



# RCeEM

Revista Cearense de Educação Matemática

ISSN: 2764 - 8311



e-ISSN: 2764-8311

DOI: 10.56938/rceem.v1i1.3146



## PROPRIEDADES COMBINATÓRIAS SOBRE A SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL, A NOÇÃO DE TABULEIRO E ALGUNS APONTAMENTOS HISTÓRICOS

COMBINATORY PROPERTIES ABOUT THE JACOBSTHAL SEQUENCE, THE NOTION OF THE BOARD AND SOME HISTORICAL NOTES

Francisco Regis Vieira Alves<sup>1</sup>

### RESUMO

De modo quase recorrente, podemos deparar determinadas concepções (equivocadas) em torno da exploração de um cenário de História da Matemática, nem sempre de forma a envolver repercussão imediata para a sala de aula, ao passo que se amparam em um discurso retórico-acadêmico que relega, quase de forma residual, o próprio saber matemático ao segundo plano. Diante desse entrave, no presente trabalho se realiza um breve exame histórico e evolutivo sobre a Sequência de Jacobsthal. Sua escolha estabelece um contraponto com a Sequência de Fibonacci, cujos autores de livros de História da Matemática costumam enfatizar um viés alegórico e de divertimento. Por outro lado, ao passo que considera a noção de  $n$  – tabuleiro, o trabalho proporciona uma compreensão de determinados elementos heurísticos originados do emprego da abordagem combinatória, de um expediente de visualização e um itinerário de generalização de propriedades matemáticas, por intermédio dos casos  $1 \times n, 2 \times n, 3 \times n$ .

**Palavras-chave:** Sequência de Jacobsthal; Abordagem combinatória; Tabuleiro; História da Matemática.

### ABSTRACT

Almost recurrently, we can come across certain (mistaken) conceptions around the exploration of a History of Mathematics scenario, not always in a way that involves immediate repercussions for the classroom, while they are supported by a rhetorical-academic discourse that it relegates, almost in a residual way, mathematical knowledge itself to the background. Faced with this obstacle, in the present work a brief historical and evolutionary examination of the Jacobsthal Sequence is carried out. His choice establishes a counterpoint with the Fibonacci Sequence, whose authors of History of Mathematics books usually emphasize an allegorical and fun bias. On the other hand, while considering the notion of board, the work provides an understanding of certain heuristic elements originated from the use of the combinatorial

<sup>1</sup> Professor Titular do Departamento de Matemática e Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Coordenador acadêmico do Doutorado em REDE – Rede Nordeste de Ensino – POLO. Coordenador do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM/IFCE (2015 – 2020). Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Tecnológico – CNPq – PQ2 (2020 – 2023). Fortaleza, estado, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Alto Santos, Bairro Fátima, Fortaleza, CE, Brasil, CEP: 60.000.000. E-mail: [fregis@ifce.edu.br](mailto:fregis@ifce.edu.br).

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

approach of visualization and an itinerary of generalization of mathematical properties, through the cases  $1 \times n$ ,  $2 \times n$ ,  $3 \times n$ .

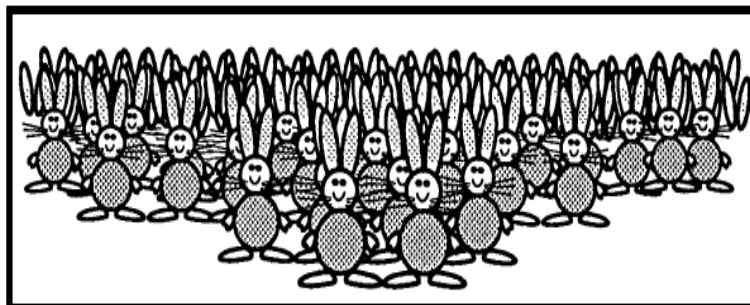
**Keywords:** Jacobsthal sequence; Combinatorial approach; Board; Mathematics History.

## Introdução

No contexto do ensino de Matemática com amparo em elementos da História da Matemática, por vezes, deparamos uma retórica acadêmica de estilo distinguido, que costuma colocar em evidência determinados elementos, com viés demasiadamente afetados pela curiosidade ou teor lacônico e, em outros casos, fragmentos do passado que, em maior ou em menor substância, relegam o exame e a compreensão necessária, de *per si*, da Matemática envolvida ou correlacionada a um cenário secundário.

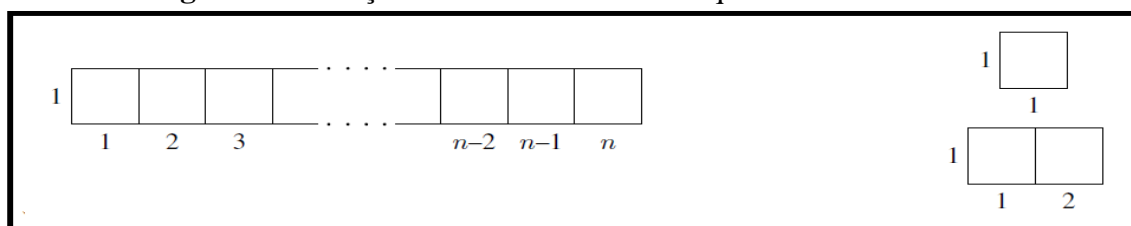
Em nossos trabalhos registramos por exemplo, o caso das sequências numéricas recorrentes (ALVES, 2017; ALVES & CATARINO, 2022) e que, como caso emblemático, registramos a Sequência de Fibonacci que, por exemplo, Gullberg (1997) explica que a maioria dos autores de compêndios de História da Matemática destinam seu tempo, de forma demasiada, para a discussão do modelo de reprodução dos “coelhos imortais”, em detrimento dos objetos matemáticos intrinsecamente envolvidos.

**Figura 1** – Descrição anedótica sobre os “coelhos imortais” segundo Gullberg (1997)



**Fonte:** Gullberg (1997, p. 23).

Por outro lado, quando examinamos um processo histórico, epistemológico e evolutivo do modelo de Fibonacci (OLIVEIRA, 2018) que, grosso modo, envolve considerar as inúmeras formas de generalização e de especialização da Sequência recorrente descrita para seguinte relação ( $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ,  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ), constatamos uma profusão de aplicações e de abordagens que confirmam o vigor matemático do problema lacônico, envolvendo a reprodução de pares de coelhos. Para exemplificar, recordamos o trabalho de Benjamin & Quinn (2003) que, por intermédio de elementos da Combinatória, possibilita, por exemplo, verificar certas propriedades aritméticas, originadas da noção de um  $n$  – tabuleiro unidimensional.

**Figura 2** – A noção de  $n$  – tabuleiro e a Sequência de Fibonacci.

Fonte: Benjamin & Quinn (2003, p. 3).

### Sobre a Sequência de Jacobsthal

Ainda com referência a Figura 1, podemos constatar inúmeras propriedades inesperadas em relação a Sequência de Fibonacci e, além disso, outras sequências numéricas recorrentes. Com efeito, na Tabela 1, para exemplificar, indicamos alguns valores numéricos correlacionados com a Sequência de Fibonacci e a Sequência de Jacobsthal. Logo na sequência, apresentamos duas definições importantes.

**Tabela 1:** Sequência de Fibonacci e de Jacobsthal: alguns valores numéricos.

$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	...	$F_n$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...	...
$J_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$	$J_7$	$J_8$	$J_9$	$J_{10}$	$J_{11}$	$J_{12}$	...	$J_n$
1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	1365	...	...	...

Fonte: Elaboração do autor.

**Definição 1:** A Sequência de Jacobsthal é definida pela seguinte relação de recorrência  $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ , e com os valores iniciais indicados por  $J_0 = 1, J_1 = 1$ .

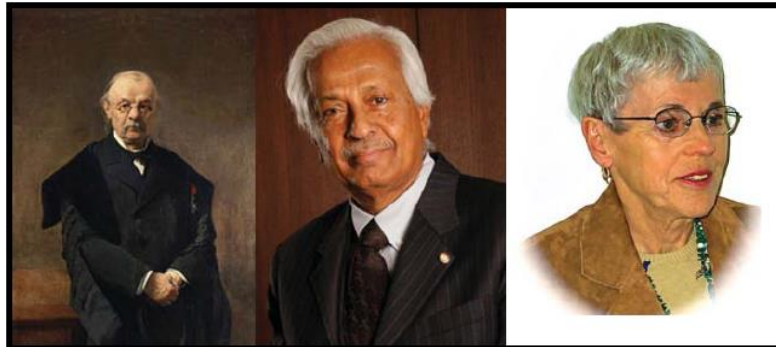
**Definição 2:** A Sequência polinomial de Jacobsthal é definida pela seguinte relação de recorrência  $J_n(x) = J_{n-1}(x) + x \cdot J_{n-2}(x)$ , e com os valores iniciais  $J_0(x) = 1, J_1(x) = 1$ .

As definições 1 e 2 confirmam um processo evolutivo e de generalização sobre a Sequência de Fibonacci e, acrescentamos, processo semelhante no caso da Sequência polinomial de Jacobsthal, como depreendemos a seguir. Por fim, na figura 3, com amparo das reflexões de Koshy (2019), registramos o matemático alemão Eugène Charles Catalan (1814–1894), o matemático indiano M.N.S. Swamy e, por fim, Marjorie Bicknell-Johnson que, em momentos distintos da História, contribuíram para o avanço sobre a pesquisa em torno de sequências, como depreendemos a seguir.

Os famosos polinômios de Fibonacci foram originalmente estudados começando em 1883 pelo matemático belga Eugene C. Catalan, e mais tarde pelo alemão matemático Ernst Jacobsthal (1882-1965). Eles foram

investigados por M.N.S. Swamy na Universidade de Saskatchewan, Canadá. Igualmente famosos, os polinômios de Lucas foram estudados a partir de 1970 por Marjorie Bicknell da Santa Clara, Califórnia. (KOSHY, 2019, p. 2).

**Figura 3** – Matemáticos que contribuíram, de forma pioneira, no estudo de seqüências.

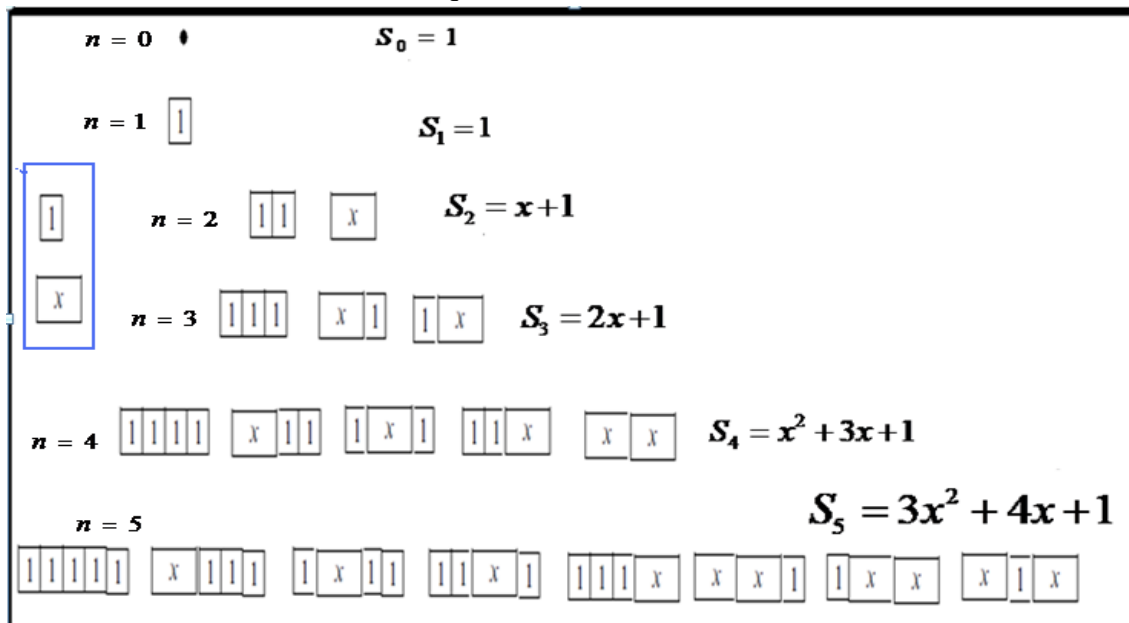


Fonte: Koshy (2019, p. 3).

### Propriedades combinatórias do tabuleiro $1 \times n$ e a Sequência de Jacobsthal

No caso do tabuleiro relacionado com a Sequência de Jacobsthal, de forma preliminar, vamos considerar um tabuleiro unidimensional do tipo  $1 \times n$ , com as seguintes peças fixadas: quadrados  $1 \times 1$   $\boxed{1}$  com peso 1, dominós  $1 \times 2$   $\boxed{x}$ , com peso  $x$ . Vejamos alguns exemplos na Figura 4.


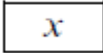
**Figura 4** – Representação de uma tabuleiro  $1 \times n$  e os ladrilhos relacionados com a Sequência de Jacobsthal.


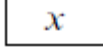


Fonte: Adaptado pelo autor.

A seguir, na figura acima, associaremos o peso definido por  $S_n$  para cada tabuleiro, considerando os ladrilhamentos descritos por intermédio das peças

previamente definidas. Assim, com amparo do pensamento de Koshy (2019), definimos que  $S_0 = 1$ . E, para os tabuleiros correspondentes, determinaremos os seguintes pesos:  $S_1 = 1, S_2 = x + 1, S_3 = 2x + 1, S_4 = x^2 + 3x + 1, S_5 = 3x^2 + 4x + 1$ , etc. Com origem nos casos particulares acima, em que constatamos alguns argumentos combinatórios e heurísticos, por envolver uma ação de preenchimento de ladrilhos nas peças de um tabuleiro, apresentaremos o seguinte teorema 1.

**Teorema 1:** Considerando quadrados  $1 \times 1$   com peso 1, dominós  $1 \times 2$  , com peso  $x$ . Então a soma dos pesos de comprimento  $n$ , então  $S_n = J_{n+1}(x)$ , para  $n \geq 0$ . (KOSHY, 2019)



Demonstração: Vamos definir o termo  $S_n(x)$  a soma dos pesos correspondentes aos ladrilhos de comprimento  $n$ , então  $S_n(x) = J_n(x)$ , aonde  $J_n(x)$  representa um polinômio de jacobsthal. De imediato, vemos que ocorrem  $S_0(x) = 1 = J_1(x)$ ,  $S_1(x) = 1 = J_2(x)$ . Por fim, de acordo com o pensamento de Koshy (2019), para um tabuleiro qualquer de comprimento  $n$ , examinaremos dois casos: (a) o caso em que termina em um , com peso 1; (b) o caso em que termina em um , com peso  $x$ . No caso (a), para considerarmos todas as contribuições dos pesos, na condição em que um ladrilho qualquer possua, de forma fixa, no seu final, um quadrado  $1 \times 1$ , determinamos que  $1 \cdot S_{n-1}(x)$ . No caso (b), para considerarmos todas as contribuições dos pesos, na condição em que um ladrilho qualquer possua, de forma fixa, no seu final, um dominó  $1 \times 2$ , determinamos que  $x \cdot S_{n-2}(x)$ . Considerando que se tratam de casos independentes, por um princípio da contagem, para considerar todos os casos, passamos a considerar a soma total  $1 \cdot S_{n-1}(x) + x \cdot S_{n-2}(x)$ . Todavia, examinando as condições iniciais  $S_0(x) = 1 = J_1(x)$ ,  $S_1(x) = 1 = J_2(x)$ , depreendemos que trata-se, justamente da recorrência de Jacobsthal, isto é,  $S_{n-1}(x) + xS_{n-2}(x) = J_n(x) + xJ_{n-1}(x) = J_{n+1}(x)$ . Assim, determinamos que  $S_n = J_n(x)$ , para  $n \geq 0$ . ■


Antes de finalizarmos a seção atual, cabe registrar uma forma de extensão da Sequência de Jacobsthal e que indicamos na tabela inicial e, para o caso particular da variável  $x = 1$ , podemos determinar, por intermédio das representações dos ladrilhamentos contidos na figura anterior, os termos correspondentes presentes na Sequência de Jacobsthal, que conhecemos por 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, etc. De modo geral,

quando comparamos a Definição 2 percebemos que os termos determinados na figura 4 correspondem os termos que podemos escrever, por intermédio da relação de recorrência  $J_n = J_{n-1} + x \cdot J_{n-2}$ , e com os valores iniciais  $J_0 = 1, J_1 = 1$ .


### Propriedades combinatórias e o tabuleiro $2 \times n$ e a Sequência de Jacobsthal

No caso do tabuleiro relacionado com a Sequência de Jacobsthal, de forma preliminar, vamos considerar um tabuleiro unidimensional do tipo  $2 \times n$ , com as

seguintes peças fixadas: dominós horizontais  $1 \times 2$   e na verticais , ambos

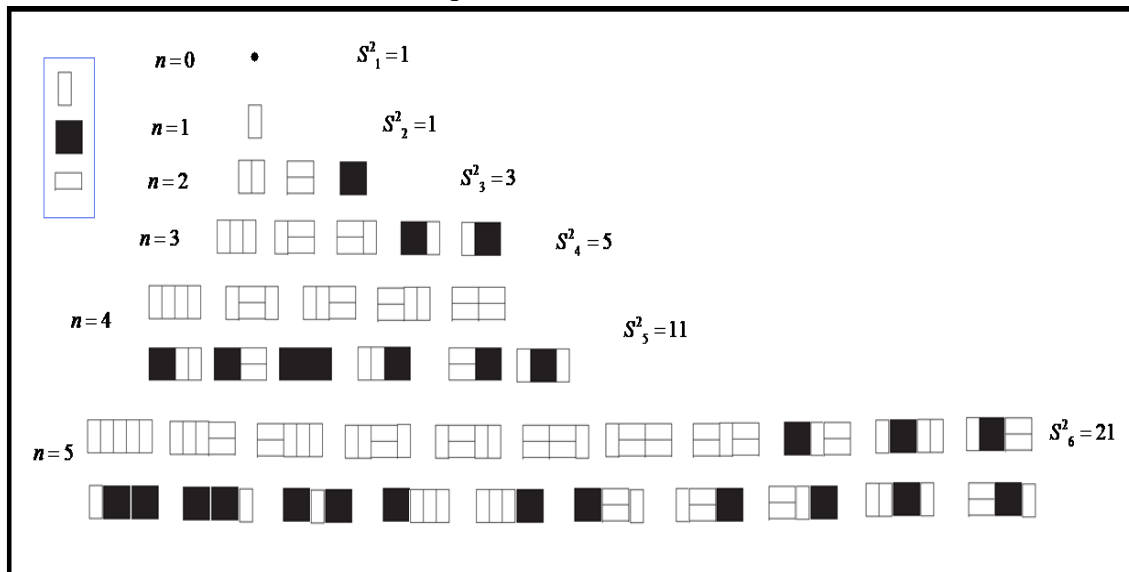
com peso 1, quadrados pretos  $2 \times 2$  , com peso  $x$ . A seguir, na figura abaixo, associaremos o peso definido por  $S_n^2$  para cada tabuleiro, considerando os ladrilhamentos descritos por intermédio das peças previamente definidas. Assim, com amparo do pensamento de Koshy (2019), definimos que  $S_0 = 1$ . E, para os tabuleiros correspondentes, determinaremos as seguintes relações aritmético-algébricas:  $S_0 = 1 = J_1, S_1 = 1 = J_2, S_2 = 3 = J_3, S_3 = 5 = J_4, S_4 = 11 = J_5, S_5 = 21 = J_6$ , etc.

Cabe observar, no que diz respeito ao leitor mais atento, a partir do exame de alguns casos particulares, podemos depreender, por intermédio de um exercício de visualização, que ocorrem apenas duas formas de ladrilhos, quando olhamos para o final. Ocorrem ladrilhos que terminam com retângulos verticais e, neste caso, determinam sub-ladrilhos de comprimento  $n-1$ . Por outro lado, podem ocorrer sub-

ladrilhos de comprimento  $n-2$  que terminam em quadrados pretos  $2 \times 2$   ou

dominós agrupados da forma . Vejamos alguns exemplos na Figura 5.

**Figura 5** – Representação de um tabuleiro  $2 \times n$  e os ladrilhos relacionados com a Sequência de Jacobsthal.








**Fonte:** Adaptado pelo autor.

Por exemplo, com arrimo da figura anterior, quando consideramos os ladrilhos do tabuleiro para  $n=4$ , podemos contar 5 ladrilhos que com retângulos verticais, 3 ladrilhos que terminam em quadrados pretos, 3 ladrilhos que terminam com retângulos horizontais, isto é,  $n=4 \therefore 5 + 2 \cdot 3 = 11 = J_4$ . Com base nesse exame particular, vamos generalizar o respectivo argumento de contagem dos ladrilhos que preenchem um tabuleiro  $2 \times n$ . Vejamos a demonstração dos argumentos anteriores!

**Teorema 2:** Seja um tabuleiro  $2 \times n$  e considerando os dominós horizontais

$1 \times 2$  e na verticais , ambos com peso 1, quadrados pretos  $2 \times 2$  , com peso  $x$ . Então a soma dos pesos de comprimento  $n$ , então  $S_n^2 = J_{n+1}$ , para  $n \geq 0$ . (KOSHY, 2019).

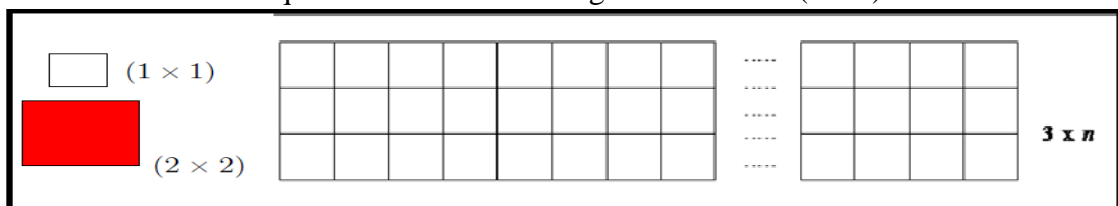
Demonstração: Vamos considerar um tabuleiro  $2 \times n$ . Denotaremos por  $S_n^2$  o número de formas diferentes de ladrilhos deste tabuleiro. De imediato, nos casos  $n=0,1$  definiremos que  $S_0^2 = 1 = J_1, S_1^2 = 1 = J_2$ . Nos casos seguintes, podemos examinar as relações numéricas exibidas na figura anterior. Agora, considerando um ladrilhos arbitrário qualquer, que denotaremos por  $T$ , vamos considerar os seguintes casos: (i) quando termina com um dominó vertical ; (ii) quando termina com um quadrado

; (iii) quando termina com a seguinte configuração . Reparemos que, quando não ocorre o caso (i), teremos apenas duas possibilidades que ocorrem. Podem ocorrer sub-ladrilhos da forma *sub-ladrilhos* <sub>$n-2$</sub>   ou sub-ladrilhos da forma *sub-ladrilhos* <sub>$n-2$</sub>  . Assim, desde que as configurações anteriores são independentes, a contribuição total final de todos os casos, por um princípio aditivo e contagem, resulta na expressão  $2 \times S^2_{n-2}$ . E, acrescentando-se os casos do item (i), para os casos de sub-ladrilhos da forma *sub-ladrilhos* <sub>$n-1$</sub>  , determinaremos que:  $1 \times S^2_{n-1} + 2 \times S^2_{n-2} = S^2_{n-1} + 2S^2_{n-2}$ . Finalmente, desde que  $S^2_0 = 1 = J_1, S^2_1 = 1 = J_2$  e a expressão anterior corresponde ao caso e mesma regra de recorrência da sequência de Jacobsthal, determinamos que  $S^2_n = J_{n+1}$ , para  $n \geq 0$ . ■

**Propriedades combinatórias do tabuleiro  $3 \times n$  e a Sequência de Jacobsthal**

Na figura 6 indicamos nosso tabuleiro e, para efeito notacional, denotaremos por  $j_n$  para o nº de ladrilhamentos possíveis e, em nossa discussão sobre a última sequência empregaremos os argumentos indicados por Craveiro (2004) em sua tese. A partir da definição mais rigorosa do nosso  $3 \times n$  passamos a verificar alguns casos particulares. Com efeito, Craveiro (2004) passa a considerar os seguintes tabuleiros particulares na figura a seguir:  $3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4$ . De imediato, a partir de nossa definição do  $j_n$  para o nº de ladrilhamentos em um tabuleiro  $3 \times n$ , a autora consegue fazer corresponder as seguintes relações  $j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 5, j_4 = 11$ .

**Figura 6** – Representação de um tabuleiro  $3 \times n$  e ladrilhos relacionados com a Sequência de Jacobsthal segundo Craveiro (2004)

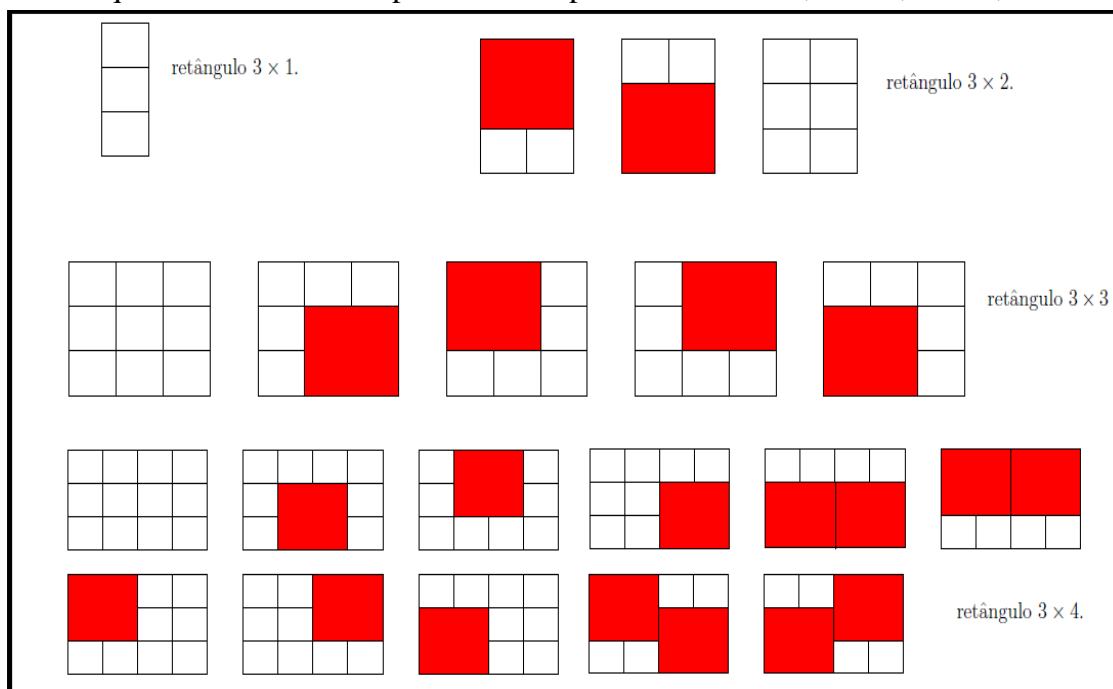


Fonte: Craveiro (2004).



Na figura 7 Craveiro (2004) fornece alguns exemplos particulares do comportamento de ladrilhamentos, quando examinamos os caso de tabuleiros do tipo  $3 \times 1$ ,  $3 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $3 \times 4$ , etc, como visualizamos na figura 7.

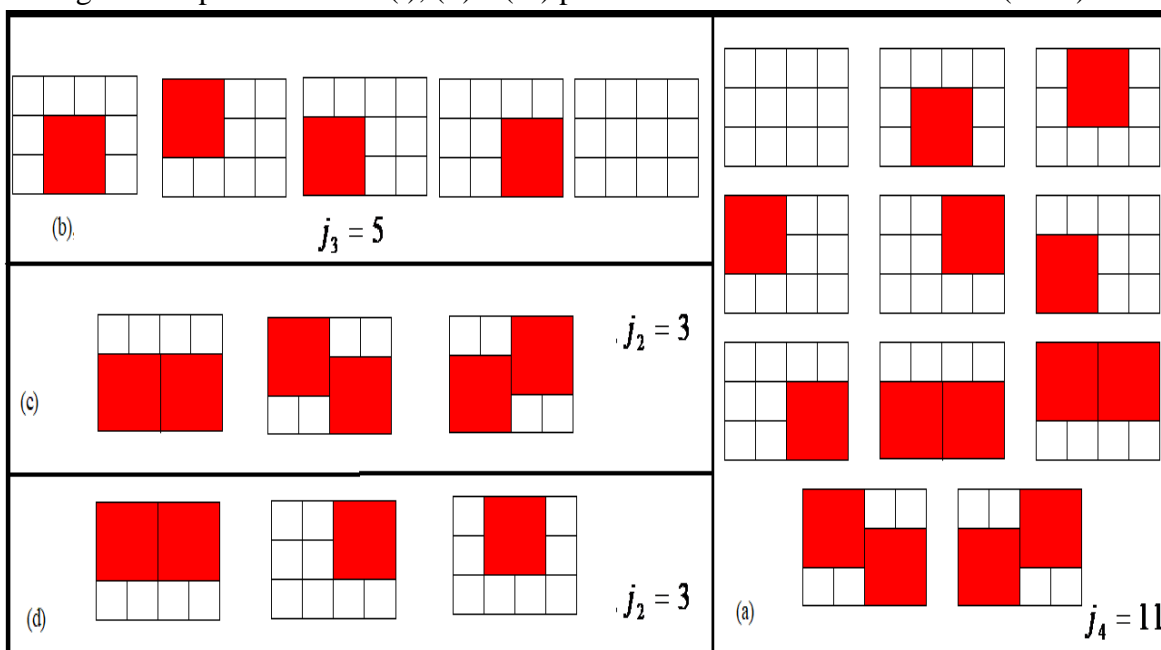
**Figura 7** – Representação de um tabuleiro  $3 \times n$  e os ladrilhos relacionados com a Sequência de Jacobsthal para os casos particulares  $3 \times 1$ ,  $3 \times 2$ ,  $3 \times 3$ , etc.



**Fonte:** Craveiro (2004).

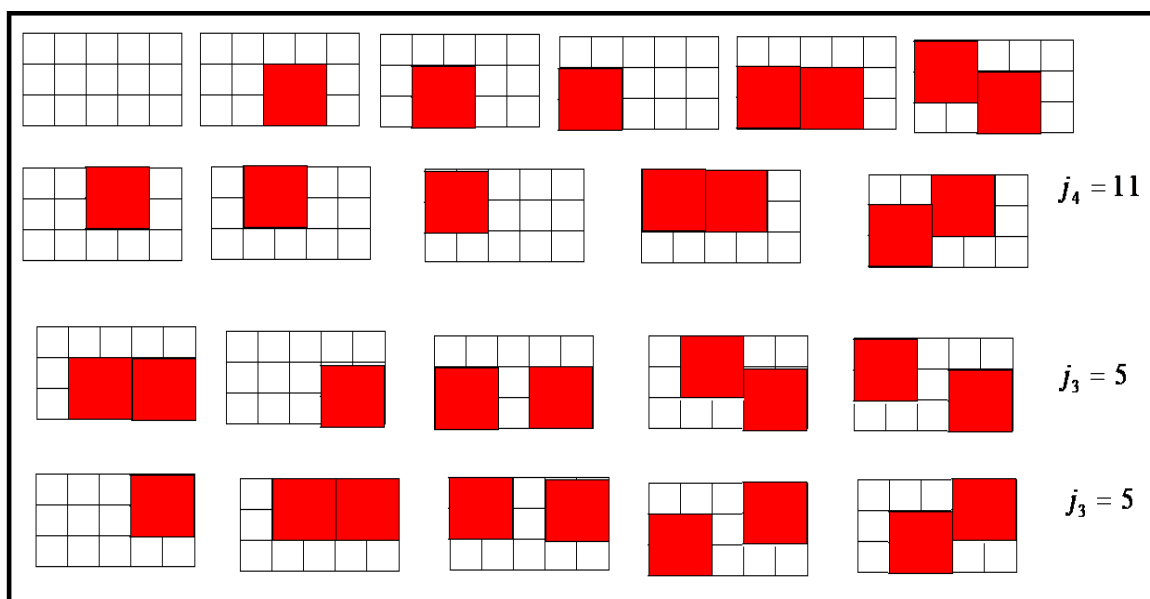
Na figura 8 Craveiro (2004) descreve algumas relações heurísticas, fundamentadas no exame imediato das configurações particulares, objetivando a determinação de relações aritméticas e sua ulterior generalização. Na figura 8 visualizamos algumas relações particulares que a autor correlaciona aos números  $J_n$ .

**Figura 8** – Representação de um tabuleiro  $3 \times n$  e identificação dos casos de ladrilhos segundo as possibilidades (i), (ii) e (iii) previstas no Teorema de Craveiro (2004)





Fonte: Adaptado pelo autor.

**Figura 9** – Representação de um tabuleiro e os ladrilhos relacionados com a Sequência de Jacobsthal.





Fonte: Adaptado pelo autor.


De forma particular, por um exame visual nos ladrilhamentos contidos na Figura 8, podemos constatar que a quantidade de ladrilhos nos itens (b), (c) e (d), quando somados, confirmam a propriedades aritmética de que  $j_4 = 11 = 5 + 2 \cdot 3$  para o total de ladrilhamentos que divisamos na Figura 8 – (a). Visando um acréscimo de rigor matemática, enunciaremos nosso último teorema.

**Teorema 3:** Considerando um tabuleiro  $3 \times n$ , com apenas dois tipos de ladrilhos, um ladrilho  $1 \times 1$  na cor branca  e um ladrilho  $2 \times 2$  na cor vermelha . Então,  $j_n$  para o nº de ladrilhamentos possíveis para o tabuleiro é determinado por  $j_n = J_n, n \geq 1$ . (KOSHY, 2019, CRAVEIRO, 2004).

Demonstração: Recorrendo aos argumentos empregados por Craveiro (2004), vamos considerar três conjuntos, a saber: (i) um conjunto de ladrilhamentos  $3 \times n$  (com ladrilhos dos dois tipos definidos  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$ ) e que contém, pelo menos um

ladrilhamento (à direita)  $3 \times 1$  e com ladrilhos de cor branca  $1 \times 1$  ; (ii) um conjunto de ladrilhamentos  $3 \times n$  (com ladrilhos dos dois tipos definidos  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$ ) e que contém, pelo menos um ladrilhamento (à direita)  $3 \times 2$  com dois

ladrilhos de cor branca e um vermelha ; (iii) um conjunto de ladrilhamentos  $3 \times 2$  (com ladrilhos dos dois tipos definidos  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$ ) e que contém, pelo menos um

ladrilhamento (à direita)  $3 \times 2$  com dois ladrilhos de cor branca e um vermelha .

Após considerar as três possibilidades particulares de ladrilhamentos, como indicados nos itens (i), (ii) e (iii), a autora explica que sendo  $j_n$  o número de ladrilhamentos com as peças indicadas no enunciado do teorema. Definiremos que  $j_0 = 1 = J_1$ . No caso, seguinte, pelo exame da figura 7, no caso  $3 \times 1$ , teremos apenas uma forma de ladrilhar, isto é, vale que  $j_1 = 1 = J_2$ . No caso  $3 \times 1$  encontramos facilmente que  $j_2 = 3 = J_3$ , de acordo com a figura 7. Mais uma vez, com base na mesma figura, por uma contagem direta, teremos que  $j_3 = 5 = J_4$  e, logo a seguir, constatamos que  $j_4 = 11 = J_5$ . Por fim, Craveiro (2004) emprega um expediente semelhante ao de Koshy (2019), na medida em que, a partir de um exame visual, podemos discriminar para o item (i) o número  $j_{n-1}$  e, para os demais casos, concluímos que (ii) e (iii) possuem a mesma quantidade de elementos, que denotaremos por  $j_{n-2}$ . Como tratam-se de configurações independentes e, por um princípio aditivo, somam-se todas as contribuições da forma:  $j_n = j_{n-1} + 2 \times j_{n-2}$ , com os termos iniciais  $j_0 = 1 = J_1$  e  $j_1 = 1 = J_2$ . Mas, a autora conclui observa que esta relação de recorrência fornece os números de Jacobsthal, isto é,  $j_n = J_n, n \geq 1$ . ■

### Considerações Finais

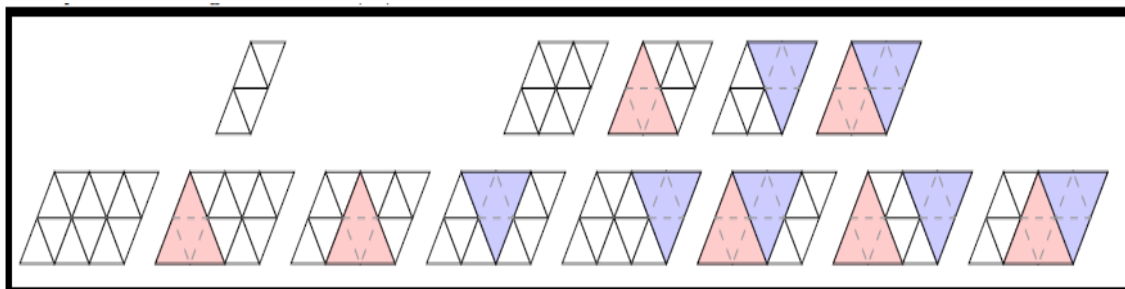
Nas seções anteriores desenvolvemos algumas propriedades elementares e essencialmente combinatórias intrinsecamente relacionadas com a sequência de Jacobsthal e suas múltiplas representações via tabuleiros unidimensionais e

bidimensionais, das formas particulares  $1 \times n$ ,  $2 \times n$  e  $3 \times n$ . Por intermédio de um exame de determinados compêndios de História da Matemática, em nossos trabalhos (ALVES, 2017; ALVES & CATARINO, 2022) podemos constatar um expediente que costuma se ornar de uma retórica acadêmica distinguida, todavia, que relega, quase de forma recorrente, os modelos matemáticos e objetos matemáticos ao segundo plano. Por conseguinte, se consolida uma consequência nefasta que resulta em reforçar uma compreensão de se estudar a História de forma apartada, cada vez mais, da Matemática, de *per si*, desconsiderando-a como “fio condutor” de todo um processo epistemológico – evolutivo.

Nesses termos, buscamos apresentar para o leitor alguns exemplos originados da noção de tabuleiro que, de modo heurístico e intuitivo, estimula o componente da visualização e da intuição matemática, ao passo que proporciona a emergência de relações aritméticas, algébricas e geométricas. Decerto que, o traço residual envolvendo a parte histórica pode ser compreendido, na medida em que, considerando desde os seus primórdios, com a proposição dos problemas dos coelhos, envolvendo Fibonacci e, séculos depois, com o estudo da Sequência de Jacobsthal, por exemplo, permite uma compreensão evolutiva e não estática do saber matemático, cuja interface de aplicações encontra na Combinatória, exemplos bastante significativos.

Por fim, quando objetivamos a formação de professores de Matemática e buscamos fortalecer seus componentes e suas habilidades profissionais, nunca se pode negligenciar que a principal “vitrine” de sua atuação profissional se consubstancia em “sala de aula” e, no interior da “sala de aula” sua atuação e performance, suas concepções e natureza das interações com o estudante se verificará condicionada e/ou afetada pelo saber matemático. Ademais, mesmo reconhecendo, de forma indubitável, a importância do saber histórico da Matemática, um expediente que não se esforça em produzir um viés sobre sua atualidade e evolução epistemológica e do interesse contemporâneo dos matemáticos profissionais, perde a oportunidade de demonstrar e estimular uma compreensão globalizante do mesmo que, quando consideramos o caso particular, sobre a noção de tabuleiro e combinatória, preserva o vigor da pesquisa atual, exemplificamos um último caso, descrito no trabalho de Bodeen *et al.* (2014).

**Figura 10** – Representação de um tabuleiro triangular segundo Bodeen *et al.* (2014)



Fonte: Bodeen *et al.* (2014).

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio e suporte financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

## Referências

- ALVES, F. R. V. (2017). Fórmula de de Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci - SGF. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, nº 1, 1-16.
- ALVES, F. R. V. & CATARINO, P. M. (2022). A Sequência de Padovan ou de Coordonier, **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, nº 1, 1-16.
- BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. (2003). **Proofs and Really Count: the Art of Combinatorial Proof**. New York: American Association.
- BODEEN, J. et al. (2014). Tiling a strip with triangles. **The Electronic Journal of Combinatorics**. v. 21, nº 1, 1 – 7. Disponível em: <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v21i1p7>
- CRAVEIRO, I. M. (2004). **Extensões e Interpretações Combinatórias para os Números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal**. (tese de doutorado). Campinas: Unicamp.
- GULLBERG, (1997). **Mathematics: from the birth of numbers**. New York: Norton.
- KLEINER, I. (2012). **Excursions in the History of Mathematics**. New York: Springer.
- KOSHY, T. (2019). **Fibonacci and Lucas Numbers and Applications, vol 2**. New York: John Willey and Sons.
- KOSHY. T. (2011). **Fibonacci and Lucas Numbers and Applications, vol 1**. New York: John Willey and Sons.

*Recebido em:* 15 / 06 / 2022

*Aprovado em:* 20 / 06 / 2022