não tinha uma "existência física", mas era uma necessidade matemática. Fosse por redução (divisão), por adição, o infinito existe apenas potencialmente

[4] Tradução nossa de: Appearing only in accounts of the mythological, theological or metaphysical types: 'Infinity' pertains to the realm of the gods.
[5] Tradução nossa de: it is only used when the latter has the characteristics of an absolute, like the Universe, the Being, space or time. Aristotle only uses this form when denying its real (physical) existence, since the concept embraces an actual infinity that realistic Aristotelian philosophy does not allow
[6] Tradução nossa de: it is used to qualify (mental) actions, as for example, to extend, to subdivide, to continue, to add, to approximate etc. This use of infinity has to do with what we call potential infinity, that is, when the process in question could be continued indefinitely.

(infinito potencial), não considerando totalidades infinitas acabadas, atualmente dadas (infinito atual).

Uma característica recorrente em discursos de filósofos da Grécia antiga, quando eles se referem ao infinito, é a do ilimitado. Jammer (2010), quando trata de conceitos de espaço na Antiguidade, apresenta o que ele denomina de "a prova lucreciana" para o caráter ilimitado de espaço. Lucrécio, ao argumentar a natureza do espaço, apresenta as propriedades de ilimitado e infinito como parte essencial para se construir tal conceito. É possível identificar, nas palavras de Lucrécio, uma relação quase que indissociável desses conceitos.

> Devemos admitir que não há nada além do conjunto de coisas. Portanto, o Universo não tem exterior e, por conseguinte, não tem fim nem limite. Não importa em qual das suas regiões a pessoa se posicione; seja qual for a posição em que alguém se coloque, ele deixa o Universo tão infinito quanto antes, em todas as direções. Por outro lado, se por ora considerarmos que o espaço seja limitado, supondo-se que um homem vá até as suas fronteiras externas, pare no limite extremo e lance um dardo, acaso devemos concluir que, quando lançado com força vigorosa, ele alcançará até o ponto para o qual foi mandado, voará para longe, ou devemos decidir que algo pode bloquear seu caminho e detê-lo? Devemos admitir e adotar uma dessas duas hipóteses, pois não há outro caminho. Isso nos obriga a admitir que o Universo se estende infinitamente[7] (Jammer, 2010, p. 36).

Outras categorias de espaço foram elaboradas na Antiguidade, e, apesar de serem divergentes, o caráter potencial do infinito sempre aparece na sustentação das ideias. Outro modo de conceber espaço diferentemente da maneira apresentada por Lucrécio sustenta que o espaço não pode ser infinito. Essa argumentação encontra-se em Górgias de Leontini[8], que, segundo Jammer (2010), foi o primeiro a demonstrar a finitude do espaço. Vejamos:

> [...] se o existente [o espaço, grifo nosso] fosse infinito, não estaria em lugar nenhum. Se estivesse em algum lugar, aquilo em que estaria seria diferente dele; portanto, o existente, sendo abarcado por alguma coisa, deixaria de ser infinito, pois o que abarca é maior que o abarcado, e nada pode ser maior que o infinito (p. 37).

É importante notar, aqui, a impossibilidade de um infinito abarcar outro infinito, nos argumentos apresentados por Górgias de Leontini, pois, para este, o infinito deve ser ilimitado, e, sendo assim, não há nada que o possa conter. Fica evidente a identificação entre infinito e ilimitado, que converge com a tradição aristotélica de infinito em potência que perdurou por séculos na matemática: "o infinito expressa, na verdade, apenas uma potencialidade pura, isto é, a possibilidade não limitada de aumentar um intervalo ou dividi-lo. Foi essa interpretação do infinito como uma potencialidade que dominou a matemática até a revolução cantoriana"[9] (Fischbein, Tirosh & Hess, 1979, p. 3).

Essa maneira de conceber o infinito, qualificando uma ação, produz, segundo Moreno e Waldegg (1991), "mais uma maneira de pensar do que um objeto matemático" (p. 213). Ainda assim, para os mesmos autores, este modo de pensar o infinito possibilitou grandes resultados na matemática grega, ainda que não possibilitasse uma conceitualização matemática do infinito.

[7] T. Lucreti Cari, *De rerum natura* (trad. Munro, Cambridge, 1886), v.3, p.23.
[8] *Sexti empirici opera*, "Adversus dogmáticos" (org. H. Mutsch-mann, Leipzig, 1912-1914), v. 2, p.17.
[9] Tradução nossa de: That infinity expresses, in fact, only a pure potentiality, i.e., the non-limited possibility to increase an interval or to divide it. It was that interpretation of infinity as a potentiality, which dominated mathematics until the Cantorian revolution.

A interpretação do infinito como uma potencialidade permitiu, por exemplo, a Arquimedes se aprofundar no desenvolvimento de técnicas de cálculo de áreas e volumes. Para Aczel (2003), Arquimedes expandiu as ideias de Eudóxio e “demonstrou como utilizar um infinito potencial para encontrar o volume de uma esfera e um cone, gerando resultados reais” (Aczel, 2003, p. 28).

Sabemos que o infinito potencial convive até hoje na matemática como um modo de operação mental. No decorrer da história, o infinito permeou debates importantes na Matemática e, também, causou dificuldades e paradoxos. Galileu Galilei, em *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências*[10], debate, por meio de seus personagens, as dificuldades do homem no entendimento do conceito de infinito que transcendem a finitude do nosso conhecimento, mas, “apesar disso, os homens não podem abster-se de discuti-los, mesmo que seja feito de forma indireta[11]” (Galilei, 1914, p. 26).

Galileu Galilei, no âmago dos debates entre seus personagens, dá origem a paradoxos acerca do infinito. Inferimos que os paradoxos apareceram justamente pelo fato da não aceitação do infinito enquanto ato. Galilei conclui que não podemos, com nossas mentes finitas, discutir o infinito: “Dificuldades surgem quando tentamos, com nossas mentes finitas, discutir o infinito, atribuindo-lhes propriedades que damos aos finitos e limitados[12]”. Para Galilei, as propriedades de “maior” ou “menor” não fazem sentido quando comparamos quantidades infinitas. E ele tinha razão, apesar de não apresentar uma alternativa para tal situação. Veremos, mais adiante, que, quando se trata de comparar quantidades infinitas, o adequado, hoje, é usar o conceito de cardinalidade[13].

A tradição filosófica de tratar o infinito pela concepção aristotélica do ser em potencial começa a ser rompida. A necessidade de admitir o infinito enquanto adjetivo para que o infinito atual pudesse ser constituído aparece na obra de Bolzano[14], matemático tcheco do século XIX. Além disso, nos trabalhos de Bolzano apareceram novos objetos (conceituais) que deram suporte para abordagem do infinito atual na matemática, isto é, fez-se necessário que novos objetos fossem concebidos e estes são os conjuntos.

3 O conceito de infinito atual como um objeto de estudo na matemática

> Ciertamente no todas, como dice Kästner, pero sin duda alguna sí la mayoría de las afirmaciones paradójicas que surgen en el ámbito de las matemáticas, tienen que ver con el concepto de infinito ya sea que lo mencionen directamente o involucrándolo de manera indirecta em su demostración[15] (Bolzano, 1991, p. 39).

O trabalho de Bolzano, em *Os Paradoxos do Infinito* (1851), traz à tona a discussão acerca da possibilidade de introduzir o infinito em matemática como objeto de estudo. Para Moreno e Waldegg (1991), o passo decisivo a ser tomado, para esse fim, foi conceber o infinito

[10] Título original: *Dialogues Concerning Two New Sciences.*
[11] Tradução nossa de: In spite of this, men cannot refrain from discussing them, even though it must be done in a roundabout way.
[12] Tradução nossa de: This is one of the difficulties which arise when we attempt, with our finite minds, to discuss the infinite, assigning to it those properties which we give to the finite and limited.
[13] A definição científica atual de cardinalidade será explicitada na seção 4.
[14] Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, nascido em Praga, República Checa, em 5 de outubro de 1781, e falecido também em Praga, em 18 de dezembro de 1848.
[15] Certamente não todas, como disse Kästner, mas sem dúvida a maioria das afirmações paradoxais, que surgiram no campo da matemática, têm a ver com o conceito de infinito, seja mencionando diretamente ou envolvendo indiretamente em sua demonstração (tradução nossa).

como um atributo de uma coleção e não como um substantivo ou um advérbio. Segundo Waldegg (2008), Bolzano entende que a maneira adequada para se referir ao conceito de infinito é por meio do conceito de conjunto.

Na visão de Bolzano, a matemática trata de conjuntos abstratos. Portanto, os critérios de validação para a existência dessas coleções infinitas tinham de ser novos, ou melhor, baseados, sobretudo, em sua natureza não contraditória. Esse foi um passo decisivo para se abandonar a validação empírica. A ideia principal a apoiar o novo nível de representação reside no fato de que a concepção de um conjunto, que resulta de um processo construtivo utilizando os elementos, é abandonada. Em vez disso, Bolzano admite que um conjunto é concebido como um todo: um conceito sintético de conjunto (Moreno & Waldegg, 1991).

Bolzano se empenhou em refutar argumentos daqueles que sustentavam a ideia de que não era possível conceber o infinito como um todo, em qualquer esfera de objetos, independentemente se fossem objetos restritos à matemática. Uma das afirmações que Bolzano refutou é a de que "um conjunto infinito no puede existir em niguna parte, por la sencilla razón de que no es posible abarcar nunca com el pensamento, como um todo unitário, um conjunto de esa índole" (Bolzano, 1991, p. 52). Bolzano levantou o contraditório, afirmando que devemos observar que esse argumento é claramente um erro, e que é igualmente equivocada a ideia de que, para pensar os objetos $a, b, c, d, \ldots$, seja necessário formar as representações mentais individuais de cada um desses objetos, dando, para isso, um exemplo:

> Puedo pensar, por ejemplo, el conjunto, el agregado o, si se quiere, el todo de los habitantes de Praga o de Beijing sin necesidad de tener una representación particular de cada uno de ellos. En realilidad, es precisamente esto lo que estoy haciendo en este momento al hablar de ese conjunto y hacer afirmaciones sobre él (Bolzano, 1991, p. 52).

Para Mena-Lorca *et al.* (2015), Bolzano entende que o infinito se comporta de maneira paradoxal, embora isso não tenha sido um empecilho para Bolzano ser o primeiro a admitir a existência do conceito em seu sentido atual. Afinal, são paradoxos, mas não são contradições. Além disso, Bolzano afirma que o infinito, apesar de poder desafiar a intuição por meio de seus paradoxos, é possível dar sustentação suficiente para abordá-los. Hitt (2013) também observa que Bolzano tem a postura de enfrentar os paradoxos e ainda, "explota la idea de Galileo, pero contrariamente a la posición de Galileo, Bolzano toma la postura de enfrentar una paradoja y no pensar que la situación es contradictoria" (Hitt, 2013, p. 105).

Vejamos agora o que Bolzano (1991) elegeu como uma das características mais notáveis dos conjuntos infinitos:

> Afirmo lo seguinte:
> Dos conjuntos pueden estar relacionados entre sí de tal manera que resulte posible
> (1) cada uno de los elementos de cualquiera de ellos se encuentre asociado con un elemento del otro, no existiendo ningún objeto en ninguno de los dos conjuntos que entre en esa relación con más de un elemento del otro; y
> (2) que uno de esos conjuntos incluya al otro como una parte propia, por lo que las multiplicidades que ambos conjuntos representan pueden encontrarse en las relaciones más variadas entre sí cuando se consideran todos los elementos de los mismos como objetos individuales intercambiables (Bolzano, 1991, pp. 64-65).

Essas características dos conjuntos infinitos superam a crença de que *o todo é maior que a parte*. A origem histórica dessa crença, apesar de aparecer no denominado paradoxo de

Galilei, está na Grécia antiga, mais especificamente no item 8 das denominadas noções comuns no Livro I dos *Elementos*, de Euclides:

> 1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
> 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
> 4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
> 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
> 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
> 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
> 8. E o todo (é) maior do que a parte.
> 9. E duas retas não contêm uma área (Euclides, 2009, p. 99).

Uma nova interpretação para a relação parte-todo de conjuntos infinitos é dada por Bolzano em seu trabalho, e relações até então consideradas paradoxais começam a ser arimetizadas, como, por exemplo, a possibilidade de relacionar biunivocamente um subconjunto infinito (parte) com um conjunto infinito (todo). Para Galilei, isso era contraditório, pois estava sob a égide do princípio estabelecido por Euclides.

Bolzano (1991) apresenta exemplos, como os conjuntos de números representados pelos intervalos $(0{,}5)$ e $(0{,}12)$, e argumenta que, claramente, esses conjuntos possuem infinitos números e, ainda, um pode ser considerado subconjunto próprio do outro (neste caso, $(0{,}5) \subset (0{,}12)$). Bolzano continua seu raciocínio afirmando que é possível estabelecer uma relação um-a-um entre os números de cada conjunto por meio da equação "5y = 12x". A seguir, a argumentação de Bolzano para esse caso:

> No es menos cierto, sin embargo, que si x es una cantidad cualquiera entre 0 y 5, y derterminamos la relación entre x e y por médio de la equación "$5y = 12x$", y es también una cantidad entre 0 y 12. Inversamente: siempre que y se encuentre entre 0 y 12, x ha de localizarse entre 0 y 5.
> De la ecuación se segue igualmente que a todo valor de x corresponde un único valor de y y vice-versa. Y es también claro que a toda cantidad x en el conjunto entre 0 y 5 corresponde una cantidad en el conjunto entre 0 y 12, de tal manera que ninguno de los objetos en alguno de estos dos conjuntos queda sin ser relacionado, y ninguno de ellos lo está con más de un solo objeto del otro conjunto. (Bolzano, 1991, p. 65).

Bolzano sedimenta o caminho para o estabelecimento do infinito atual na Matemática, cria um novo objeto matemático (os conjuntos), estabelece relações biunívocas[16] entre conjuntos infinitos e seus subconjuntos próprios[17] e desenvolve várias propriedades que Piaget denominou de intraobjeto, dando sustentação para o surgimento posterior das relações interobjetos, estabelecidas por Georg Cantor (Moreno & Waldegg, 1991).

> Bolzano postula los princípios sobre los que debe edificarse el concepto de infinito:
> a) El infinito es atributo de conjuntos. Bolzano descarta la idea de que los conjuntos infinitos son indeterminables. Su determinabilidad descansa en dos ideas que jugarán más tarde un papel crucial en la axiomatización de la teoría de conjuntos: la extensión y la comprensión.

[16] Relações um a um. Por exemplo, uma função bijetora, que é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, estabelece uma relação biunívoca entre suas variáveis.

[17] Dizemos, por exemplo, que *A* é subconjunto próprio de *B* se cada elemento de *A* está em *B*, mas existe pelo menos um elemento de *B* que não está em *A*. A diferença entre ser subconjunto próprio e ser subconjunto é que na segunda alternativa os conjuntos podem ser iguais.

> b) El infinito admite distintos grados, los conjuntos infinitos no tienen, como muchas veces se había argumentado, todos el mismo tamaño. (Waldegg, 1996, p. 109-110).

Apesar de postular princípios, demonstrar a existência de diferentes infinitos e definir operações entre conjuntos infinitos, baseando-se no critério intraobjeto, isto é, comparando conjuntos com subconjuntos próprios, Bolzano não conseguiu, de modo mais geral, o que denominamos hoje de arimetização do infinito.

Com o trabalho de Bolzano, uma semente para uma tematização do infinito atual apareceu, embora, de fato, naquele momento, o conceito em si ainda não estivesse totalmente “tematizado”. Isso porque, segundo Moreno e Waldegg (1991), o (a epistêmica) assunto tratado por Bolzano com certo *know-how* em situações restritas (intraobjeto) não envolveram aspectos estruturais do problema. As justificativas para que as relações entre conjuntos definidos por Bolzano sejam consideradas relações de tipo intraobjeto podem ser encontradas em Moreno e Waldegg (1991). Sendo assim, pode-se, a partir da estruturação proposta por Bolzano, conceber conjuntos infinitos como um objeto na matemática e estabelecer relações e propriedades com esses conjuntos.

4 O infinito, uma mudança conceitual na história da matemática

Para Jahnke (2001), o primeiro conceito determinante no estudo dos conjuntos infinitos foi o de cardinalidade, pois esse conceito criou critérios objetivos de comparação entre conjuntos infinitos, isso permitiu na matemática, por exemplo, afirmar que existem conjuntos infinitos “maiores” que outros conjuntos infinitos. Antes de apresentarmos, contudo, o conceito de cardinalidade de um conjunto infinito, percebamos como são definidos conjuntos infinitos[18].

Um conjunto infinito[19], geralmente, é definido como a negação de um conjunto finito, ou seja, um conjunto X é infinito se não é vazio ou, se para qualquer $n \in \mathbb{N}$, não existe a bijeção $\varphi: I_n \to X$. Isto é equivalente a afirmar que um conjunto infinito X se domina infinito quando não é finito. Apesar de esta afirmação não estar errada, acreditamos que ela não explica a complexidade do conceito de conjunto infinito.

A forma de definirmos um conceito matemático como a negação de outro conceito não é exclusiva da definição de conjunto infinito. É comum encontrarmos, nos livros didáticos de matemática, a definição dos números irracionais como aqueles que não podem ser escritos como uma fração de dois números inteiros, isto é, definem-se os irracionais como aqueles que não são racionais no domínio dos números reais.

Para Vergnaud (1993, p. 1), um “conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se nos interessamos por sua aprendizagem e seu ensino”. Sabemos da importância das definições na estrutura formal do conhecimento matemático, e, ainda, segundo Rezende (2013), a afirmação de Vergnaud “não significa que o pesquisador minimize a importância de se definir os conceitos no decorrer de sua aprendizagem, mas, sim, que apenas a definição de um conceito não é suficiente para compreendê-lo na essência” (p. 59).

A maneira tradicional em que se definem os conjuntos infinitos pela negação dos conjuntos finitos aparece como uma das preocupações de Bolzano, como bem escreveu Waldegg (2008):

---

[18] As conceituações apresentadas nesta seção podem ser encontradas na maioria dos livros do curso de análise.

[19] Dois exemplos de conjuntos infinitos são: o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ e o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

> [...] se define el concepto "conjunto infinito" (cuyos elementos son todos de la misma especie) a partir de "conjunto finito", pero no a la manera tradicional de definir lo infinito como la negación de lo finito. La posición de Bolzano es que para hablar del infinito hay que hacerlo a través de conjuntos infinitos. (Walldegg, 2008, p. 120).

Todavia, essa tradição ainda perdura nos manuais didáticos de Análise Matemática, conforme foi mostrado anteriormente. Observemos, a seguir, um resultado que geralmente se apresenta em forma de teorema e que poderia definir um conjunto infinito, sem que haja a necessidade do argumento da negação de um conjunto finito. Com efeito, *um conjunto A é infinito se existir bijeção entre A e um subconjunto próprio de A*. Este teorema, no entanto, segundo Sampaio (2009), é apresentado em forma de definição desde a época de Dedekind[20], que afirmou: "Um sistema S é chamado infinito se se assemelha a uma parte própria de si mesmo; no caso oposto, S é chamado de sistema finito[21]" (Dedekind, 1932, p. 356).

Na forma em que definimos os conjuntos finitos, fica explícito seu número de elementos. E quando, porém, se trata de conjuntos infinitos? Será que não podemos falar nada a respeito da "quantidade" de elementos ou "tamanho" dos conjuntos infinitos como pensou Galilei? Vejamos, pois, agora duas definições criadas na matemática que permite hoje compararmos "tamanhos" de conjuntos infinitos, a primeira de conjuntos enumeráveis e a segunda de cardinalidade.

Um conjunto X é enumerável, quando for finito ou quando existir uma bijeção: $f: \mathbb{N} \to X$, ou seja, uma bijeção do conjunto dos números naturais com X. No segundo caso, dizemos que X é infinito enumerável. Denominamos cada bijeção acima definida como uma enumeração dos elementos de X.

Consideremos agora dois conjuntos X e Y. Dizemos que X e Y têm o mesmo número cardinal ou a mesma cardinalidade se existir uma bijeção $f: X \to Y$.

Temos, assim, parâmetros para comparar a "quantidade" de elementos tanto de conjuntos finitos quanto de conjuntos infinitos. Pois bem, dado dois conjuntos finitos, diremos que eles possuem o mesmo número cardinal se possuírem o mesmo número de elementos. Dessa forma, caso queiramos comparar dois conjuntos infinitos X e Y, podemos lançar mão do conceito de cardinalidade.

Notemos: se X for um conjunto infinito enumerável, temos que $card(X) = card(Y)$, se, e somente se, Y for um conjunto infinito enumerável.

Sabemos que um conjunto A é enumerável se possuir bijeção com os conjuntos dos números naturais. Assim, podemos dizer que a cardinalidade de A é a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$. Mas será que todo conjunto infinito é enumerável? Essa pergunta está no cerne da classificação que Cantor propõe para conjuntos infinitos, no entanto, a resposta encontrada na história da matemática é negativa.

Cantor, em sua estruturação da teoria dos conjuntos, enuncia uma série de teoremas que darão sustentação para demonstrar, por exemplo, que os conjuntos $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais são enumeráveis. Dentre esses teoremas, podemos citar o que afirma o seguinte: Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ conjuntos enumeráveis. A reunião $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável. Em outras palavras, uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis

[20] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916) foi um matemático alemão.

[21] Tradução nossa de: Ein System S heißt unendlich, wenn es einem echten Teile seir selbst ähnlich ist; im entgegengesetzten Falle heißt S ein endliches System.

é um conjunto enumerável.

Com o intuito de estabelecer o "tamanho" dos conjuntos infinitos, Cantor demonstrou que $\mathbb{Z}$ é enumerável, ou seja, possui a mesma cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Em 1873, segundo Stewart (2014), Cantor demonstrou que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais também é enumerável, fato que foge às primeiras intuições, "afinal, existem infinitamente mais números racionais no intervalo entre dois inteiros consecutivos" (p. 321).

Voltando à pergunta supracitada, a de que se todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade: é de supormos que tal hipótese começasse a ficar mais evidente, uma vez que Cantor já havia demonstrado que outros conjuntos infinitos possuíam a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Nesse sentido, Cantor pensou o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como uma união infinita enumerável de conjuntos, bastava então provar que cada um desses conjuntos era enumerável, e, consequentemente, por resultados anteriores já demonstrados, concluiria que R era enumerável.

Em sua estruturação, se Cantor demonstrasse que o intervalo (0,1) era enumerável, bastaria[22], sem perda de generalidade, para provar que $\mathbb{R}$ era enumerável. No entanto, no desenvolvimento da demonstração, Cantor chega a um absurdo, isto é, contrariando a hipótese de (0,1) ser enumerável, e, como (0,1) está contido no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, esse também não o é.

Portanto, a tentativa de demonstrar a hipótese inicial de que $\mathbb{R}$ era enumerável tornou-se posteriormente um dos principais resultados da teoria dos conjuntos: em outras palavras, Cantor provou[23] que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável. Como consequência, concluiu que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais possuía natureza distinta às daqueles que se colocavam em relação biunívoca com os conjuntos dos naturais.

> O conjunto dos racionais era denso mas não contínuo, e isso criava a suspeita de que existiam, de fato, dois tipos distintos de conjuntos infinitos: um primeiro tipo capaz de reunir todos aqueles conjuntos que poderiam ser colocados em uma relação um-a-um com o conjunto dos números naturais, e entre si; e um segundo tipo, cuja característica era, justamente, a de não aceitar uma correspondência, um-a-um, com aqueles conjuntos do primeiro tipo. Em poucas palavras, tudo indicava que havia infinitos de tamanhos distintos, isto é, infinitos que apresentam quantidades distintas de elementos (Santos, 2008, p. 113).

Cantor criou uma classificação para os conjuntos infinitos — *os transfinitos* — e, digamos assim, a primeira "classe" de infinitos nesta estruturação são aqueles conjuntos que possuem bijeção com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Ou seja, os conjuntos infinitos enumeráveis. A notação utilizada para essa classificação foi a letra hebraica $\aleph$ (Aleph), e, para denotar os conjuntos infinitos enumeráveis, foi utilizado o símbolo $\aleph_0$. Em outras palavras, os alephs denotam o número cardinal (o número de elementos) dos conjuntos infinitos. Segundo Aczel (2003), Cantor queria ordenar os cardinais transfinitos, ou seja, queria nominá-los consecutivamente: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4$, ... assim por diante.

[22] Provar a enumerabilidade do intervalo (0,1) era suficiente, pois é possível estabelecer uma função bijetora que leva o intervalo (0,1) ao outro intervalo da construção proposta por Cantor, e, assim, como já sabido, se há bijeção entre dois conjuntos e se um é enumerável, o outro também o será.

[23] "E é no início de 1874 que Cantor publica um artigo no *Mathematische Annalen*, com o título *Über eine Eigenschaft des Inbegrieffes aller reellen algebraischen Zahlen*, no qual apresenta a prova da não-enumerabilidade dos números reais" (Santos, 2008, p. 114).

Considerando que a cardinalidade do conjunto dos números reais é maior que a cardinalidade do conjunto dos números naturais, Cantor também demonstrou que o conjunto das partes[24] de um conjunto infinito possui cardinalidade superior que o próprio conjunto, por exemplo, $card(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, e, ainda, demonstrou que $\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{card}(\mathbb{R})$.

> Cantor sabia que o conjunto de todos os números reais, o continuum da linha real, compreendia todos os possíveis subconjuntos do conjunto de todos os números inteiros. Todo inteiro pode estar incluído ou não em qualquer posição infinita de um número decimal. Por conseguinte, o número de elementos do continuum tinha de ser 2 elevado à potência do número infinito de inteiros. Consequentemente, o número cardinal do continuum era $c = 2^{\aleph_0}$ (Aczel, 2003, p. 132).

O cardinal dos números reais, como Aczel (2003) apresenta, é designado por $\text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$. Desse modo, o problema do contínuo de Cantor pode ser assim formulado: Existe algum outro número cardinal entre o número cardinal do conjunto $\mathbb{N}$ (designado $\aleph_0$) e o número cardinal do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais (designado $c = 2^{\aleph_0}$)? Para Cantor, a resposta a essa pergunta era negativa.

Com a afirmação de que não existem conjuntos com cardinalidade intermediária em relação ao conjunto dos números naturais e o conjunto dos números reais, Cantor gerou uma das mais conhecidas conjecturas da comunidade matemática, denominada de *Hipótese do Contínuo*, ou seja, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = card(\mathbb{R})$.

> Em especial, Cantor fez a si mesmo a pergunta: "Existe outro número cardinal, outro alef, entre o alef-zero e o cardinal do *continuum*?". Se a resposta fosse "não", Cantor poderia chamar a ordem de infinito do *continuum*, c, simplesmente de $\aleph_1$. Sem a resposta, não era possível ordenar os cardinais transfinitos, pois não havia como determinar qual cardinal sucede ao $\aleph_0$. Cantor não podia designar $\aleph_1$ nem nenhum alef maior que $\aleph_0$ (Aczel, 2003, p. 134).

A Hipótese do Contínuo (HC) — ou conjectura do contínuo, como alguns matemáticos preferem — ficou inacessível aos matemáticos por muitos anos e, digamos, ainda hoje é pouco discutida no meio acadêmico. Hilbert colocou a HC como o primeiro de uma lista com mais de 23 problemas propostos no Congresso Internacional de Matemáticos em 1900. Segundo Madore (2001), o logicista Kurt Gödel, em 1940, demonstrou que a HC era infalsificável, ou seja, impossível de demonstrar que era falsa. Já em 1963, o logicista Paul Cohen demonstrou que a HC era indemonstrável, isto é, impossível de mostrar que a HC era verdadeira.

Sendo assim, a validade da HC dependerá da escolha de axiomas que serão base para o desenvolvimento para a teoria dos conjuntos. Segundo Stewart (2014), dependendo dos axiomas escolhidos, desenvolve-se uma teoria consistente e coerente em que a HC será válida, e, escolhendo-se outros axiomas igualmente coerentes, constrói-se outra teoria em que a HC não será válida. Ainda segundo Stewart (2014), embora a validade da HC dependa da escolha dos axiomas escolhidos, uma igualdade permanece inalterada: $c = 2^{\aleph_0}$, como consequência dessa igualdade, temos como uma das implicações da teorização de Cantor, a existência de conjuntos infinitos maiores que outros e, além disso, não há um cardinal infinito maior que todos os outros, isto é, $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots$.

[24] Dado um conjunto finito $A = \{0, 1, 2,\}$ o conjunto das partes denotado por $P(A)$ é constituído por todos os subconjuntos possíveis de A, isto é, $P(A) = \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$. Note que o número de elementos do conjunto A é 3 (três) e o número de elementos de $P(A)$ é 8 (oito).

Georg Cantor, diferentemente de Bolzano, elabora o seu critério de comparação acerca da existência de uma relação bijetora entre os conjuntos a serem comparados. A introdução de um instrumento de comparação externa pode ser alcançada graças à ideia de trabalhar os conjuntos como separados em relações, o que levou à detecção de propriedades reflexiva, transitiva e simétrica, associadas à relação.

A mudança conceitual se consolida com Cantor, pois a teoria do infinito deste representa um ponto de importância crucial na história da construção do infinito atual em matemática. Foi então que o infinito alcançou uma posição permanente como um objeto de estudo com seu próprio funcionamento. Para tal fim, esse teórico definiu, pela primeira vez na história, uma operação realizada em conjuntos: dado um conjunto de pontos, seu conjunto de derivados (o conjunto de pontos de acumulação) pode ser construído. Essa operação significa que eram possíveis a geração e diferenciação de conjuntos infinitos, de acordo com as formas pelas quais os seus elementos eram "organizados" (Moreno & Waldegg, 1991).

Santos (2008), em sua tese[25], considerou que Georg Cantor, com a teoria dos conjuntos, revolucionou a matemática e, ainda, considerou o modo de conceber o infinito, depois da teoria de Cantor, como uma mudança revolucionária no sentido da teoria de Kuhn[26]. Fischbein *et al.* (1979) também afirmam a existência de uma mudança conceitual do conceito de infinito diante da tradição aristotélica que interpretava o infinito apenas como uma potencialidade.

> O primeiro aspecto dessa revolução era para provar o significado matemático do conceito de infinito real. Esse fato exigiu, em primeiro lugar, a elaboração de novos esquemas lógicos que estavam parcialmente em contradição com os nossos esquemas mentais habituais. Por exemplo, em admitir o infinito como realmente existente, temos de admitir a estranha proposição de que o todo pode ser equivalente a algumas de suas partes[27] (Fischbein *et al.*, 1979 p.4).

Com a estruturação proposta por Cantor, segundo Santos (2008), há invalidação de princípios que sustentam o paradigma finitista aristotélico, como a de que o todo será sempre maior que uma de suas partes ou que na matemática se trabalha apenas com quantidades finitas.

> Porém, a perda de generalidade desse princípio (o todo é sempre maior que a parte), assumido tão naturalmente por Galileo, só foi possível porque, em um contexto mais amplo, outro grande princípio foi deixado de lado. O princípio de que a matemática é uma ciência que trabalha apenas com magnitudes atualmente finitas, ou com magnitudes apenas potencialmente infinitas. Esse último princípio aparece nas conclusões de Aristóteles em sua Física, que podem ser condensadas na afirmação de que todo número, assim como todo conjunto, é finito. (Santos, 2008, pp. 205-206).

O trabalho de Cantor, segundo Hitt (2013), proporcionou à matemática uma estrutura que integra tanto o conceito de infinito potencial quanto o infinito atual. Porém, isso não foi de imediato aceito pela comunidade acadêmica. Pelo contrário, Cantor teve dificuldades de compreensão pelos seus pares e, especialmente, para publicar seus trabalhos.

---

[25] O Infinito de George Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática.
[26] Em seu livro *A Estrutura das Revoluções Científicas.*
[27] Tradução nossa de: The first aspect of that revolution was to prove the mathematical meaningfulness of the concept of actual infinity. This fact required first of all the elaboration of new logical schemes which were partially in contradiction with our usual mental schemes. For instance, in admitting infinity as actually existing we have to admit the strange proposition that the whole may be equivalent to some of its parts.

> Uno de sus opositores Kronecker, mencionaba que Dios nos proporcionó los números naturales, y con eso nos bastaba. Cantor tuvo serios problemas para publicar sus trabajos y los opositores le hicieron la vida muy complicada… Cantor se refugió en la teología y llegó incluso a afirmar que Dios escribía utilizando como medio sus manos […]. (Hitt, 2013, p. 106).

Com o passar do tempo, a comunidade matemática foi aceitando a teoria de Cantor para conjuntos, admitindo que essa estruturação proposta para o tratamento de conjuntos infinitos proporcionou vasto campo de desenvolvimento para a matemática e, como disse Hilbert (1926), um paraíso que Cantor criou para nós, e de onde ninguém poderá nos expulsar!

5 Inferências finais

Buscamos neste artigo apresentar uma síntese histórica do tratamento do conceito de infinito com o intuito de colaborar com o entendimento epistemológico deste conceito. Vimos que, na matemática, existe uma diferenciação entre os conceitos de infinito atual e infinito potencial, e esta diferenciação já aparecia na Grécia antiga, porém, apenas como categorias filosóficas.

A concepção de infinito enquanto totalidade não era admitida, já que para Aristóteles, não se pode pensar em uma coleção na sua totalidade, e ainda, o infinito não tinha uma "existência física", mas era uma necessidade matemática, um modo de pensar e organizar o pensamento, não como um objeto. Entretanto, o modo de assumir o infinito — apenas como em potência — não impediu resoluções significativas na matemática, como, por exemplo, o aprofundamento do método da exaustão de Eudoxo por Arquimedes[28].

Durante vários séculos, pelo menos desde a Antiguidade grega até meados do século XIX na Europa, a influência aristotélica em abordar o infinito como potência imperou, e consequentemente, possibilitou o surgimento de paradoxos. O paradoxo de Aquiles e a Tartaruga exemplifica a impossibilidade de resolver uma situação em que hoje podemos resolver somando infinitas parcelas[29]. Inferimos que esse caso é um exemplo e consequência da não adoção do conceito de infinito atual para resolver um problema matemático, e foi justamente da não aceitação da completude de uma sequência infinita, à época de Zenão, que tal situação se constituiu como um paradoxo.

Já no século XVII, Galileu apresenta em sua obra *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências* um paradoxo que, de forma geral, tenta estabelecer uma relação entre dois conjuntos infinitos[30], sendo um parte do outro. Nesse caso, inferimos que o maior obstáculo enfrentado e exposto em forma de paradoxo está no enfrentamento de uma noção comum que perdurou desde a Grécia antiga, e publicada na obra *Elementos* de Euclides, isto é, a noção de que o todo é sempre maior que uma de suas partes.

Para Galileu, a tentativa de estabelecer equivalência entre os números naturais e os números quadrados perfeitos, por um lado parecia plausível, pois para todo número quadrado perfeito existe um número natural correspondente, se calcularmos a sua raiz e vice-versa. Ainda assim, essa identificação era paradoxal, pois contrariava a noção de que a parte deve sempre

[28] Por consequência de escolhas metodológicas do artigo, não foi possível contemplar outras discussões acerca do infinito durante o intervalo da Antiguidade grega até as discussões apresentadas por Galileu no século XVII.
[29] Admitindo um anacronismo, é possível resolver o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga desde que interpretemos a soma das distâncias entre os personagens como soma de uma PG infinita.
[30] Nesta obra aparece uma discussão acerca da comparação entre a quantidade de números naturais e de números quadrados perfeitos.

ser menor que o todo.

A negação dessa noção comum começa a tomar corpo a partir da estruturação proposta por Bolzano, que concebeu conjuntos infinitos como um objeto na matemática e estabeleceu relações e propriedades com esses conjuntos. Destacamos que Bolzano adotou como definição de conjuntos infinitos justamente o que causou um paradoxo na obra de Galileu, isto é, Bolzano define conjunto infinito como aquele que admite uma bijeção com algum subconjunto próprio.

Tomando como base os trabalhos de Bolzano, Cantor deu continuidade na tarefa de matematizar do infinito, e possibilitou à matemática uma estrutura que integra tanto o conceito de infinito potencial quanto o infinito atual. Introduziu o conceito de cardinalidade para que pudéssemos comparar os "tamanhos" dos conjuntos infinitos e ordená-los, criando, assim, os cardinais transfinitos. Por fim, acreditamos que o processo de aceitação do infinito atual como objeto na matemática, iniciado por Bolzano, assim como a estruturação proposta por Cantor, estabeleceu uma mudança conceitual do infinito na história da matemática.

Considerações finais

Acreditamos que esse ensaio ofereceu elementos importantes para a compreensão do conceito de infinito, por meio de uma síntese que apresentou abordagens na história acerca do conceito de infinito. É importante dizer que é possível produzir outras sínteses históricas que darão suporte para uma discussão epistemológica do conceito de infinito, entretanto, por motivos já explicitados no decorrer do texto, este ensaio estabeleceu três recortes históricos, a saber, o primeiro situado no pensamento grego antigo, o segundo pela conceituação dada por Bernard Bolzano em sua obra Os Paradoxos do Infinito (1851), e o terceiro a formalização do conceito de infinito atual na teorização apresentada por Cantor.

Como resultado deste ensaio, temos a compreensão de que foi necessária a criação de novos objetos conceituais (conjuntos) para que houvesse uma mudança conceitual do infinito, e ainda, a criação de um modo de comparar conjuntos infinitos, por meio do conceito de cardinalidade. Por fim, acreditamos que investigações como esta podem contribuir para a fecundidade de pesquisas no campo da Educação Matemática, uma vez que existem publicações que indicam, tanto no processo de ensino, quanto no processo de aprendizagem, dificuldades perante conteúdos que abordam, implícita ou explicitamente, os conceitos de infinito potencial e infinito atual.

Referências

Aczel, A. D. (2003). *O Mistério de Alef: a Matemática, a Cabala e a procura do infinito*. Tradução de R. Golveia. São Paulo, SP: Ed. Globo.

Bachelard, G. (2006). *A Epistemologia*. Tradução de F. L. Godino. Lisboa, PT: Edições 70.

Bolzano, B. (1991 [1851]). *Las paradojas del infinito*. Tradução de L. F. Segura, MX: UNAM.

Dedekind, R. (1932). *Gesammelte mathematische Werke*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, pp. 335-391. Disponível em https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN23569441X; acessado em 15/10/2022.

Euclides. (2009). *Os Elementos*. Tradução e introdução de I. Bicudo. São Paulo: EdUnesp.

Fischbein, E.; Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3-40.

Galilei, G. (1914 [1638]). *Dialogues Concerning Two New Sciences.* Translation of H. Crew & A. Salvio. New York, NY: Dover.

Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annallen*, 95, 161-190.

Hitt, F. (2013). El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real. *El Cálculo y su Enseñanza*, *4*, 79-98.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's cardinal and ordinal infinities: An epistemological and didactic view. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 175-197.

Jammer, M. (2010). *Conceitos de espaço: a história das teorias de espaço na física*. Tradução de V. Ribeiro. Rio de Janeiro, RJ: Contraponto.

Kolar, V. M. & Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389-412.

Mena-Lorca A.; Mena-Lorca J.; Montoya E.; Morales A. & Parraguez M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(3), 329-358.

Moreno, L. E. & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 211-231.

Rezende, V. (2013). *Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino*. Tese (Doutorado em Educação Para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá. Maringá, PR.

Sampaio, P. A. S. R. (2009). *Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário*. Bolema, *22*(32), 123-146.

Sampaio, P. A. S. R. (2006). *Concepções de infinito dos alunos do ensino secundário: contributo da webquest Escher e a procura do infinito*. Tese (Mestrado em Educação). Universidade do Minho. Braga, PT.

Santos, E. E. (2008). *O Infinito de George Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da Matemática*. Tese (Doutorado em Filosofia). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP.

Stewart, I. (2014). *Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos.* Tradução de G. Schlesinger. Rio de Janeiro, RJ: Zahar.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In: *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro* (pp. 1-26). Rio de Janeiro, RJ.

Waldegg, G. (2008). El acercamiento de Bolzano a Las paradojas del infinito: implicaciones para la enseñanza. *In*: I. Fuenlabrada (compiladora). *Homenaje A una trayectoria: Guillermina Waldegg* (pp. 109-134). Ciudad de México, MX.

Waldegg, G. (1996) Identificação de obstáculos didáticos em el estúdio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigação Educativa*, *1*(1), 107-122.