



TEORIA DOS JOGOS: RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

THEORY OF GAMES: REPORT OF AN EXPERIENCE IN ELEMENTARY SCHOOL

André Tavares Gonçalves¹
Mauricio Reis e Silva Junior²
Wálmisson Régis de Almeida³

Resumo

O artigo relata uma experiência prática sobre a Teoria dos Jogos e a sua aplicabilidade no ensino de Matemática nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. A ideia central foi identificar o poder de percepção dos alunos em detectar a melhor estratégia, baseada em tomadas de decisão, que os fizessem ganhar o jogo elaborado nesse contexto. A proposta foi realizada sem que eles tivessem conhecimento prévio da teoria que envolve uma ação estratégica. Foi apresentada uma matriz, com pares ordenados, baseados em ganhos e perdas. Os estudantes foram escolhidos aleatoriamente, dois a dois, e decidiram, através de análise da estrutura matricial e estratégias pessoais, os valores referentes às linhas e colunas, com o objetivo de maximizar ganhos e minimizar perdas. Os resultados obtidos na experiência vivenciada mostraram que os alunos se envolveram de forma diferenciada, mas com boa assimilação geral dos elementos relacionados à Teoria dos Jogos.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. Jogos matemáticos. Tomada de decisão.

Abstract

The article reports a practical experience on Theory of Games and its applicability in the teaching of Mathematics in the 6th and 7th years of Elementary School. The main idea was to identify the perceptive power of the students in detecting the best strategy, based on decision making, that made them win the game elaborated in that context. The proposal was made without them having prior knowledge of the theory that involves a strategic action. A matrix was presented, with ordered pairs, based on gains and losses. The students were randomly chosen, two by two, and decided, through analysis of the matrix structure and personal strategies, the values referring to the rows and columns, in order to maximize gains and minimize losses. The results obtained in the lived experience showed that the students were involved in a differentiated way, but with a good general assimilation of the elements related to the Theory of Games.

Keywords: Theory of Games. Mathematical games. Decision making.

¹ Mestrado Profissional em Matemática pela UFSJ (Capes/ProfMat); professor da Faculdade Promove de Sete Lagoas, Sete Lagoas, MG, Brasil. E-mail andresetelagoas@yahoo.com.br

² Doutorado em Física pela UFMG; professor efetivo da Universidade Federal de São João del Rei/UFSJ, Ouro Branco, MG, Brasil, E-mail mreis@ufsj.edu.br

³ Mestrado Profissional em Matemática pela UFSJ (Capes/ProfMat); professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais/IFMG, São João Evangelista, MG, Brasil. E-mail walmisson.almeida@ifmg.edu.br

Introdução

Este trabalho aborda o uso dos fundamentos da Teoria dos Jogos, aplicados sob a proposta de uma atividade lúdica para alunos do Ensino Fundamental dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, em idade de 11 a 13 anos, de uma escola da rede privada de Sete Lagoas/MG. A motivação de um estudo desta natureza centra-se no entendimento de que o avanço do conhecimento matemático e o raciocínio lógico dos alunos devem ser iniciados já nas primeiras séries dos anos finais do Ensino Fundamental. A Teoria dos Jogos é um interessante meio para estimular o uso desses princípios para solucionar problemas.

O estudo desenvolvido tem natureza qualitativa e é composto por uma atividade prática de oficina de Matemática, com a finalidade de aproximar os alunos do Ensino Fundamental da Teoria dos Jogos, e de uma abordagem teórica sobre o tema após a realização da oficina. Como instrumento de coleta de dados, optou-se pela aplicação de um desafio matemático com um propósito pré-estabelecido: escolher a melhor estratégia para maximizar ganhos e minimizar perdas, numa situação envolvendo duas empresas hipotéticas X e Y (com os alunos jogadores as representando).

O mesmo jogo foi aplicado para alunos do 6º e do 7º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de observar, comparar e analisar o desenvolvimento de cada uma das turmas no jogo em si, as associações lógicas com as matérias já estudadas e o nível matemático dos alunos de cada ano escolar, uma vez que há diferenças consideráveis nas disciplinas estudadas do 6º para o 7º ano.

Pretende-se confirmar, neste trabalho, que a Teoria dos Jogos pode ser incorporada à prática educativa do professor de Matemática no Ensino Fundamental. Seja no momento em que propõe ao aluno a reflexão na tomada de decisão ou num momento de interação dos alunos com os seus colegas, que participarão de decisões coletivas que envolvam cálculos matemáticos.

História da Teoria dos Jogos

Na primeira metade do século XX, principalmente até os anos 1940, esteve em pleno desenvolvimento a área de Pesquisa Operacional, da qual a Teoria dos Jogos faz parte. Esta surgiu para atender demandas industriais e militares com objetivos de análise de viabilidade, maximização de resultados positivos e minimização de perdas. Assim, a Pesquisa Operacional

trata do uso de otimização em contextos gerenciais. Através disso, é possível construir um processo decisório tão objetivo como se queira.

Entretanto, ficava aberta a questão sobre como tomar uma decisão gerencial objetiva quando há outros participantes envolvidos, cujas escolhas podem afetar diretamente o resultado do processo. Em particular, tais problemas surgiam em situações em que havia conflito de interesse ou quando dois ou mais grupos ou entes deveriam tomar decisões baseadas no que outros poderiam ter que tomar. Na mesma época, estava sendo desenvolvida a formalização matemática da micro e macroeconomia.

Nesse contexto, em 1944, os matemáticos John Von Neumann (1903-1957) e Oskar Morgenstern (1902-1977) lançaram o livro *Theory of Games and Economic Behavior* (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico), no qual as escolhas racionais e os acontecimentos sociais eram interpretados a partir do uso de modelos de jogos de estratégia, observando-se a tomada de decisão que resultasse em maior retorno, ou seja, que lhes fossem mais vantajosas, de acordo com um cálculo acerca de sua probabilidade e satisfação máxima de sua utilidade (VITORINO FILHO; SACOMANO NETO; ELIAS, 2009).

De acordo com a narrativa dos autores, a teoria desenvolvida se embasava em fortes alicerces matemáticos e foi proposta uma nova maneira de formalizar os princípios das ciências sociais, a partir do comportamento e de preferências humanas, sem precisar se reduzir a outros domínios, como a Biologia e a Física (VITORINO FILHO; SACOMANO NETO; ELIAS, 2009). Neumann e Morgenstern (1944) definiram a Teoria dos Jogos como uma ciência da estratégia, com o intuito de determinar matemática e logicamente as atitudes dos jogadores.

Ainda sobre o desenvolvimento da Teoria dos Jogos, em 1949, aos 21 anos, John Forbes Nash (1928-2015) escreveu uma tese de doutoramento que, 45 anos mais tarde, lhe daria o Prêmio Nobel de Economia. O trabalho, conhecido como o "Equilíbrio de Nash" iria revolucionar o estudo da estratégia econômica. Nash aplicou os seus avanços na Teoria dos Jogos para analisar estratégias diplomáticas e militares.

Em 1994 recebeu, juntamente com John Charles Harsanyi e Reinhard Selten, o Prêmio Nobel da Economia pelo seu trabalho em Teoria dos Jogos (*Theory of Non-cooperative Games*). Na análise feita em torno das concepções dos criadores da Teoria dos Jogos:

[...] Para alguns jogos, a teoria pode indicar uma "solução" para o jogo, isto é, a melhor maneira a proceder para cada pessoa envolvida. No entanto, na maioria dos jogos que descrevem problemas reais, ela só nos fornece uma visão geral da

situação, descartando algumas “jogadas” que não levarão a bons resultados. (VITORINO FILHO; SACOMANO NETO; ELIAS, 2009, p.08)

A Teoria dos Jogos é uma teoria matemática criada para se modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais “tomadores de decisão” interagem entre si. Ela fornece a linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo (SARTINI et al., 2004).

A teoria dos jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito. O elemento básico em um jogo é o conjunto de jogadores que dele participam. Cada jogador tem um conjunto de estratégias. Quando cada jogador escolhe sua estratégia, temos então uma situação ou perfil no espaço de todas as situações (perfis) possíveis. Cada jogador tem interesse ou preferências para cada situação no jogo. Em termos matemáticos, cada jogador tem uma função utilidade que atribui um número real (o ganho ou payoff do jogador) a cada situação do jogo. (SARTINI et al., 2004, p.06)

Para Fiani (2006), a Teoria dos Jogos ajuda a entender tecnicamente o processo de decisão de jogadores que interagem entre si, observada a situação do jogo em que estão envolvidos, com ações lógicas. Sartini et al.(2004, p.09) apontam que “uma solução de um jogo é uma prescrição ou precisão sobre o resultado do jogo”. Basicamente, esta prescrição sobre o resultado do jogo diz respeito a atribuir um valor para o jogo e determinar as estratégias válidas a partir da exclusão de estratégias que não tragam resultado interessante.

Principais definições para a atividade

Jogos são situações nas quais há interação estratégica entre dois ou mais jogadores e o resultado final para cada um desses é determinado pelo conjunto de estratégias tomadas por eles. *Agentes* ou *jogadores* são indivíduos ou grupo de indivíduos que participam das situações estratégicas e cujas decisões e interações podem influenciar o resultado do jogo. *Estratégia* é um conjunto de ações programáveis, adotadas por um jogador, de modo a obter determinado resultado final para o jogo.

Um jogo é considerado de *informação completa* se todas as estratégias disponíveis forem totalmente conhecidas por todos os jogadores. Além disso, um *jogo de soma zero* entre dois jogadores é aquele em que o ganho de um jogador é exatamente o que o outro perde ou deixa de ganhar. Um jogo de informação completa, de soma zero, entre dois jogadores, cada qual com um conjunto discreto e finito de estratégias, é caracterizado por dois conjuntos de estratégias: $(I_1; I_2; \dots; I_m)$, do jogador *I* e $(II_1; II_2; \dots; II_n)$ do jogador *II* e por uma matriz

$m \times n$ de recompensas (*payoff*) cujos elementos g_{ij} indicam a recompensa para o jogador I quando este escolhe estratégia I_i e o jogador II escolhe estratégia II_j .

Quadro 1 – Soluções para jogo de duas pessoas com soma zero

	Jogador II			
Jogador I	II_1	II_2	\dots	II_n
I_1	g_{11}	g_{12}	\dots	g_{1n}
I_2	g_{21}	g_{22}	\dots	g_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
I_m	g_{m1}	g_{m2}	\dots	g_{mn}

Fonte: Adaptado de Thomas (2003).

Quando um jogador escolhe entre suas estratégias, ele não sabe quais estratégias os outros jogadores escolherão e, por isso, não tem certeza quanto às consequências de suas escolhas. Para analisar as decisões dos jogadores em um jogo, seria útil então ter uma teoria de tomada de decisão que permita expressar as preferências de um agente sobre escolhas com consequências incertas em termos de sua atitude perante as consequências.

Na execução da atividade, espera-se que os resultados escolhidos pelos alunos converjam para a denominada “solução ótima”. Trata-se de um posicionamento conservador dos jogadores, em que estes tentam minimizar suas perdas, através da escolha de uma entre as estratégias que sugere ser a "menos pior", em condições analíticas de suas possibilidades. A essa solução dá-se o nome de *ponto de sela*.

Estudo de caso

Aos alunos foi repassado que o desafio matemático tinha como propósito pré-estabelecido escolher a melhor estratégia para maximizar ganhos e minimizar perdas, numa situação envolvendo duas empresas hipotéticas X e Y. Com a turma organizada para a atividade, foi exposta a intenção do jogo, conforme expressa o Quadro 2, a seguir:

Quadro 2 – Apresentação da atividade proposta em sala de aula

Estratégias de X	Estratégias de Y		
	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	(-300, +300)	(+200, -200)	(+400, -400)
X_2	(+700, -700)	(-200, +200)	(-100, +100)
X_3	(+800, -800)	(+1000, -1000)	(+700, -700)
X_4	(+500, -500)	(+800, -800)	(+600, -600)

Fonte: Adaptado de Moreira (2007).

Duas empresas, X e Y , disputando um mercado como concorrentes, tinham as estratégias expressas no Quadro 2. As estratégias da empresa X estavam nas linhas X_1 , X_2 , X_3 e X_4 e as estratégias da empresa Y estavam nas colunas Y_1 , Y_2 e Y_3 . O primeiro valor dentro de cada cédula sempre se referia aos ganhos ou perdas da empresa X e o segundo sempre se referia aos ganhos ou perdas da empresa Y . A meta de cada empresa era maximizar ganhos ou minimizar perdas ao final do acúmulo de jogadas, que depende da quantidade de pares de alunos envolvidos.

A cada rodada, dois alunos seriam chamados ao quadro e jogariam por alguma empresa, escolhida de forma aleatória. A escolha da estratégia de cada aluno pelas empresas X e Y seria dita em voz alta e escrita no quadro por eles, com respostas simultâneas. O professor registraria no quadro a jogada de cada um, e estes justificariam o porquê da escolha, sendo essa justificativa aberta, como, por exemplo, não saber o motivo da escolha. Nada mais foi passado aos alunos sobre Teoria dos Jogos.

A turma de 6º ano

Nas primeiras rodadas do jogo, alguns alunos do 6º ano escolheram as estratégias de maneira displicente, sem entender bem que se tratava de um jogo lógico e estratégico, apenas participando da atividade e analisando o resultado final da jogada. Essa postura pode ser justificada pela pouca maturidade lógico-matemático-estratégica, ou mesmo por talvez ser a primeira vez em contato com uma atividade dinâmica e que exige reflexão e raciocínio lógico-matemático.

No momento em que os alunos começaram a entender a dinâmica do jogo, compreendendo o resultado das jogadas que escolheram, passaram a analisar as jogadas anteriores e, assim, fizeram escolhas melhores, que na maioria das vezes era a estratégia (X_3 ; Y_3).

Figura 1 – Alunos do 6º ano participando da oficina de Teoria dos Jogos



Fonte: Elaborado pelos autores.

Como a turma tem 36 alunos, foram feitas 18 rodadas, em que 10 rodadas apontaram para a solução do jogo, ou seja, 55%, cujo ponto de sela era o par ordenado $(X_3; Y_3)$. Essas escolhas ficaram concentradas nas rodadas finais, quando os alunos perceberam a estratégia que seria a menos arriscada para ambos os jogadores.

A turma de 7º ano

Na turma do 7º ano, com 40 alunos, a atividade fluiu com melhores resultados. Como os alunos já estão mais familiarizados com conceitos matemáticos como números inteiros (negativos), equações do 1º grau e grandezas proporcionais, perceberam o intuito do jogo mais rapidamente.

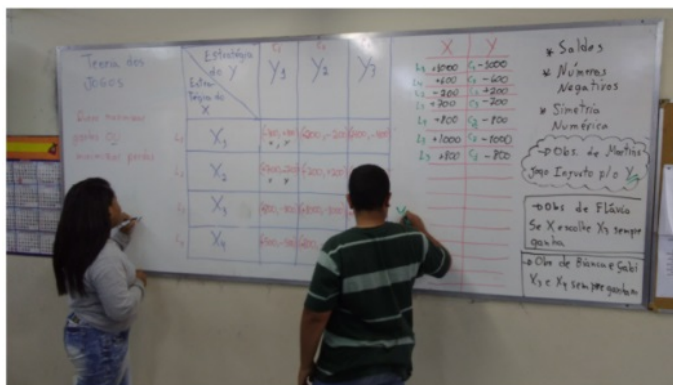
Em poucas jogadas, a turma chegou ao resultado ótimo do jogo (ponto de sela) com quase unanimidade das escolhas a partir da 13ª dupla. Os alunos que iriam contra o "acordado" pela turma justificavam suas escolhas com argumentos perfeitamente aceitáveis na Teoria dos Jogos, ou seja, com o intuito de ganhar mais ou perder menos do que uma escolha racional, conservadora, mas sabendo que iriam correr mais riscos do que o ponto de sela. Dessa forma, das 20 duplas, 13 escolheram as estratégias $(X_3; Y_3)$, configurando 65% das escolhas voltadas para o ponto de sela do jogo.

Durante a aula no 7º ano, algumas argumentações dos alunos foram anotadas no quadro, para discussões posteriores. Dentre várias observações, anotou-se, por exemplo, que o jogo era injusto para a empresa Y (análise de jogo com viés para a empresa X). Também foi verificado que se a empresa X escolhesse a estratégia X_3 , sempre ganharia o jogo (análise do ponto de sela). Outra aluna afirmou que a empresa X deveria escolher somente entre as

estratégias X_3 e X_4 . A turma ainda levantou as matérias envolvidas na dinâmica e já conhecidas por ela, como: saldo financeiro, números negativos e números simétricos.

Não foi dada nenhuma dica quanto às estratégias para jogar, as observações levantadas ou as matérias observadas no jogo, mas, intuitivamente, os conceitos de pares ordenados, de matrizes $m \times n$ e outros conteúdos relacionados também foram absorvidos com substancial aprendizado pela turma do 7º ano.

Figura 2 – Alunos do 7º ano na oficina de Teoria dos Jogos



Fonte: Elaborado pelos autores.

Ao término da oficina, em ambas as turmas, para fixação do conhecimento e para tirar dúvidas dos alunos que não compreenderam bem por que as suas escolhas não descreveram a solução conservadora, foi apresentada uma breve discussão teórica sobre o assunto, com a introdução dos conceitos básicos de Teoria dos Jogos.

As impressões dos alunos sobre a Teoria dos Jogos

Para finalizar a pesquisa, foi solicitado a dois alunos que participaram das oficinas, de ambas as turmas, que avaliassem a experiência vivenciada. Os relatos são apresentados a seguir:

Aluno A: “O professor escreveu no quadro e já foi chamando dois a dois alunos. Não entendemos muito no começo, mas fomos escolhendo as jogadas de qualquer jeito. Como todos os alunos da sala participaram, deu pra notar que algumas das estratégias escolhidas não davam resultado. E começamos a focar duas estratégias X_3 e X_4 que eram melhores para a empresa X. Eu prestei mais atenção na empresa X, porque ela tinha mais chance de lucros do

que a empresa Y . Jogo legal, diferente e inteligente. Poderia ter mais desses pra gente resolver”.

Aluno B: “Não joguei bem quando fui ao quadro porque eu estava com a empresa Y e tentei ganhar R\$300,00 na estratégia Y_1 , que era o maior ganho possível da empresa Y . Só que meu colega escolheu a estratégia X_3 , e eu perdi R\$800,00. Depois que todos jogaram, o professor analisou as estratégias e aí sim eu entendi o motivo porque eu perdi. Se eu fosse jogar de novo, jogaria na Y_3 , pra perder só R\$700,00, já que meus colegas da X nunca jogariam na X_1 . Gostei da Teoria dos Jogos, porque eu pensei que só falava de jogos, mas o professor explicou que não. A teoria fala sobre decisões nas empresas, na economia e até em situações de conflitos de guerra. Super legal mesmo, eu adorei! ”.

Aluna C: “Achei muito interessante esse tipo de jogo. De cara, parece ser um jogo simples, que se escolhe qualquer um e vai na sorte. Mas não é simples! É complicado e se a gente não tem atenção, não observa as opções, acaba escolhendo a pior ação e perde o jogo. Percebi logo de início que a jogada para qualquer uma das duas empresas era a $(X_3; Y_3)$. Depois o professor explicou que não se tratava da única estratégia, mas a mais racional, conservadora, porque dependendo do risco que a empresa corresse, pode ser que ela ganhasse mais ou perdesse mais e esse era o objetivo. Fiquei querendo jogar novamente e espero ter essa oportunidade”.

Aluno D: “Joguei a estratégia X_4 , porque eu queria ganhar R\$800,00, pois achei que a minha adversária poderia escolher Y_2 . Como o jogo era ganhar mais, joguei apostando nisso, mas não deu certo, porque ela escolheu a Y_3 e eu ganhei só R\$600,00. Se eu tivesse escolhido a X_3 eu teria garantido os R\$700,00 com certeza. Então, com a jogada dela perdi R\$100,00 de diferença. Gostei do desafio, leva a gente a observar as possibilidades dos jogadores, prende nossa atenção no jogo”.

Considerações finais

O estudo de Teoria dos Jogos apontou para as inúmeras possibilidades de se trabalhar a aprendizagem matemática. Pode-se considerar que o objetivo principal do estudo foi alcançado, no momento em que a oficina realizada foi bem acolhida pelos alunos, que ficaram realmente empolgados e interessados em desvendar o mistério escondido na tabela.

Pode-se afirmar que tanto os alunos do 6º ano quanto os alunos do 7º ano (estes com mais velocidade, devido a um maior desenvolvimento matemático) assimilaram com

facilidade a dinâmica do jogo, bem como os processos de soma zero, e que as duas turmas conseguiram fazer com que a maioria das jogadas chegassem ao resultado esperado, que era o ponto de sela.

Após a análise das estratégias adotadas por eles no decorrer da atividade, eles puderam entender os significados dos riscos e escolhas conservadoras, fazendo isso de forma natural após as observações dos outros colegas que estavam jogando. Foram lapidando o conhecimento da matriz dos jogos a cada rodada, e rápida e frequentemente participavam das escolhas com argumentos totalmente plausíveis.

Essa percepção do jogo pela maioria dos alunos surpreende, visto que eles ainda não tiveram contato com os conteúdos matemáticos embutidos na tabela, como matriz, números simétricos, par ordenado, cálculos financeiros, raciocínio lógico, conceitos de função etc., que fazem parte do currículo escolar de séries mais avançadas.

Avalia-se como positivo o resultado da atividade, que fortalece e embasa a defesa da incorporação de jogos matemáticos com mais frequência no Ensino Fundamental. Os jogos matemáticos fomentam o raciocínio lógico e a absorção de conteúdos matemáticos de forma natural, lúdica e significativa na construção do conhecimento matemático completo.

Referências

FIANI, Ronaldo. **Teoria dos Jogos com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais**. 2ª ed. rev. e atual. Rio de Janeiro, R.J.: Elsevier, 2006.

MOREIRA, Daniel Augusto. **Pesquisa Operacional**: curso preparatório. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SARTINI, Brígida Alexandre. GARBUGIO, Gilmar. BORTOLOSSI, Humberto José. SANTOS, Polyane Alves. BARRETO, Larissa Santana. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. In: II BIENAL DA SBM, Universidade Federal da Bahia 25 a 29 de outubro de 2004, Anais... Salvador, 2004. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf>. Acesso em: 12.01.2017.

THOMAS. L. C. **Games, Theory and Applications**. New York: Dover Publications Inc..2003.

VITORINO FILHO, Valdir Antônio. SACOMANO NETO, Mário. ELIAS, Jorge José. **Teoria dos Jogos**: uma abordagem exploratória. Revista Conteúdo, Capivari, v.1, n.2, jul./dez. 2009 ISSN 1807-9539. Disponível em: <http://www.conteudo.org.br/index.php/conteudo/article/viewFile/24/16>. Acesso em: 15.01.2017.

Recebido em: 02 de setembro de 2017.

Aprovado em: 31 de agosto de 2018.