Artigo

UMA RESPOSTA DA MATEMÁTICA MODERNA PARA OS PARADOXOS DE ZENÃO: DICOTOMIA E AQUILES E A TARTARUGA

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho[1]
Marcelo Reicher Soares[2]

Resumo: O presente trabalho estuda os paradoxos de Zenão de Eléia, *Dicotomia* e *Aquiles-Tartaruga*; descreve-os em sua forma original, em conformidade com as fontes históricas de Simplício de Cilícia; examina-os do ponto de vista das implicações filosóficas no contexto das escolas pitagórica e eleata; e, considerando que há um anacronismo com as concepções de tempo, espaço, continuidade, infinitésimo e infinito concebidas por Zenão e as que são compreendidas atualmente, interpreta-os e analisa-os sob a linguagem, o método analítico e o rigor lógico da Análise Matemática com o intuito de estabelecer uma solução geral contemporânea aos questionamentos suscitados por esse filósofo eleata. Além disso, este estudo constitui-se em um texto com possibilidade: de uso imediato na sala de aula, de servir de motivação para professores e alunos e de poder ser empregado como recurso didático num curso de Cálculo Diferencial e Integral, Análise Matemática, História ou Filosofia da Matemática.

Palavras-chave: História; Filosofia; Matemática; Paradoxo; Zenão.

INTRODUÇÃO

A lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário. Ambas são indispensáveis. A lógica, a única que pode dar a certeza, é o instrumento da demonstração: a intuição é o instrumento da invenção.
Poincaré, O Valor da Ciência, 1905.

O presente artigo discute, interpreta e analisa as formas de processos infinitos, implícitas nas concepções filosóficas de Zenão de Eléia que, ao defender as idéias estabelecidas por Parmênides, elabora uma série de argumentos[3], ou melhor, aporias[4] que tentam mostrar o caráter absurdo das teses do movimento e da multiplicidade do ser. Assim, em particular, nesse artigo são expostas e analisadas algumas aporias estabelecidas por Zenão que revelaram aspectos paradoxais com relação à possibilidade do movimento. Para tal estudo, consideram-se os argumentos denominados de *Dicotomia* e de *Aquiles-Tartaruga*. Nesses dois paradoxos[5], aos quais são propostas soluções contemporâneas, identificam-se vestígios de uma primeira noção intuitiva dos refinados conceitos de sequências e de séries que foram devidamente formalizados apenas no século XIX como resultado de um prolongado processo histórico.

ALGUMAS CONCEPÇÕES FILOSÓFICAS DA ESCOLA ELEATA

As doutrinas e concepções filosóficas pitagóricas conduziram seus partidários a estudar as propriedades dos números relacionadas com a aritmética, a geometria elementar plana e a espacial, a música e a astronomia. Esses estudos constituíram um programa essencial para a formação dos discípulos dessa escola filosófica e, com Filolau

[1] Departamento de Matemática da UNESP de Ilha Solteira-SP. E-mail: balieiro@mat.feis.unesp.br.
[2] Departamento de Matemática da UNESP de Ilha Solteira-SP. E-mail: reicher@mat.feis.unesp.br
[3] Zenão elabora cinco demonstrações de que: o que é, é imóvel; com o intuito de sustentar as teses defendidas por seu mestre Parmênides.
[4] Aporia significa "dificuldade para passar, falta ou privação", derivada do grego, aporía, composta pelo prefixo inseparável a, que tem o sentido de "negação ou privação" e o sufixo poria que significa "passar".
[5] Paradoxo significa "contrária a opinião", deriva do grego, parádoxa, composta pelo prefixo pará que significa "contra" e o sufixo dóxa que significa "opinião". Um paradoxo é uma proposição que contém ou parece conter uma contradição lógica, ou um raciocínio que, se bem que sem aparente lacuna, leva a um absurdo, ou ainda, uma situação que contraria a intuição comum.

de Crotona[6] (470-390 a.C.), foram divulgados para um maior número de adeptos, já que a escola pitagórica era uma espécie de irmandade secreta mística, política, científica e religiosa. O núcleo do pensamento pitagórico consistia nas tentativas de explicar o universo através dos números, na crença da transmigração da alma e na possibilidade de obter purificação através de uma vida ascética. Na primeira metade do século V a.C., houve também o aparecimento de uma outra escola filosófica chamada Eleata, cujo fundador foi Parmênides de Eléia[7] (515-450 a.C.).

Com Parmênides, apresenta-se uma nova forma no pensamento reflexivo, isto é, a ação necessária da razão como processo dialético do pensar; surgindo, como primeiro resultado dessa operação natural, a distinção entre o que é a essência e o que é a forma das coisas. Diante da realidade sensível que se percebe, com pequena diferença nas acepções, existe uma realidade eterna, imutável e imóvel do ser. Portanto, o homem deve buscar esta realidade por detrás das aparências do mundo dos sentidos e discernir a verdade (o ser) da suposta opinião (o não ser). Com efeito, Parmênides buscava um modo de se obter a verdade através do pensamento. Desse modo, a escola eleata negava a validade dos sentidos como meio para alcançar a verdade. De acordo com esse preceito, os eleatas pretendiam mostrar, através da razão, que a mensagem dos sentidos deveria ser ignorada.

PROCESSOS INFINITOS PRESENTES NOS PARADOXOS ELABORADOS POR ZENÃO DE ELÉIA

O Paradoxo da Dicotomia

O paradoxo da *Dicotomia* considera um espaço infinitamente divisível e um tempo limitado, conforme o relato de Simplício de Cilícia[8] (490-560) em seus comentários à Física, 1013, 4-16, de Aristóteles (384-322 a.C.):

> *O primeiro argumento é este: Se existe o movimento, é necessário que o móvel percorra infinitas distâncias num tempo limitado. Como isso é impossível, o movimento não existe. Zenão demonstra esse ponto de vista tomando-se por base a distância que seria percorrida pelo móvel. Como toda distância é divisível até ao infinito, é necessário que o móvel alcance primeiro a metade da distância que deve percorrer, e logo a totalidade. Mas antes de percorrer a metade do todo, deve percorrer a metade dessa metade; e, previamente, a metade dessa metade. Se essas metades são infinitas, porque é possível obter a metade de toda metade já obtida, é impossível percorrer infinitas distâncias num tempo limitado.* (LAN e JULIÁ, 1986 v.2, p.48-49)

Uma Abordagem da Análise Matemática para o Paradoxo da Dicotomia

Em conformidade com as condições impostas pelo primeiro argumento de Zenão de Eléia, pode-se resolvê-lo, utilizando um modelo físico-matemático atual, da seguinte forma: seja S a distância a ser percorrida pelo móvel em um tempo finito t e suponha-se que o móvel possua uma velocidade constante v (Note-se que, nessas condições, em um tempo finito t, o móvel percorrerá a distância vt). Antes de percorrer esta distância S, é necessário que o móvel percorra a distância $\frac{S}{2}$; observe-se que resta $\frac{S}{2}$ para ser percorrida; no entanto, antes de percorrer a distância $\frac{S}{2}$, é necessário que o móvel percorra a distância $\frac{S}{2^2}$; observe-se que resta $\frac{S}{2}+\frac{S}{2^2}$ para ser percorrida, e assim sucessivamente. Portanto, Zenão admitiu dividir a distância S a ser percorrida pelo móvel em um número infinito de pedaços, todos de comprimento não nulo, de forma que a distância S seria obtida pela soma desses infinitos pedaços; e ele, embora não pudesse aferir tal fato, estava certo, pois:

$$\frac{S}{2}+\frac{S}{2^2}+\cdots+\frac{S}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S}{2^n}=S\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=S\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-1\right)=S\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right)=S$$

[6] Hoje Crotona, na Calábria, na Idade Média, Cotrone, uma das cidades mais poderosas da magna Grécia, na costa oriental do Brútio (ou Brúcio, antiga região da Itália), fundada pelos Aqueus, em 710 a.C.

[7] Região do Peloponeso, na Grécia. Hoje Vélia, na Itália.

[8] A Cilícia era uma província romana no atual território da Turquia e da Síria, em torno da cidade de Tarso.

No entanto, Zenão, talvez por não possuir para o tempo um modelo geométrico conveniente, como o tinha para a distância, asseverou que não seria possível dividir o tempo finito $t = \dfrac{S}{v}$, que, afirma-se, será gasto para percorrer a distância S, em um número infinito de partes não nulas cuja soma fosse finita. Porém, observa-se que: para percorrer a distância $\dfrac{S}{2}$, o móvel gastará um tempo $\dfrac{t}{2}$; para percorrer a distância $\dfrac{S}{2^2}$, o móvel gastará um tempo $\dfrac{t}{2^2}$; e assim sucessivamente. Portanto, é possível dividir o tempo t, gasto pelo móvel para percorrer a distância S, em infinitas parcelas não nulas de modo que sua soma seja finita. De fato:

$$\frac{t}{2}+\frac{t}{2^2}+\cdots+\frac{t}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{2^n}=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-1\right)=t\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right)=t\,..$$

A soma S da série $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{S}{2^n}$ evidencia, segundo os pressupostos estabelecidos no argumento de Zenão, que ele dividiu a distância a ser percorrida em infinitas partes cuja soma era finita. Já a soma t da série $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{t}{2^n}$ indica que também é possível dividir o tempo $t = \dfrac{S}{v}$ de maneira conveniente de modo a percorrer S no tempo $t = \dfrac{S}{v}$; tal resultado, obtido num modelo weierstrassiano, mostra como *é possível percorrer infinitas distâncias num tempo limitado*.

Dessa forma, a afirmação concebida por Zenão, argumentada sob uma noção de tempo diferente da atual, constitui uma aporia que, investigada no modelo matemático weierstrassiano produz uma resposta coerente com a realidade observável.

Paradoxo de Aquiles-Tartaruga

O segundo argumento estabelecido por Zenão de Eléia, conforme relato de Simplício de Cilícia, em seus comentários à *Física*, 1014, 9 – 1015, 2, de Aristóteles é:

> *O argumento é chamado "Aquiles" porque ele se ocupa de Aquiles*[9]*, o qual, segundo diz o argumento, não pode alcançar a tartaruga que persegue, pois é necessário que o perseguidor, antes de alcançar a meta, chegue primeiro ao lugar do qual partiu aquela que foge. Mas quando o perseguidor chega a esse ponto, aquela que foge avançou uma certa distância, se bem que essa é menor do que aquela percorrida pelo perseguido, que é mais veloz. Mas avançou: não permaneceu imóvel. E novamente no instante em que o perseguidor alcança o ponto em que chegou aquela que foge, esta avançou um pouco, se bem que menos do que se havia movido antes, pois é mais lenta que o perseguidor. E assim, sempre que o perseguidor avança até onde havia chegado aquela que foge, que é mais lenta, esta tinha avançado um pouco. Embora o percurso seja cada vez menor, sempre haverá uma distância a ser percorrida, pois a tartaruga está sempre em movimento. Pelo fato de supor distâncias cada vez menores até o infinito - por causa da divisão das distâncias até o infinito -, não só Heitor*[10] *não será alcançado por Aquiles; tampouco o será uma tartaruga. Suponha que se trate de um estádio*[11]*. Uma tartaruga avança tomando-se por base a metade do estádio, e Aquiles avança dez vezes mais no mesmo tempo. Aquiles, desde o começo do estádio, inicia a perseguição à tartaruga, e avança meio estádio, de modo que chega à metade do estádio, do qual partiu a tartaruga. Mas esta já avançou a décima parte da metade restante do estádio. Aquiles percorre então a décima parte desta metade do estádio; mas a tartaruga avançou a décima parte da décima parte da metade restante. E enquanto fique uma décima parte de qualquer distância, e ela tenha por sua vez uma décima parte, a tartaruga estará sempre adiante de Aquiles, e jamais nenhum dos dois poderá percorrer a totalidade do estádio.* (LAN e JULIÁ, 1986v.2, p.51-52)

[9] Aquiles, filho da ninfa dos mares Tétis e de Peleu, rei de Ftia, na Tessália, é o principal herói grego da Ilíada. Recusou-se a lutar por causa de uma briga com Agamênon, até que a morte de seu amigo Pátroclo forçou-o a matar Heitor.

[10] Heitor, filho mais velho de Príamo e de Hécuba, era marido de Andrômaca e pai de Astíanax; durante a batalha, liderou os mais bravos troianos. Foi morto por Aquiles como vingança pela morte de Pátroclo.

[11] estádio é uma das unidades de comprimento utilizada na Grécia antiga. Como era habitual na Antiguidade, não havia uma só medida para o estádio, pois, por exemplo, o estádio que empregou Erastóstenes de Cirene (276-194 a.C.) para medir a circunferência da Terra era de aproximadamente 158 metros (estádio egípcio), enquanto o comprimento do estádio olímpico (estádio ático) era de 192 metros.

Uma Abordagem da Análise Matemática para o Paradoxo de Aquiles-Tartaruga

Para estudar profundamente qualquer fenômeno da natureza, a Ciência recorre a abstrações, concentrando a atenção em partes importantes desse fenômeno e desprezando outras, consideradas secundárias. Em mecânica teórica, as abstrações desse tipo são noções acerca de ponto material[12] e corpo rígido[13]. Assim, para se abordar e analisar o segundo problema de Zenão, consideram-se tanto Aquiles como a Tartaruga pontos materiais que iniciam, num mesmo instante de tempo, um movimento retilíneo e uniforme, esse numa mesma direção e sentido. Além disso, supõem-se que as posições desses pontos materiais podem ser determinadas no sentido positivo sobre um eixo orientado Ox, cuja origem será o ponto O. A velocidade da Tartaruga (v_t) será uma parte da velocidade de Aquiles (v_a); já a distância que separa Aquiles (que está na posição que dista A_0 da origem sobre o eixo) da Tartaruga (que está na posição que dista T_0 da origem sobre o eixo) será designada por d_0. Desse modo, consideraram-se as seguintes seqüências: $(T_k)_{k\in IN}$, com T_k indicando a k-ésima posição ocupada pela Tartaruga; $(A_k)_{k\in IN}$, com A_k indicando a k-ésima posição ocupada por Aquiles; $(T_k)_{k\in IN^*}$, com t_k indicando o k-ésimo instante de tempo considerado nesse processo; $(d_k)_{k\in IN}$, com d_k indicando a distância entre T_k e A_k sobre o eixo Ox.

Em conformidade com as condições impostas pelo problema de Zenão, pode-se resolvê-lo da seguinte forma:

As velocidades da Tartaruga e de Aquiles, verificam a relação funcional $v_t = rv_a$ (1), com $r \in IR$ e $0 < r < 1$, indicando que a velocidade da Tartaruga é menor do que velocidade de Aquiles. Considerando-se v_a constante, tem-se que, em um tempo t, Aquiles percorre um espaço $v_a t$ e a Tartaruga, um espaço $v_t t$. Assim, transcorrido o instante de tempo $t_1 = \dfrac{d_0}{v_a}$, obtém-se $d_0 = v_a t_1$ (2) e, simultaneamente, o deslocamento de T_0 para T_1 gera a expressão: $d_1 = v_t t_1$ (3); ao se substituir (1) e (2) em (3), obtém-se a expressão: $d_1 = v_t t_1 = (rv_a)t_1 = r(v_a t_1) = rd_0$ (4). Sendo assim, Aquiles ocupa agora a posição $A_1 = T_0$ (que dista d_0 de A_0), porém a Tartaruga ocupa agora a posição T_1 (que dista d_1 de T_0). Após transcorrido o instante de tempo $t_2 = \dfrac{d_1}{v_a}$, obtém-se $d_1 = v_a t_2$ (5) e, simultaneamente, o deslocamento de T_1 para T_2 gera a expressão: $d_2 = v_t t_2$ (6); ao se substituir (1), (5) e (4) em (6), obtém-se a expressão: $d_2 = v_t t_2 = (rv_a)t_2 = r(v_a t_2) = rd_1 = r(rd_0) = r^2 d_0$. Observa-se agora que Aquiles ocupa a posição $A_2 = T_1$ (que dista d_1 de A_1), porém a Tartaruga ocupa agora a posição T_2 (que dista d_2 de T_1).
Assim, sucessivamente, transcorrido o instante de tempo $t_k = \dfrac{d_{k-1}}{v_a}$, obtém-se $d_k = r^k d_0$ (7). Pode-se notar que a distância que separa Aquiles da Tartaruga diminui paulatinamente, de fato: basta calcular o limite da expressão (7): $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = \lim\limits_{k\to\infty} r^k d_0 = d_0 \lim\limits_{k\to\infty} r^k = 0$ (8)[14]. Zenão, bem como seus contemporâneos, não possuía uma noção do conceito de infinito que permitisse lidar com todos os problemas que envolvem tal conceito. Dessa forma, Zenão imaginava que, para percorrer a soma das infinitas distâncias d_k, que separam Aquiles da Tartaruga, seria gasto um tempo infinito, impossibilitando, conseqüentemente, que Aquiles a alcançasse. Nota-se, no entanto, que a soma S, dessas infinitas distâncias d_k, que deve ser percorrida por Aquiles para alcançar a Tartaruga, é finita: $S = \sum_{k=0}^{\infty} d_k = d_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \dfrac{d_0}{1-r}$ (9)[15]. Tendo em vista que o tempo gasto por Aquiles para percorrer a distância d_k é $t_{k+1} = \dfrac{d_k}{v_a}$, segue-se que, para percorrer S, o tempo, t, gasto por Aquiles será também finito e igual a:

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{v_a} = \frac{1}{v_a}\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \frac{1}{v_a}\sum_{k=0}^{\infty} d_0 r^k = \frac{d_0}{v_a}\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{d_0}{v_a}\cdot\frac{1}{1-r} = \frac{d_0}{v_a(1-r)}.$$

[12] Chama-se ponto material a partícula material cujas dimensões nas condições do problema estudado podem ser desprezadas.
[13] Chama-se corpo rígido um corpo no qual a distância entre cada par de pontos permanece invariável em todas as condições. Em outras palavras, o corpo rígido conserva invariável sua forma geométrica.
[14] Ver anexo 1.
[15] Ver anexo 2.

Com efeito, observa-se no segundo argumento que Zenão estabelece e aceita um modelo geométrico no qual subdivide todo o trajeto em um número infinito de partes não nulas cada vez menores. Considerando que, para percorrer separadamente cada uma dessas partes, é necessária uma quantidade de tempo, é natural afirmar que o tempo gasto para o trajeto total será a soma de todas essas frações de tempo. Mas a afirmação de Zenão de que Aquiles não alcançará a Tartaruga equivale a asseverar que Aquiles não a alcançará num tempo finito. Ou seja, pode-se concluir que Zenão não concebe um modelo geométrico para o tempo, de maneira a dividi-lo em um número infinito de partes não nulas cuja soma seja finita.

É perfeitamente compreensível essa concepção zenoniana restrita de tempo. Ela advém do fato de que esse conceito é bastante sutil. Basta notar que a compreensão do conceito de tempo foi significativamente alterada com o advento da teoria da relatividade estabelecida por Albert Einstein (1879 - 1955).

As aporias de Zenão, independentemente de seus objetivos, tiveram importantes consequências para o desenvolvimento posterior da matemática grega; podem-se citar como contribuições diretas de Zenão certos recursos de ordem lógica, metodológica e técnica. Assim, o processo dicotômico[16], frequente em suas aporias, foi utilizado por outros filósofos-geômetras como recurso de demonstração. O método de redução ao absurdo, tão utilizado pelos geômetras gregos, é um resultado do princípio da não-contradição, sustentáculo dos raciocínios desse filósofo eleata que o manejou com tanta habilidade que foi considerado por Aristóteles como o inventor da dialética.

Além disso, primeiramente, ao pensar nos paradoxos zenonianos, deve-se ter em mente que os métodos envolvendo idéias de movimento instantâneo, séries infinitas e limites, não existiam ainda para os antigos filósofos gregos. Em seguida, que a busca para solucionar esses problemas, que têm uma relação intrínseca com os conceitos de infinitésimo, infinito e continuidade, assenhoreou-se de uma gama de matemáticos e filósofos por muitos séculos e essas investigações somente tiveram êxito no século XIX, como afirma Russell:

> *Na verdade, Zenão ocupou-se de três problemas, todos ligados ao movimento, porém mais abstratos que o movimento, e suscetíveis de tratamento puramente aritmético. São os problemas do infinitesimal, do infinito e da continuidade. Enunciar claramente as dificuldades envolvidas era realizar, talvez, a parte mais difícil da tarefa do filósofo. Isso foi o que Zenão fez. Desde sua época até hoje, os melhores intelectos de cada geração atacaram esses problemas sem, em linhas gerais, conseguirem nada. No entanto, em nossa época três homens, Weierstrass, Dedekind e Cantor, não apenas desenvolveram os três problemas como também os resolveram completamente. As soluções, para os que estão familiarizados com a matemática, são tão claras a ponto de não causar a menor dúvida ou dificuldade. Provavelmente, essa realização é a menor de que se pode vangloriar nossa época; e não conheço nenhuma época (à exceção talvez da idade de ouro da Grécia) que tenha prova mais convincente a oferecer do gênio transcendente de seus homens. Dos três problemas, o do infinitesimal foi resolvido por Weierstrass; a solução dos outros dois foi iniciada por Dedekind e definitivamente alcançada por Cantor.* (RUSSELL, 1977, p.90)

Por fim, em decorrência dos milhares de anos transcorridos, tão densos em acontecimentos, o estudo de concepções filosóficas zenonianas, que aconteceram há aproximadamente dois mil e quinhentos anos, não se mostra com o menor vestígio de envelhecimento. De fato, se manteve tão repleto de vida no decorrer desses anos como um estudo clássico atemporal de perene satisfação, para aqueles eruditos que a eles se dedicaram e ainda se dedicam, que parece escrito para a atualidade. Assim, estes paradoxos zenonianos desafiam, como toda grande obra, o impiedoso deus romano do tempo, Cronos.

Os matemáticos e filósofos, com seus lampejos intelectuais, com seus desejos veementes, buscam a definição precisa do conceito de infinitésimos, infinito e continuidade e realizam os seus sonhos. Porém, ao poeta Cruz e Sousa (1861-1898) coube cantar, em seus *Últimos Sonetos*, seu drama existencial em mundos imponderáveis, em lamentações implacáveis, em corpos inefáveis, em abismos insondáveis e em escavações infinitas buscando decifrar sua alma: *Cavador do infinito*

Com a lâmpada do Sonho desce aflito
E sobe aos mundos mais imponderáveis,
Vai abafando as queixas implacáveis,
Da alma o profundo e soluçado grito.

Ânsias, Desejos, tudo a fogo, escrito
Sente, em redor, nos astros inefáveis.
Cava nas fundas eras insondáveis
O cavador do trágico Infinito.

[16] Dicotômico: Dividido ou subdividido em duas partes.

E quanto mais pelo Infinito cava
mais o Infinito se transforma em lava
E o cavador se perde nas distâncias...

Alto levanta a lâmpada do Sonho.
E como seu vulto pálido e tristonho
Cava os abismos das eternas ânsias!

Anexo 1

A afirmação contida em (8) pode ser demonstrada da seguinte forma: dado $a > 1$, existe $p \in IR$, tal que $a = 1 + p$; sendo assim, da desigualdade de Bernoulli[17] segue $a^k = (1 + p)^k \geq 1 + kp$. Portanto, $\lim_{k\to\infty} a^k = 0$. Uma vez que $0 < r < 1$, tem-se $\frac{1}{r} > 1$, e, pelo visto acima, segue-se que $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^k = 0$; assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in IN$ tal que para todo $k \geq k_0$ vale $\left(\frac{1}{r}\right)^k > \frac{1}{\varepsilon}$; logo, para todo $k \geq k_0$ tem-se $r^k < \varepsilon$. Donde resulta que $\lim_{k\to\infty} r^k = 0$.

Anexo 2

A afirmação contida em (9) pode ser demonstrada da seguinte forma: considere-se a progressão geométrica $S_k = d_0 + d_0 r + \cdots + d_0 r^k$ (10). Multiplicando-se S_k por r, tem-se $S_k = rd_0 + d_0 r + \cdots + d_0 r^{k+1}$ (11); e subtraindo-se (11) de (10), tem-se $(1 - r)\, S_k = d_0 - d_0 r^{k+1}$ ou $S_k = \frac{d_0 - d_0 r^{k+1}}{1-r} = \frac{d_0}{1-r} - \frac{d_0 r^{k+1}}{1-r}$ e $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{d_0}{1-r}\right) - \frac{d_0}{1-r}\lim_{k\to\infty}\left(r^{k+1}\right) = \frac{d_0}{1-r}$, pois, do Anexo 1, tem-se $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} = 0$.

Referências Bibliográficas

ÁVILA, G. S. S. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

DIOGENES, L. **Vidas de Filosofos Mas Ilustres**. Madrid: Gredos, 1973.

EDWARDS, C. H. **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979.

LAN, C. E., JULIÁ, V. E. **Los Filósofos Presocráticos**. Madrid: Gredos, 1986. 3v.

POINCARÉ, H. **O Valor da Ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

REALE, G., ANTISERI, D. **História da Filosofia**. São Paulo: Paulus, 1990. 3v.

RUSSELL, B. **Misticismo e Lógica e outros Ensaios**. Rio de Janeiro: Zahar, 1977.

RUSSELL, B. **História da Filosofia Ocidental**. Rio de Janeiro: Zahar, 1969. 3v.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1994.

[17] Jakob Bernoulli (1654-1705), matemático suíço.