

## Materiais manipuláveis como artefatos de mediação na resolução de problemas

### André Augusto Deodato

Universidade Federal de Ouro Preto

Ouro Preto, MG — Brasil

✉ [andre.deodato@ufop.edu.br](mailto:andre.deodato@ufop.edu.br)

id 0000-0003-4323-4010

### Juliana Batista Faria

Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, MG — Brasil

✉ [julianabatistafaria@gmail.com](mailto:julianabatistafaria@gmail.com)

id 0000-0003-1315-0094

### Roselene Alves Amâncio


Universidade Federal de Minas Gerais


Belo Horizonte, MG — Brasil

✉ [roseleneamancio@ufmg.br](mailto:roseleneamancio@ufmg.br)

id 0000-0001-9118-528X



2238-0345 

10.37001/ripem.v13i1.3211 

Recebido • 13/09/2022

Aprovado • 18/10/2022

Publicado • 18/01/2023

Editor • Gilberto Januario 

**Resumo:** Documentos curriculares incentivam o uso de materiais manipuláveis com a expectativa de que contribuam para melhorar o ensino de Matemática na educação básica. Neste artigo, pretendemos analisar algumas produções de doze estudantes do 6º ano do ensino fundamental que utilizaram, no segundo semestre de 2018, materiais manipuláveis na resolução de dois problemas. Baseando-nos em uma perspectiva Histórico-Cultural, buscamos compreender o potencial dos materiais manipuláveis ao focalizar as apropriações que os aprendizes fizeram desses objetos. Ancorados nos pressupostos das pesquisas qualitativas, analisamos estratégias de resolução dos estudantes com base em relatórios de aulas produzidos por licenciandos participantes do projeto de pesquisa. Como resultados, destacamos que a apropriação do material manipulável levou os estudantes a utilizarem-no como artefato de mediação bem como a desenvolverem novos entendimentos sobre o papel do desenho. Assim, inferimos que o uso de tais materiais, para além de motivar, justifica-se quando eles medeiam a resolução de problemas.

**Palavras-chave:** Artefatos. Materiais Manipuláveis. Resolução de Problemas. Ensino Fundamental. Educação Matemática.

## Manipulative materials as mediation artifacts in problem solving

**Abstract:** Curricular documents encourage the use of manipulative materials, revealing an expectation that they will contribute to the improvement of the teaching of Mathematics in basic education. In this article, we intend to analyze some productions of twelve by 6th grade students who used in the second semester of 2018 manipulative materials to solve two problems. Based on a Historical-Cultural perspective of learning, we seek to understand the potential of manipulative materials beyond planning, focusing on how learners appropriate these objects. Grounded in the assumptions of qualitative research, we analyzed students' resolution strategies based on the reports of classes produced by undergraduate Mathematics students who were collaborators in the research. As the main results, we highlight that the appropriation of the manipulative material by the students led the resolution process and to the understanding of the possibility of replacing the manipulative material with a design. Thus, we infer that the use of such materials in addition to motivating is justified when they mediate problem solving.

**Keywords:** Artifacts. Manipulative Materials. Problem Solving. Elementary School. Mathematics Education.

## **Materiales manipulativos como artefactos de mediación en la resolución de problemas**

**Resumen:** Los documentos curriculares fomentan el uso de materiales manipulativos con la expectativa de que contribuyan a mejorar la enseñanza de las Matemáticas en la educación básica. En este artículo pretendemos analizar algunas producciones de doce alumnos del 6° grado de la educación primaria que utilizaron, en el segundo semestre de 2018, materiales manipulativos para resolver dos problemas. Desde una perspectiva Histórico-Cultural, buscamos comprender el potencial de los materiales manipulativos centrándonos en las apropiaciones que los aprendices hicieron de estos objetos. Anclados en los supuestos de la investigación cualitativa, analizamos las estrategias de resolución de los estudiantes con base en los informes de clase producidos por los estudiantes universitarios que participan en el proyecto de investigación. Como resultado, destacamos que la apropiación de material manipulativo llevó a los estudiantes a utilizarlo como un artefacto de mediación y a desarrollar nuevas comprensiones sobre la función del dibujo. Así, inferimos que el uso de dichos materiales, además de motivar, se justifica cuando median la resolución de problemas.

**Palabras clave:** Artefactos. Materiales Manipulativos. Resolución de Problemas. Educación Primaria. Educación Matemática.

### **1 Introdução**

Os documentos oficiais que orientam os currículos nas escolas brasileiras (Brasil, 1998, 2017) incentivam o uso de diferentes recursos didáticos e evidenciam uma expectativa de que eles contribuam para melhorar o ensino de Matemática na educação básica. Essa é uma expectativa que não raro se expressa na fala de muitos professores interessados em tornar suas aulas ‘mais atraentes’ para os estudantes, quando esses enfrentam dificuldades em ter bons resultados nos testes escolares. Trabalhos do campo da Educação Matemática que problematizaram o uso irrefletido desses recursos no final do século XX (Fiorentini & Miorim, 1990) já evidenciavam que muitos desses professores nem sempre têm nítidas as razões pelas quais esses materiais seriam importantes para o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Neste artigo, buscando contribuir para a discussão dessa questão, pretendemos descrever e analisar algumas produções de doze estudantes do 6° ano do ensino fundamental que utilizaram um tipo de recurso didático — os materiais manipuláveis — na resolução de problemas. Esses alunos estudavam no Centro Pedagógico — escola de ensino fundamental em tempo integral — da Universidade Federal de Minas Gerais e participaram, ao longo do segundo semestre letivo de 2018, de um *Grupo de Trabalho Diferenciado* (GTD) intitulado “GTD *Desafios Matemáticos*”. Esse GTD é uma das ações do projeto denominado “Descobridores da Matemática”, que envolve atividades de pesquisa, ensino e extensão, com os seguintes objetivos: promover a aprendizagem da Matemática por meio da resolução de problemas; analisar estratégias utilizadas por crianças do 3° ao 6° ano do ensino fundamental para resolver problemas; desenvolver um banco de problemas (selecionados, adaptados e inéditos) que possam ser utilizados para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática; oportunizar o desenvolvimento profissional de docentes da educação básica e estudantes de licenciatura em Matemática. O projeto se realiza em diferentes escolas da região metropolitana de Belo Horizonte, mas, no contexto do Centro Pedagógico, ele se articula à

matriz curricular dessa escola como um tempo-espaco de aprendizagem da docência e de iniciação científica (por parte de licenciandos da UFMG que, nele, atuam), bem como de aprofundamento e diversificação das aprendizagens dos estudantes do ensino fundamental que estudam em uma escola de tempo integral. No âmbito da pesquisa que origina este artigo, são os relatórios de aulas produzidos pelos licenciandos que fornecem o material empírico utilizado em nossa análise.

No segundo semestre de 2018, período da coleta de dados, participavam do projeto dez estudantes da licenciatura em Matemática que atuavam como monitores; cinco professores do colégio de aplicação que os orientavam; e um professor do Instituto de Ciências Exatas da universidade, que o coordenava. O trabalho de formação docente foi desenvolvido por meio de um encontro semanal de 80 minutos de cada docente orientador com uma dupla de monitores para: planejar as aulas que seriam conduzidas com um grupo composto por até doze crianças; conversar sobre as aulas lecionadas; ler e indicar, nos relatórios produzidos sobre as aulas, quais aspectos poderiam ser aprimorados de modo a torná-los, pedagogicamente, mais densos. Esse processo de orientação se sustentava para além dos encontros semanais, em trocas de mensagens por e-mail e *WhatsApp*, e em alguns momentos de produção conjunta de materiais para serem utilizados nas aulas.

Uma das ações do projeto, cabe ressaltar, consiste em realizar movimentos de pesquisa que focalizem nosso olhar sobre determinados aspectos do processo de ensino-aprendizagem de matemática documentados pelos licenciandos em seus relatórios. Assim, com o propósito de realizar tal ação, para o escopo deste artigo, direcionamos nosso olhar para dois problemas que foram resolvidos por doze estudantes do 6º ano que participaram das aulas do GTD *Desafios Matemáticos*: o “problema dos azulejos” e o “problema dos seis retângulos”. Do ponto de vista pedagógico, esses problemas foram selecionados por possibilitarem a elaboração de materiais manipuláveis que pudessem representar as figuras geométricas em questão, uma vez que, em aulas anteriores, vários alunos haviam demonstrado dificuldade em resolver problemas que demandassem imaginar figuras geométricas em posições diferentes daquelas apresentadas nos enunciados. Do ponto de vista da pesquisa, selecionamos esses problemas pela qualidade dos relatórios elaborados pelas duas licenciandas envolvidas, os quais incluíam fotografias que mostravam, pelo menos em parte, como os alunos do referido GTD se apropriaram desses materiais para resolvê-los. Em nosso estudo, ao descrever e analisar os materiais manipuláveis utilizados, buscamos compreendê-los como artefatos de mediação na resolução de problemas, baseando-nos em uma perspectiva Histórico-Cultural da aprendizagem.

Desse modo, esta introdução buscou caracterizar brevemente o contexto de realização de uma pesquisa de natureza qualitativa, elaborada por duas professoras e um professor, atuantes na educação básica, concomitantemente a processos de orientação de estudantes de licenciatura em Matemática que ofertavam o GTD *Desafios Matemáticos*. É desse encontro entre pesquisa e formação que surge a proposição deste estudo. A seguir, será descrita justificativa e problematização da pesquisa, referenciada em estudos do campo da educação matemática e da perspectiva histórico-cultural.

## 2 Referencial Teórico-Metodológico

Anteriormente mencionado, a proposição do GTD *Desafios Matemáticos* acontece em uma escola de tempo integral, articulando a formação de professores à formação das crianças que, dele, participam. Nesse contexto, para além dos objetivos específicos do mencionado projeto Descobridores da Matemática, algumas questões mais amplas sobre os processos de ensino e aprendizagem que ocorrem no interior das escolas de tempo integral são norteadoras do nosso trabalho de pesquisa e de formação: como a matemática é ensinada e aprendida nessas

escolas? De que modo a ampliação do tempo escolar contribui (ou não) para a aprendizagem de matemática? Como se caracterizam as práticas matemáticas ocorridas nessas escolas?

De acordo com Deodato (2017), existe uma demanda premente no Brasil de se registrar, na literatura, as práticas matemáticas ocorridas no interior das escolas de tempo integral. Nosso trabalho, neste artigo, busca contribuir para esse registro, fazendo um recorte bem específico, direcionado a responder à seguinte questão: como, no âmbito da disciplina GTD *Desafios Matemáticos*, estudantes fazem uso de material manipulável para resolver problemas? O GTD é um componente curricular utilizado pela escola, campo da investigação, para operacionalizar seu tempo integral. Consideramos que, ao dar visibilidade às produções de estudantes do 6º ano, atendemos, de certo modo, à necessidade enunciada por Deodato (2017).

Outro aspecto que situa nossa investigação em um cenário mais amplo são as fronteiras que ela apresenta com a literatura relativa à resolução de problemas; com trabalhos que se dedicam a entender a função dos artefatos de mediação utilizados pelos alunos, na busca do objeto matemático escolar; e com autores que fazem uso da tradição histórico-cultural, em particular da Teoria da Atividade, como lente para analisar as produções dos estudantes.

Nessa direção, David, Tomaz e Ferreira (2014), por exemplo, utilizam o mesmo arcabouço teórico para, durante uma aula de Matemática, discorrerem sobre o poder de agência de um artefato visual, por elas, identificado, qual seja, o ‘chuveirinho’. Mais especificamente, no contexto da resolução de problemas, Deodato, Faria e Amâncio (2022) dispõem da Teoria da Atividade para ponderarem acerca das produções de registros realizadas por estudantes do 5º ano. Ainda sobre esse arcabouço de que nos valem, Takinaga e Manrique (2022), ao buscarem teorias capazes de oferecer “suporte necessário para pesquisas envolvendo o ensino e aprendizagem de conteúdos acadêmicos, no contexto escolar inclusivo” (p.76), concluem que, nesse caso, a Teoria da Atividade é uma das teorias que ainda tem sido pouco explorada.

Desse modo, a opção que fizemos por discorrer sobre os materiais manipuláveis, interpretando-os como artefatos de mediação na resolução de problemas, demanda um diálogo com a literatura, com o propósito de delimitar nossos entendimentos sobre alguns conceitos que estruturam nossa análise. Para tanto, esta seção está organizada em três partes: na primeira, apresentamos algumas reflexões relacionadas à noção de materiais manipuláveis; na segunda, caracterizamos dois conceitos que são fundamentais para nossa análise, quais sejam: artefatos e apropriação; por fim, discorreremos sobre nossas escolhas metodológicas.

## 2.1 O uso de materiais manipuláveis

A Matemática que conhecemos como ciência lida com muitas abstrações, ou seja, com construções mentais que foram desenvolvidas por diversos povos ao longo da história, tanto para solucionar problemas do cotidiano quanto pelo prazer de desenvolver novas ideias e fazer descobertas. Essas abstrações se desenvolveram por meio de relações que os seres humanos construíram consigo mesmos, com os outros e com o mundo, em grande parte mediadas por objetos utilizados na sua interação com a natureza, com a sociedade e com a cultura. Como afirma Caraça (2010), os conceitos matemáticos surgem “uma vez que sejam postos problemas de interesse capital, prático ou teórico” (p. 118). Os instrumentos intelectuais e conceituais que permitiram aos seres humanos estudarem as leis matemáticas, atualmente, conhecidas se desenvolveram de forma gradativa ao longo da história: “Deu-se uma gestação lenta, em que necessidade e instrumento interagiram, ajudando-se e esclarecendo-se mutuamente” (Caraça, 2010, p. 118).

No contexto da sala de aula, os estudantes lidam com uma das faces desse conhecimento historicamente produzido pela humanidade — a “Matemática Escolar” (Moreira & David,

2005) —, aprendendo e produzindo matemática nas atividades que realizam com seus pares e com os docentes. Em muitas dessas atividades, utilizam-se os materiais manipuláveis, assim denominados por serem “objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma idéia” (Reys 1971 *apud* Matos e Serrazina, 1996, p. 193). A utilização desses materiais ocorre de diferentes maneiras no cotidiano das escolas, a depender do modo como os professores compreendem a inserção desse recurso em suas aulas.

Nos dois principais documentos curriculares brasileiros (Brasil, 1998, 2017), encontramos recomendações que contemplam o uso de materiais manipuláveis no ensino. Um dos princípios norteadores dos Parâmetros Curriculares Nacionais afirma que “recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadoras, computadores e *outros materiais* têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem” (Brasil, 1998, grifo nosso). Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), afirma-se que os materiais manipuláveis podem “despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática (Brasil, 2017, p. 296). Ambos os documentos advertem os docentes sobre a necessidade da clareza de sua intencionalidade pedagógica com o uso desses materiais, e sobre as excessivas expectativas que os docentes possam ter em relação aos efeitos que esses materiais têm na aprendizagem. A BNCC, por exemplo, atrela o uso dos materiais manipuláveis a situações que propiciem “reflexão” e tenham a finalidade de auxiliar os estudantes a “sistematizar e formalizar” os conceitos matemáticos envolvidos.

Em nosso trabalho como docentes e investigadores, consideramos que os materiais manipuláveis são recursos didáticos que estão a serviço da aprendizagem dos estudantes. Esses materiais podem ser utilizados tanto no sentido de dar materialidade a ideias abstratas, auxiliando os estudantes a compreenderem conceitos e procedimentos matemáticos, como no sentido de serem instrumentos para a resolução de problemas e para a “investigação matemática na sala de aula” (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Podem ser levados à sala de aula pelo professor ou ser produzidos pelos próprios estudantes, com a orientação do professor. Assumindo a perspectiva histórico-cultural, consideramos que os materiais manipuláveis podem se constituir em artefatos pensados pelos professores para mediar a relação dos sujeitos estudantes com o objeto (matemático) de aprendizagem desejado.

Vários autores do campo de pesquisas em Educação Matemática têm destacado as potencialidades do uso de materiais manipuláveis para a aprendizagem da Matemática e têm apontado também que a maneira como o professor propõe seu uso é essencial nesse processo. No entanto, ainda se observa uma imprecisão conceitual que impede afirmações mais assertivas sobre eles (Rodrigues, 2011). De todo modo, consideramos importante trazer, a este texto, algumas considerações tecidas nesse campo.

Lorenzato (2006) observa que o material manipulável é um meio auxiliar de ensino, uma alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno, não sendo garantia de um bom ensino ou de uma aprendizagem significativa. Esse aspecto que questiona a eficácia do material manipulável, também, é discutido por Fiorentini e Miorim (1990). Segundo esses autores, muitos professores de Matemática utilizam jogos e materiais manipuláveis somente quando não conseguem obter os resultados esperados em suas aulas. Nessa situação, esses materiais são utilizados apenas com a justificativa de tornar as aulas mais atraentes para os estudantes, sem que haja uma reflexão sobre as contribuições e limitações desses recursos para a aprendizagem. Esse uso irrefletido dos materiais pode ter, inclusive, um efeito negativo sobre a aprendizagem, uma vez que, paradoxalmente, os materiais podem se tornar mais abstratos para os alunos do que o próprio conceito matemático em questão. Os autores salientam que

nenhum material tem validade em si mesmo; porém, podem ser utilizados nas aulas de Matemática, de forma a contribuir para “um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade” (Fiorentini & Miorim, 1990, p. 4).

Outro aspecto importante a ser considerado no uso dos materiais manipuláveis na sala de aula diz respeito a “quem” irá utilizá-los. Como afirmam Matos & Serrazina (1996, p. 197): “É diferente um material ser utilizado como instrumento de comunicação do professor que explica mostrando objetos que só ele manipula, ou serem os alunos a manipulá-los, interpretando suas características, resolvendo problemas com a sua ajuda e formulando novos problemas”. Em nossa compreensão, os materiais manipuláveis são recursos didáticos que o professor pode utilizar para comunicar ideias matemáticas, mas que precisam ser incorporados às atividades que os estudantes realizam, de modo que eles possam manuseá-los na resolução de problemas e/ou nas investigações matemáticas experienciadas por eles.

Considerando os aspectos aqui mencionados, nosso estudo busca contribuir para a discussão acerca dos materiais manipuláveis do ponto de vista das apropriações que os estudantes fazem para resolver problemas. Trataremos mais especificamente da resolução de problemas de geometria plana. De acordo com Pais (2000), a construção de conceitos geométricos é complexa, envolvendo aspectos intuitivos, experimentais e teóricos. O autor identifica duas posturas igualmente limitadas no ensino de geometria: uma que concebe as noções geométricas como entidades abstratas puramente racionais e outra que restringe o ensino de geometria às atividades experimentais, por meio da simples manipulação de objetos materiais e de desenhos. O autor defende que o professor busque um ponto de equilíbrio entre o racionalismo e o empirismo, de forma que as atividades de experimentação estejam associadas a algum pressuposto racional e que os argumentos dedutivos estejam acompanhados de alguma dimensão experimental. É nesse sentido que o autor vê, no ato de manusear os materiais, um potencial de auxiliar os estudantes na aprendizagem de geometria.

## 2.2 Os artefatos de mediação na perspectiva Histórico-Cultural

No nosso entendimento, o potencial dos materiais manipuláveis não está nos materiais em si, mas nas apropriações que as pessoas podem fazer desses materiais, tornando-os artefatos de mediação entre o sujeito e o objeto matemático em certa atividade. As noções de “atividade”, “apropriação”, “artefato”, “sujeito” e “objeto”, que mencionamos nessa afirmação, ancoram-se na perspectiva Histórico-Cultural, referenciadas, especialmente, nas contribuições de Vigotskyi Leontiev e Engeström.

Entre essas contribuições, destacamos, sobretudo, a noção de atividade humana, que permite a delimitação de uma unidade de análise não polarizada nem no objeto de desejo nem no humano, mas na relação (mediada por artefatos) do sujeito humano com seu objeto de desejo.

Deodato (2017), valendo-se desse entendimento acerca da atividade, recorre a Engeström e Sannino (2010), para destacar que os sujeitos são as pessoas cujos pontos de vista são escolhidos como perspectiva de análise. Ele ainda acrescenta que artefatos são instrumentos (ou signos) que medeiam a relação do sujeito com o objeto da atividade. Afirma também que o objeto representa o “espaço-problema” para o qual a atividade investigada está dirigida. Neste artigo, tomando tais entendimentos como perspectiva, consideramos que os estudantes do 6º ano são sujeitos de uma atividade cujo objeto é a resolução de problemas. Além disso, nessa atividade, as apropriações de certo artefato (papel cartão) pelos discentes revela, conforme será explicitado adiante, modos de os materiais manipuláveis servirem ao desenvolvimento de

processos de aprendizagem matemática.

Segundo Lopes e Marco (2015), o referencial histórico-cultural tem sido utilizado recorrentemente para produzir análises em investigações relacionadas à Educação Matemática. Em investigação realizada por essas autoras, elas constataram, por exemplo, que essa aproximação entre a Educação Matemática e a perspectiva histórico-cultural se faz perceber na organização de diversos grupos de pesquisa registrados no Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq): dos 348 grupos ancorados no referencial mencionado, 21 tinham, especificamente, professores ou linhas específicas vinculadas à Educação Matemática. As autoras, para elucidar essa situação, asseveram:

A preocupação com o ensino e a aprendizagem da matemática na educação escolar, principalmente nos processos que se consolidam na escola pública, tem levado muitos pesquisadores da área da Educação Matemática a buscar na Psicologia Histórico-Cultural a compreensão de que o ensino assume grande importância no desenvolvimento do indivíduo e que a relação entre a atividade de ensinar — do professor — e a atividade de aprender — do aluno, estão centradas na forma como o educador organiza o ensino. (Lopes & Marco, 2015, p. 458).

É exatamente essa preocupação com a organização do ensino e com a aprendizagem da Matemática, no âmbito da escola pública, conectada à compreensão da função do ensino para o desenvolvimento do sujeito humano, que explica a base teórico-metodológica que sustenta os pressupostos deste artigo.

Valendo-nos, pois, desse fundamento, no âmbito dos estudos mais direcionados à Educação Matemática, nossa referência para pensar a “apropriação” dos materiais manipuláveis está no trabalho de Smolka (2000, p. 28), segundo a qual “apropriação refere-se a modos de tornar próprio, de tornar seu; também, tornar adequado, pertinente, aos valores e normas socialmente estabelecidos”. Esse conceito nos auxilia a identificar e compreender os usos que os estudantes fazem desses materiais para pensar e fazer matemática, e como esses estudantes participam, com esses materiais, das interações que ocorrem na sala de aula. Nesse processo de apropriação, podemos observar os materiais manipulativos como “artefatos”, na compreensão que buscamos em Cole (1996, *apud* Costa, 2016):

[...] artefato é um aspecto do mundo material que tem sido modificado ao longo da sua história pela incorporação na ação humana dirigida a objetivo. Em virtude das mudanças introduzidas no processo de sua criação e utilização, artefatos são simultaneamente ideal (conceitual) e material. (Cole, 1996, p. 117 *apud* Costa, 2016, p. 55).

Assim, consideramos que os materiais manipuláveis são, pois, artefatos que medeiam as relações entre os sujeitos e os objetos matemáticos. Nossa compreensão de “sujeito” e “objeto” se alinha com aquela produzida por Engeström e Sannino (2010), segundo os quais: (i) os sujeitos são as pessoas cujo ponto de vista é adotado como perspectiva de análise; (ii) o objeto é a ‘matéria-prima’ ou o ‘espaço-problema’ para o qual a atividade investigada está dirigida. Valendo-nos dessa compreensão, entendemos que os artefatos podem ser apropriados pelos sujeitos quando esses, na *Atividade Humana*, perseguem seu objeto de desejo.

### 2.3 Os procedimentos metodológicos

Tendo, pois, construído entendimentos para os conceitos de materiais manipuláveis e de artefatos, caracterizamos, a seguir, nossos procedimentos metodológicos.

A pesquisa relatada é de natureza qualitativa, utilizando-se da análise documental (Lüdke & André, 1986) como forma de produzir conhecimento. Lüdke e André (1986) referem-se a documentos de forma ampla, o que inclui “(...) leis e regulamentos, normas, pareceres, cartas, memorandos, diários pessoais, autobiografias, jornais, revistas, discursos (...) (Lüdke & André, 1986, p. 38)”. No caso de nossa investigação, os documentos considerados foram os relatórios produzidos por licenciandos em parceria com seus orientadores, no âmbito do projeto Descobridores da Matemática.

Três etapas constituíram nosso percurso metodológico. De início, realizamos uma busca no acervo de relatórios do projeto Descobridores da Matemática. Esses relatórios, cabe elucidar, colocavam em relevo as soluções que os estudantes do 6º ano produziam para os problemas trabalhados durante o GTD *Desafios Matemáticos*, sob a perspectiva dos licenciandos, orientados por docentes da UFMG. Desse modo, eles intencionavam descrever a aula lecionada, com destaque para diferentes estratégias de resolução dos problemas propostos.

Em seguida, selecionamos os documentos nos quais encontramos relatos sobre a resolução de problemas em que os estudantes do ensino fundamental fizeram uso de materiais manipuláveis. Torna-se imperativo destacar que também contribuiu, para tal seleção, o nível de detalhamento dos relatórios, já que eles não tinham formato rígido, ou seja, os relatórios eram produzidos com base nas estratégias pessoais de registro de cada licenciando. Assim, compete informar que nosso material empírico se constituiu dos relatos sobre a resolução do problema dos azulejos e do problema dos seis retângulos, ambos caracterizados com detalhe, posteriormente, neste artigo.

A fase final do percurso envolveu uma interpretação dos usos dos materiais manipuláveis durante a resolução dos problemas, baseada, sobretudo, no conceito de artefato, entendido na perspectiva Histórico-Cultural. Tal conceito, ressaltamos, possibilitou a produção de ponderações sobre a apropriação dos materiais manipuláveis como artefatos de mediação, por estudantes de 6º ano, na resolução de dois problemas. Por fim, cabe reiterar que as análises aqui produzidas foram feitas *a posteriori*, com base em documentos cuja produção ocorreu no contexto da formação dos licenciandos, limitando nosso trabalho investigativo às possibilidades de resolução de problemas que foram relatadas por eles.

### 3 A resolução de problemas no contexto do Projeto Descobridores da Matemática

Como já mencionado, um dos objetivos do Projeto Descobridores da Matemática é contribuir para a melhoria na aprendizagem de estudantes do 3º ao 6º ano do ensino fundamental, por meio da resolução de problemas que são selecionados, adaptados e/ou elaborados em “reuniões de orientação” entre estudantes da licenciatura em Matemática e docentes do Centro Pedagógico da UFMG. Nesses encontros, analisamos, com os futuros professores, alguns problemas já disponíveis na literatura e fazemos adaptações que julgamos adequadas para as turmas do GTD *Desafios Matemáticos*. Também elaboramos novos problemas e produzimos materiais manipuláveis para serem utilizados pelos estudantes durante as aulas. Além disso, conversamos sobre as produções dos estudantes e orientamos os licenciandos a registrarem suas observações em relatos, sobre as aulas dadas. Os registros são feitos após a realização de cada aula. São pequenas narrativas de como transcorreram as aulas, contendo algumas imagens da sala de aula e das produções dos alunos. Nem todas as produções são fotografadas, e nem sempre a riqueza das interações que acontecem na sala de aula se faz presente no modo de relatar as experiências vivenciadas pelos licenciandos. Faz parte do processo de orientação colaborar para que esses relatos cresçam em densidade narrativa e pedagógica, com algumas intervenções nossas à medida que lemos e conversamos sobre o que eles escrevem.



Nossa concepção de “problema” se aproxima daquela apresentada por Alevatto (2005, p. 41) ao considerar que “uma questão é um problema se o aluno ainda não conhece os meios necessários à resolução, mas está interessado em resolvê-la”. Desse modo, procuramos propor, no GTD *Desafios Matemáticos*, tarefas que tenham o potencial de despertar o interesse dos estudantes e que não tenham a possibilidade de uma resposta imediata, demandando deles a elaboração de estratégias para solucionar as situações-problema apresentadas.

Nesta seção, apresentaremos e discutiremos a resolução de dois problemas que requerem a habilidade de visualização: o “problema dos azulejos” e o “problema dos seis retângulos”. Tal habilidade, de acordo com Van de Walle (2009), pode ser considerada a capacidade de criar imagens mentais das formas e de imaginá-las em diferentes posições. Segundo o autor, tarefas que contribuam para o desenvolvimento das habilidades de visualização devem solicitar que os estudantes “pensem sobre uma forma mentalmente, manipulem ou transformem uma forma mentalmente, ou representem uma forma como ela é percebida visualmente” (Van de Walle, 2009, p. 474).

Tínhamos verificado, ao longo da experiência no GTD, que os alunos tiveram mais dificuldades em solucionar problemas que requisitavam a necessidade de visualização geométrica. Com base nessa percepção, propusemos outros problemas que demandavam dos estudantes a capacidade de imaginar figuras em diferentes posições. Na busca pela solução, os estudantes puderam explorar materiais manipuláveis que representavam as situações propostas pelos problemas. De acordo com Pais (1996), a formação de imagens mentais é consequência da experiência com objetos e com desenhos.

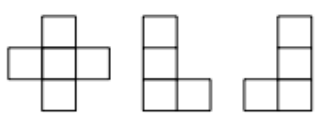
### 3.1 O problema dos azulejos

Iniciamos uma das reuniões de orientação das licenciandas com a apresentação do “problema dos azulejos”. Ele foi retirado do banco de questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (Figura 1).

**Figura 1:** Problema original – Azulejos de Pedro

**14 | Azulejos de Pedro**

Pedro é um pedreiro. Ele tem um grande número de azulejos de três tipos, como mostrado abaixo:



**Figura 14.1**

O menor lado de cada azulejo mede 10 cm. Ele quer ladrilhar completamente uma bancada de uma cozinha sem cortar qualquer azulejo.

(a) Mostre como ele poderá alcançar seu objetivo se a bancada for um retângulo 60 cm × 50 cm.

(b) Mostre como ele poderá alcançar seu objetivo se a bancada for um quadrado 60 cm × 60 cm.

**Fonte:** <http://www.obmep.org.br/bq/bq2011.pdf>

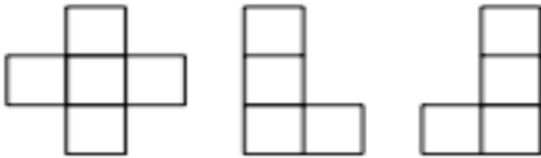
Depois de ponderarmos com as monitoras sobre esse problema, consideramos que a linguagem do enunciado estava esclarecedora e adequada para os estudantes do 6º ano; avaliamos também que, para tais discentes, seria necessário pensar em artefatos de mediação — além do desenho — para auxiliá-los no desenvolvimento de estratégias de solução. Para tanto, entendemos que uma alternativa seria a construção de peças com material manipulável para representar os azulejos.

No nosso entendimento, para tais peças serem apropriadas como artefato de mediação entre os sujeitos (alunos) e o objeto matemático (problema a ser resolvido), seria necessário que elas tivessem as medidas como indicadas no desenho; seria necessário ainda que elas ocupassem uma área que pudesse ser delimitada em sala de aula, na mesa dos estudantes. Esse entendimento nos direcionou a efetuar pequenas adaptações no problema original, conforme mostra a Figura 2.

**Figura 2:** Problema adaptado – Azulejos de Pedro

**Azulejos de Pedro**

Pedro é um pedreiro. Ele tem um grande número de azulejos de três tipos, como mostrado abaixo:



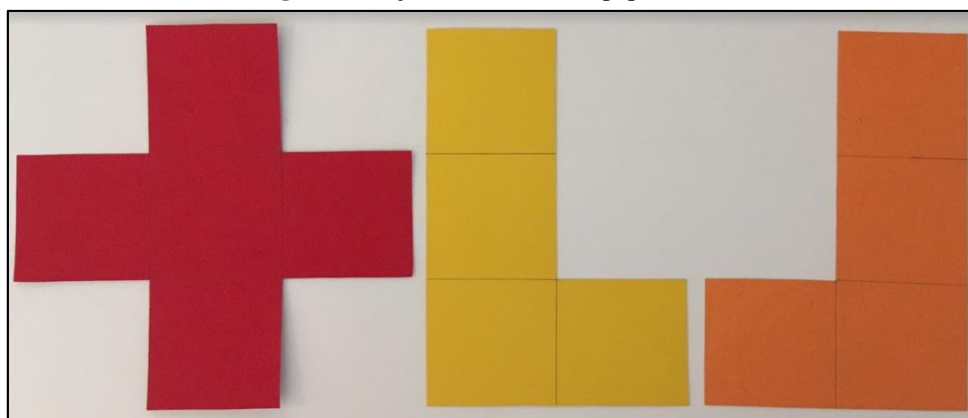
O menor lado de cada azulejo mede 5 cm. Ele quer ladrilhar totalmente uma bancada de uma cozinha sem cortar qualquer azulejo.

a) Mostre como ele pode alcançar seu objetivo se a bancada for um retângulo 30 x 25 cm.  
 b) Mostre como ele pode alcançar seu objetivo se a bancada for um quadrado 30 x 30 cm.

**Fonte:** Acervo do Projeto Descobridores da Matemática

Cabe esclarecer que escolhemos o “papel-cartão” como matéria-prima para confeccionar as peças que representariam os azulejos (Figura 3), por duas razões principais: i) o material era de fácil manuseio tanto para docentes (na montagem) quanto para discentes (no uso); ii) esse material estava disponível no almoxarifado da escola. Outros materiais também poderiam ser utilizados, como EVA, papelão. A produção das peças foi iniciada na reunião de orientação e foi disponibilizado material suficiente para que as duas monitoras terminassem de confeccioná-las posteriormente.

**Figura 3:** Peças construídas em papel-cartão



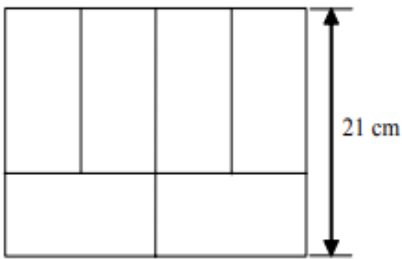
**Fonte:** Acervo do Projeto Descobridores da Matemática

### 3.2 O problema dos seis retângulos

O “problema dos seis retângulos” foi retirado do banco de questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (Figura 4).

**Figura 4:** Problema Original: Seis retângulos

3) Com seis retângulos idênticos formamos um retângulo maior com um dos lados medindo 21 cm, como na figura. Qual é a área do retângulo maior?



A)  $210\text{cm}^2$       B)  $280\text{cm}^2$       C)  $430\text{cm}^2$       D)  $504\text{cm}^2$       E)  $588\text{cm}^2$

Fonte: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2010.pdf>

Assim como no “problema dos azulejos”, consideramos que o texto do “problema dos seis retângulos” não apresentava inadequações de conteúdo ou linguagem. Para fabricar o material manipulável, mantivemos o critério de considerar as dimensões indicadas na figura do problema e utilizamos, novamente, o “papel-cartão” para confeccionar os retângulos menores (Figura 5).

**Figura 5:** Peças construídas em papel-cartão

Fonte: Acervo do Projeto Descobridores da Matemática

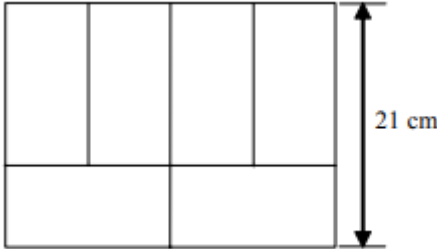
Como desejávamos, pedagogicamente, favorecer o uso do material manipulável pelos estudantes, optamos por fazer uma primeira adaptação no texto do problema original. Acrescentamos, ao enunciado do problema, a seguinte observação: “Atenção: Não vale medir os lados dos retângulos”. Ao fazer essa afirmação, imaginávamos que os estudantes a interpretariam como um impedimento no uso de instrumentos convencionais de medida (como régua, por exemplo), o que, de fato, aconteceu. Uma segunda adaptação foi feita com a intenção de deslocar o foco do problema de áreas para perímetros, em virtude de os estudantes ainda não terem estudado o cálculo de áreas no 6º ano, e no ano letivo anterior esse conteúdo ter sido explorado por meio de figuras em malha quadrangular, triangular. Finalmente, para incentivar e deixar os estudantes mais livres para apresentarem diversas soluções, optamos por transformar o problema fechado em problema aberto. Todas essas modificações se desdobraram em um novo problema, como exposto na Figura 6.

**Figura 6:** Problema adaptado: Seis retângulos

**Seis retângulos**

Com seis retângulos idênticos formamos um retângulo maior, com um dos lados medindo 21 cm, como na figura abaixo. Qual é o perímetro do retângulo maior, em cm?

Atenção: Não vale medir os lados dos retângulos.



**Fonte:** Acervo do Projeto Descobridores da Matemática

Da mesma forma como ocorreu com a produção dos materiais para o “problema dos azulejos”, novamente a produção das peças em papel-cartão foi iniciada na reunião de orientação e finalizada pelas monitoras em outro momento.

#### 4 Análise dos problemas resolvidos por estudantes do 6º ano

Uma vez descritos os dois problemas e apresentado o material manipulável utilizado pelos estudantes, analisamos as apropriações que os doze estudantes do 6º ano, participantes do GTD *Desafios Matemáticos*, fizeram desse material para desenvolver suas estratégias de resolução. Para resolver esses dois problemas, os discentes foram organizados em quatro equipes de três alunos.

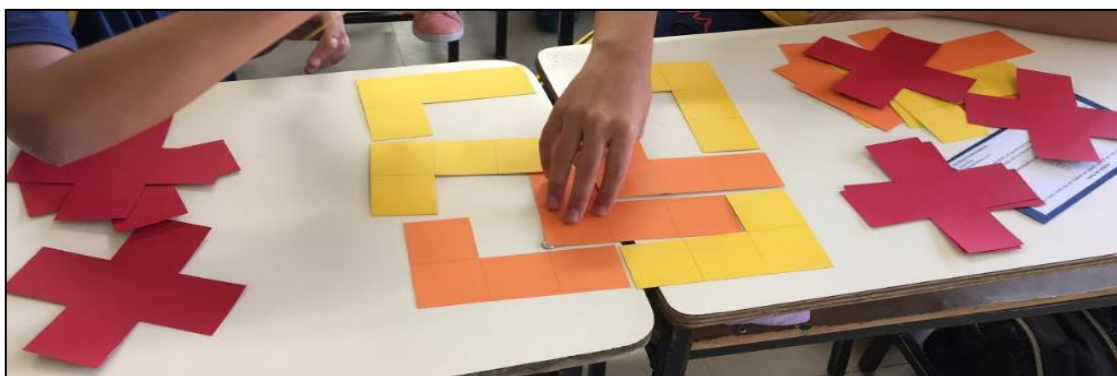
De um ponto de vista geral, é possível afirmar que, em ambos os problemas, os discentes tiveram de imaginar as formas geométricas dos azulejos e dos retângulos em diferentes posições e, para favorecer tal processo, eles utilizaram os materiais que foram disponibilizados para representar a situação do problema. Em outros termos, os estudantes manusearam as peças de papel-cartão, mudando suas posições, rotacionando as peças, seja na representação do azulejo (no ladrilhamento da cozinha), seja na representação dos retângulos pequenos (na montagem do retângulo maior), até encontrar uma solução. Nos dois problemas, pudemos constatar que os estudantes chegaram à solução por meio de diferentes estratégias.

Especificamente em relação ao primeiro problema, entendemos que seja relevante destacar ainda o papel do material manipulável para ajudar os estudantes a expressarem uma dúvida durante a resolução. Enquanto utilizavam as peças para simular o ladrilhamento, um dos grupos de discentes percebeu que era possível ‘ocupar o espaço’ deixando espaços vazios entre as peças, e outro grupo utilizou todas as peças para ‘ocupar o espaço’, promovendo sobreposições. Diante disso, expressamos a ideia de “ocupar o espaço” em termos de uma situação do mundo do trabalho: ‘quando um pedreiro tem de ladrilhar uma superfície, como ele faz isso?’ Não é comum que ele sobreponha azulejos, tampouco deixe espaços vagos. Criou-se, pois, ensejo para que os estudantes experimentassem, por meio do manuseio do material, a visualização de soluções que não são validadas como corretas na lógica da resolução desse tipo de problema.

É possível destacar particularidades no modo como cada equipe de discentes se apropriou dos materiais. Em relação ao “problema dos azulejos”, uma das equipes utilizou o material manipulativo para, inicialmente, montar ‘as fronteiras da bancada da cozinha’. Feito isso, eles precisaram pensar na posição adequada dos demais azulejos para finalizar o

preenchimento ‘interno’ do espaço (Figura 7). Nesse processo, eles rotacionaram as peças, fizeram tentativas, até encontrar a solução do problema.

**Figura 7:** Peças delimitando o contorno



**Fonte:** Acervo do Projeto Descobridores da Matemática

Essa estratégia, no nosso entendimento, evidencia que os discentes inventaram um uso próprio para o material com a intenção de resolver o problema, ou seja, eles se *apropriaram* (Smolka, 2000) do material manipulável e o utilizaram como *artefato de mediação* (Cole, 1996), para enfrentar a situação de dificuldade em que se encontravam.

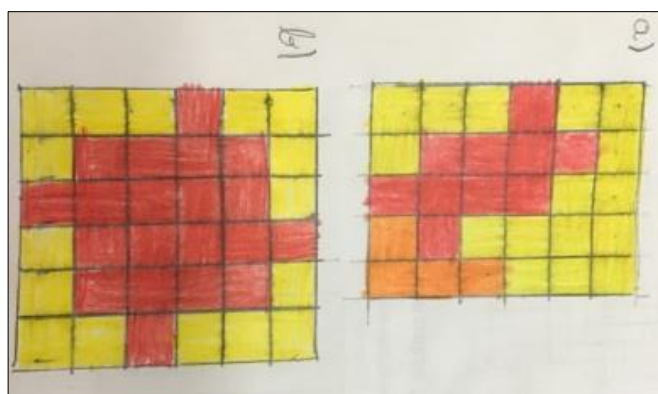
Com base na solução encontrada pelos discentes, ilustrada pela Figura 8, eles foram provocados a refletir sobre a demanda do problema original, ou seja, como ocupar o espaço com auxílio, apenas, do desenho. Após certa resistência e afirmações, tais como: “*É impossível*”, com a mediação das duas monitoras que desenvolviam essa tarefa com eles, as quatro equipes de alunos conseguiram resolver os itens “a” e “b” e, também, construíram uma representação por meio de desenho (confira um exemplo na figura 9), que os direcionou à conclusão de que, apesar de uma eventual falta do material manipulável dificultar o processo, ela não impedia que eles chegassem às soluções encontradas. Ou seja, eles acabaram percebendo que, de um lado, o material manipulável não tem valor em si, tal como sinalizado por Fiorentini e Miorim (1990), mas que, de outro lado, ele pode ser apropriado de modo a se constituir como um artefato mediador da *Atividade* (Engeström & Sannino, 2010), na qual eles são os sujeitos que buscam um determinado objeto (matemático).

**Figura 8:** Soluções encontradas por uma das equipes



**Fonte:** Acervo do Projeto Descobridores da Matemática

**Figura 9:** Representação da solução, por meio de desenho, realizada por um estudante



**Fonte:** Acervo do Projeto Descobridores da Matemática

Todas as equipes conseguiram solucionar o problema, inclusive representar a solução por meio de desenhos. É importante destacar que a solução para esse problema é única e que, portanto, todas as equipes produziram desenhos semelhantes à Figura 9.

Já em relação ao “problema dos seis retângulos”, o processo de apropriação do material manipulável como artefato de mediação demandou maior intermediação das licenciandas que acompanhavam os estudantes no momento de sua resolução. Depois de ler o problema e de explorar o material, alguns discentes do 6º ano começaram a afirmar: “*faltam informações sobre os lados do retângulo pequeno*”, “*esse problema não tem solução*”, “*esse material não ajuda a resolver o problema*”, entre outras.

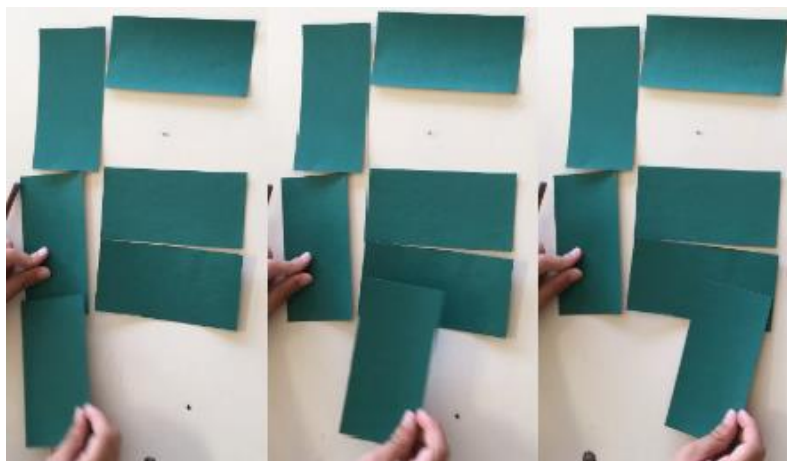
Conforme experimentavam o material e com as provocações assertivas das licenciandas, duas estratégias principais foram produzidas pelos estudantes para resolver o problema. Para caracterizá-las, utilizaremos a seguinte notação: lp (lado menor do retângulo pequeno), Lp (lado maior do retângulo pequeno), lG (lado menor do retângulo grande) e LG (lado maior do retângulo grande).

Um primeiro grupo de discentes, conforme manuseava o material, começou a atribuir sentido a ele, “tornando-o próprio” (Smolka, 2000). Nesse processo, eles notaram que a medida do lp poderia ser utilizada como unidade de medida de comprimento (figura 10). Com essa descoberta, perceberam que a medida de Lp era igual a duas vezes a medida de lp, ou simplesmente  $Lp = 2lp$ . A partir daí, sem muitas dificuldades, notaram que:  $lG = 3lp$  e  $LG = 4lp$ . Durante essa etapa, voltaram ao desenho no enunciado e também, com certa facilidade, encontraram o valor de lp (7cm), por meio da divisão de 21 (medida de lG informada no problema) por 3 (relação entre lG e lp percebida pelos estudantes). Então, concluíram que o perímetro era igual à soma:  $LG + LG + lG + lG = 4lp + 4lp + 3lp + 3lp = 14lp = 14 \cdot 7 = 98\text{cm}$ .

**Figura 10:** Comparação entre  $lp$  e  $Lp$ 

**Fonte:** Acervo do Projeto Descobridores da Matemática

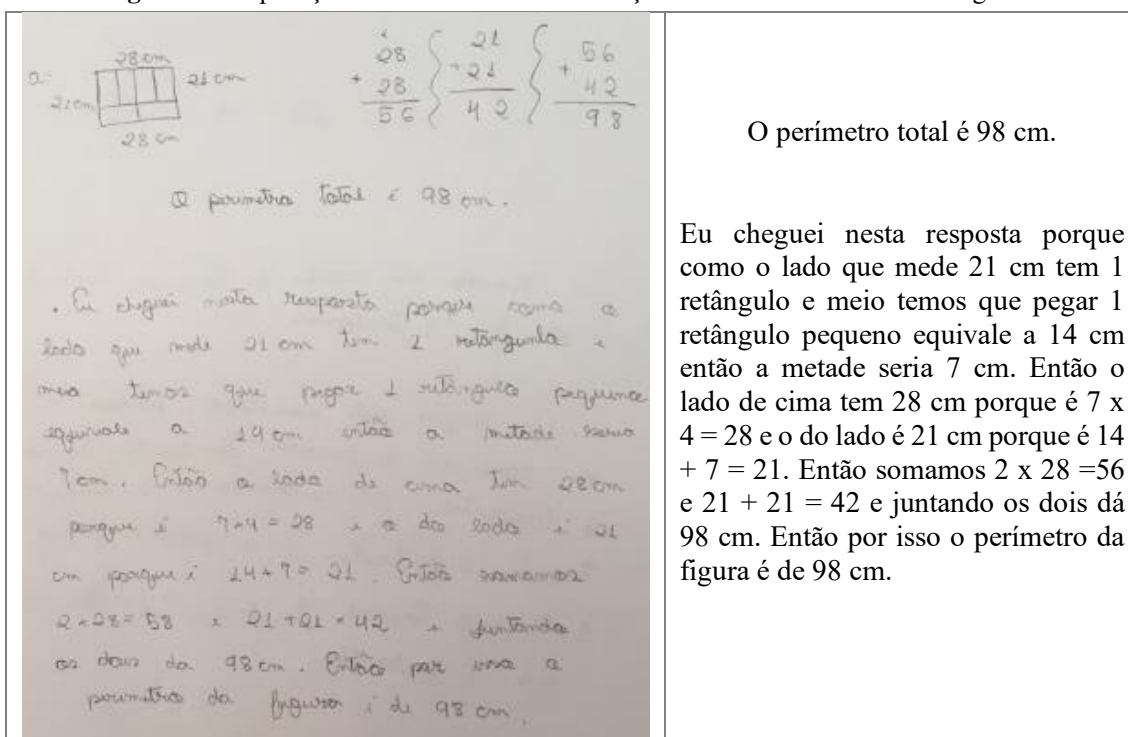
Um segundo grupo de discentes encontrou a solução por outro caminho. Os estudantes construíram, inicialmente, o retângulo maior e perceberam, pelo manuseio, que  $LG = 3lp$  (Figura 11). Uma vez tendo chegado a essa conclusão, voltaram ao desenho do enunciado do problema e, assim como o outro grupo, não apresentaram dificuldades em concluir que  $lp = 7\text{cm}$ . Sem maiores complicações, também notaram que  $LG = 4lp$ . Depois disso, para calcular o perímetro, fizeram  $2LG + 2LG = 8lp + 6lp = 14lp = 14 \cdot 7 = 98\text{ cm}$ .

**Figura 11:** Comparando  $lp$  com  $LG$ 

**Fonte:** Acervo do Projeto Descobridores da Matemática

Os estudantes também foram incentivados a explicar como pensaram para resolver o problema, pois, conforme afirma Pais (2000), é importante que a manipulação esteja associada a uma atividade intelectual para que o aluno possa estabelecer relação entre a prática e a teoria. A seguir, apresentamos a explicação de uma aluna sobre a solução do desafio, com a transcrição ao lado para facilitar a leitura (Figura 12). Essa foi a explicação destacada pelos licenciandos como a mais completa.

**Figura 12:** Explicação de uma aluna sobre a solução do “Problema dos seis retângulos”



O perímetro total é 98 cm.

Eu cheguei nesta resposta porque como o lado que mede 21 cm tem 1 retângulo e meio temos que pegar 1 retângulo pequeno equivale a 14 cm então a metade seria 7 cm. Então o lado de cima tem 28 cm porque é  $7 \times 4 = 28$  e o do lado é 21 cm porque é  $14 + 7 = 21$ . Então somamos  $2 \times 28 = 56$  e  $21 + 21 = 42$  e juntando os dois dá 98 cm. Então por isso o perímetro da figura é de 98 cm.

**Fonte:** Acervo do Projeto Descobridores da Matemática

Assim, em ambos os problemas, os estudantes manipularam e rotacionaram as peças. Para visualizá-las em diferentes posições, fizeram tentativas, de forma que o material foi utilizado para favorecer o raciocínio matemático, com participação ativa dos estudantes, conforme alertam Fiorentini e Miorim (1990). Logo, entendemos que os estudantes do 6º ano se apropriaram do material manipulável e encontraram soluções próprias, validadas dentro da lógica da Matemática Escolar (Moreira & David, 2005), para os problemas propostos.

## 5 Considerações finais

Neste artigo, apresentamos e discutimos algumas estratégias utilizadas por estudantes do 6º ano durante a resolução dos problemas compartilhados neste estudo, buscando analisar as apropriações que esses estudantes fizeram de certos materiais manipuláveis, disponibilizados na sala de aula, com o propósito de auxiliá-los a desenvolver suas próprias estratégias de resolução de tais problemas.

Para discorrer sobre o que nos propusemos, inicialmente, fizemos uma revisão de literatura sobre o uso de materiais manipuláveis no contexto da Educação Matemática. Depois disso, apresentamos nosso arcabouço conceitual, dando relevo a algumas noções vinculadas à perspectiva Histórico-Cultural e a certa visão sobre problemas e visualização geométrica. Em seguida, apresentamos o material empírico sobre o qual refletimos para produzir nossa análise.

Desse processo, consideramos pertinente sublinhar três aspectos. Um deles é que, na perspectiva de resolução de problemas que assumimos, importávamo-nos mais com os processos que os ‘discentes descobridores’ desenvolviam do que com as soluções que eles encontravam e que, eventualmente, eram consideradas como corretas na lógica escolar. Ser “descobridor” da Matemática nesse projeto é algo referente ao sujeito que aprende, relacionado com as ações de criar, inventar e desenvolver suas próprias estratégias de resolução de problemas.



Nessa mesma direção, cabe esclarecer que não desenvolvemos um trabalho cuja lógica principal fosse ‘treinar’ os estudantes para resolver um tipo específico de problema. Ainda que tivéssemos a clareza de que eles pudessem se familiarizar com a ‘gramática’ dos problemas olímpicos e que considerássemos isso um elemento positivo, nossa intenção era mais ampla. Pretendíamos desenvolver um trabalho com estudantes da educação básica, por meio do qual eles pudessem mobilizar conhecimento matemático ao criar estratégias para resolver problemas. Essa pretensão se evidencia, por exemplo, no esforço que empreendemos na adaptação dos enunciados dos problemas. No “problema dos azulejos”, essa adaptação foi mais sutil e passou pela escolha de números que tornassem o uso de material manipulável mais significativo. Já no “problema dos seis retângulos”, essa adaptação levou a uma mudança de foco – de área para perímetro – que tornasse a exploração do problema mais adequada para o grupo de estudantes com o qual trabalhávamos.

O segundo aspecto que sublinhamos se relaciona, mais especificamente, com o uso de materiais manipuláveis. Apesar de reconhecermos benefícios nesse uso, não fazemos uma defesa ingênua do uso desse tipo de material. De um lado, concordamos com Fiorentini e Miorim (1990), no sentido de que o professor não deve submeter suas concepções teórico-metodológicas a algum tipo de material, mas, ao contrário, deve submeter o material aos seus pressupostos teórico-metodológicos. De outro lado, pensamos que os materiais manipuláveis devem ser justificados não apenas porque podem motivar os discentes nas aulas de Matemática, mas, principalmente, porque podem se mostrar como artefatos de mediação entre o sujeito estudante e o objeto matemático perseguido.

Concluimos este artigo apontando um terceiro aspecto. Percebemos que os discentes não só se apropriaram dos materiais manipuláveis na busca pela solução de um problema, mas também se tornaram independentes deles nesse processo. Essa afirmação se sustenta no que foi observado durante o “problema dos azulejos”. Nele, os discentes fizeram uso das peças de papel-cartão para resolver o problema, mas foram além da necessidade delas, quando apresentaram indícios de que entenderam que o desenho do enunciado era suficiente para resolver o problema.

### Agradecimentos

Agradecemos às contribuições de Débora Evangelista Lima e Bruna Vilela Marcolino, que participaram do Projeto Descobridores da Matemática como monitoras voluntárias. Elas conduziram as aulas com os estudantes do 6º ano, elaboraram os relatórios sobre o desenvolvimento das aulas, além de produzirem os registros fotográficos. Todos os dados que utilizamos neste artigo fazem parte do acervo do Projeto Descobridores da Matemática.

### Referências

- Allevato, N. S. G. (2005). *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência*. 2005. 370f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. São Paulo, SP.
- Brasil. (1998). Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental – Matemática*. Brasília, DF: MEC/SEF.
- Brasil. (2017) Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Brasília, DF: MEC/SEF. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>
- Campos, C. A; Souza, M. R. A. & Silva, D. J. (2020). Dicionário Científico Ilustrado. *Interfaces-Revista de Extensão da UFMG*, 8(1), 133-143.
- Caraça, B. J. (2010). *Conceitos fundamentais de matemática* (7a. ed.). Lisboa: Gradiva.

- Cole, M. (1996). *Cultural psychology: a once and future discipline*. Harvard University Press.
- Costa, J. L. (2016). *Atividades docentes de uma professora de Matemática: artefatos mediadores na EaD*. 2016. 213f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG.
- David, M. M.; Tomaz, V. S. & Ferreira, M. C. C. (2014). How visual representations participate in algebra classes' mathematical activity. *ZDM*, 46(1), 95-107.
- Deodato, A.A. (2017). *Articulação entre disciplinas de uma escola de tempo integral: reverberações de um "Grupo de Trabalho Diferenciado (GTD)" nas aulas de Matemática*. 2017. 208f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG.
- Engeström, Y.; & Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, 5(1), 1-24.
- Fiorentini, D.; & Miorim, M. A. (1990). Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. *Boletim da SBEM-SP*, 4(7), 1-5.
- Lopes, A. R. L.V.; & Marco, F. F. (2015). Pesquisa em Educação Matemática e Psicologia Histórico-Cultural: alguns apontamentos. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(3), 456-471.
- Lorenzato, S. O. (2006). *Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Campinas, SP: Autores Associados.
- Lüdke, M. & André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo, SP: EPU.
- Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Moreira, P.C. & David, M. M. S. (2005). *A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Pais, L. C. (1996). Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké*, 4(6), 65-74.
- Pais, L. C. (2000). Uma análise do Significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. *Anais da Reunião Nacional da ANPED*, Caxambu, MG, 23.
- Ponte, J. P.; Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003) *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Rodrigues, F.C. (2011). *Laboratório de educação matemática: descobrindo as potencialidades do seu uso em um curso de formação de professores*. 2012. 195f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG.
- Smolka, A. L. B. (2000). O (im)próprio e o (im)pertinente na apropriação das práticas sociais. *Cadernos Cedes*, 20(50), 26-40.
- Takinaga, S.S. & Manrique, A. L. (2022). A Teoria da Atividade como referencial teórico em pesquisas de ensino de conteúdos acadêmicos no contexto escolar inclusivo. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, 11(2), 64-77.
- Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. São Paulo, SP: Penso Editora.