Sociedade Brasileira de Educação Matemática

ANO 21 - JULHO DE 2016, Nº 52

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA

Educação Matemática em Revista

Ano 21 - nº 52, Julho de 2016

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA

É uma publicação da

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
ISSN 2317-904X

SUMÁRIO

03 **Editorial**

05 **Aprendizados Discentes e Docentes: Formar Formando-se na Licenciatura em Matemática**
Ana Cláudia Gouveia de Sousa, Luciana de Oliveira Souza Mendonça

12 **Conhecimentos Mobilizados por Licenciandos na Resolução de Problemas e na Exploração-Investigação Matemática**
Gabriela Castro Silva Cavalheiro, Renata Cristina Geromel Meneghetti

19 **Potencialidades de Desenvolvimento do Conhecimento Profissional Docente em um Grupo Cooperativo**
Thais Helena Inglêz Silva, Alessandro Jacques Ribeiro

27 **A Avaliação em Matemática em Forma de Teia**
Hendrickson Rogers Melo da Silva, Ediel Azevedo Guerra

42 **Matemática no Cotidiano: (RE) Educação Ambiental no Descarte de Embalagens**
Leonardo Flausino Araújo Silva, Ubiramar Ribeiro Cavalcante

49 **Dificuldades na Resolução de Inequações Racionais Fracionárias: um Estudo de Caso nas Escolas de Moçambique**
António Fernando Zucula, Maria Isabel Ramalho Ortigão

59 **Divisão de Frações: Explorando Algoritmos Não Usuais**
Rafael Filipe Novoa Vaz

67 **Elaboração e Resolução de Problemas de Divisão por Alunos do 5º Ano**
Daiana Gomes Prior, Tânia Stella Bassoi

74 **Aplicação do Geogebra na Solução de Problemas Geométricos**
Kelry Fernandes, Roney Braz Rodrigues , Alexandre Martins Dias, Celso de Ávila Ramos, Fausto Rogério Esteves, Patrícia Carolina de Souza Pereira

79 **O Método da Exaustão e o Cálculo de Áreas: Proposta e uma Tarefa com Auxílio do Geogebra**
André Luis Trevisan, Higgor Henrique Dias Goes

86 **Narrativas: Versos, A(n)versos e suas Afetações em/na Educação Matemática**
Diego de Matos Gondim

93 **Escola e Democracia**
Denise Souza Queiroz

EDITORIAL

Prezados leitores da Educação Matemática em Revista (EMR),

Apresentamos o último número editado pela Diretoria Nacional Executiva (DNE) 2013-2016 e muito nos alegra perceber o crescimento e o respeito que a EMR conquistou nesses últimos três anos. Durante nossa gestão, a EMR foi publicada com regularidade e, atendendo seu escopo, esteve voltada para aproximar a academia e a sala de aula. Recebemos um número impressionante de textos que foram avaliados cuidadosamente por nossos colaboradores e cujos pareceres foram encaminhados aos autores, o que permitiu a reescrita e, em alguns casos, novas submissões.

Os números temáticos publicados oportunizam aos leitores aprofundar-se em conhecimentos específicos. A grande variedade de temas abordados, nos números regulares, oferece contato com uma gama de atividades que auxilia a diversificar as práticas de sala de aula.

Neste número, trazemos seis artigos. Os dois primeiros discutem o professor de matemática em formação. No artigo – *Aprendizados discentes e docentes: formar formando-se na licenciatura em matemática* – as autoras destacam a relação entre ser estudante formando-se professor e, ao mesmo tempo, refletir as práticas dessa formação. No texto *Conhecimentos mobilizados por licenciandos na* resolução de problemas e na exploração-investigação matemática, compara-se os conhecimentos empregados pelos estudantes durante uma aplicação de atividades sobre consumo de energia elétrica, segundo as abordagens de resolução de problemas e exploração-investigação matemática. De acordo com as autoras, ambas as abordagens se mostraram com um ótimo potencial didático-pedagógico para o ensino-aprendizagem de Matemática e a escolha entre utilizar uma ou outra dependerá dos propósitos que se pretende no desenvolvimento de conhecimentos matemáticos.

O terceiro artigo – *Potencialidades de desenvolvimento do conhecimento profissional docente em um grupo cooperativo* – que traz a temática da formação continuada de professores, os autores apresentam o desenvolvimento de uma atividade realizada por um grupo de professores que são levados a discutir o conceito de equação. Em suas análises, eles buscam verificar manifestações dos conhecimentos profissionais docentes, mobilizados quando os professores refletem sobre práticas avaliativas.

Considerando o tema avaliação, o artigo – *A avaliação em matemática em forma de teia* – apresenta um método de avaliação em ambiente computacional, denominado *método de avaliação em teia.* O referido método pode ser utilizado com grande operacionalidade em turmas presenciais ou no ensino a distância.

O quinto artigo – *Matemática no cotidiano: (re) educação ambiental no descarte de* *embalagens* – aborda a Educação Ambiental inserida no contexto da disciplina de Matemática na Educação de Jovens e Adultos. Com uma proposta interdisciplinar, os autores desenvolveram um trabalho de quantificação e pesagem das embalagens descartadas nas residências dos próprios alunos.

O artigo - *Dificuldades na resolução de inequações racionais fracionárias: um estudo de caso nas escolas de Moçambique* - apresenta resultados de uma investigação sobre estratégias de estudantes do ensino médio, em uma escola secundária da cidade de Maputo, República de Moçambique, para resolver inequações racionais fracionárias.

Na Atividade para sala de aula – *Divisão de frações: explorando algoritmos não usuais* – o autor busca fugir da memorização de procedimentos para a divisão de frações, na qual a divisão se transforma na multiplicação de frações sem nenhum significado. Ainda pensando sobre o tema divisão, o texto – *Elaboração e resolução de problemas de divisão por alunos do 5º ano* – procura identificar as ideias de divisão na elaboração e resolução de problemas elaborados pelos alunos, além de analisar as formas de resolução empregadas por eles.

Os dois textos seguintes apresentam Atividades para sala de aula que envolvem o ambiente de geometria dinâmica. No artigo – *Aplicação do GeoGebra na solução de problemas geométricos,* os autores exploram os recursos do *software* mostrando estratégias e procedimentos para algumas construções geométricas. O texto – *O método da exaustão e o cálculo de áreas: proposta de uma tarefa com auxílio do GeoGebra* – apresenta uma proposta de tarefa que tem como objetivo o estudo do cálculo integral, com foco na introdução ao conceito de integral definida. Os autores inspiraram-se nas ideias de Freudenthal e defendem a premissa de que o ensino do Cálculo Diferencial e Integral deveria ser precedido pela exploração qualitativa, intuitiva e informal de ideias como taxa de variação e áreas sob curvas, por meio de abordagens gráficas e numéricas, que seriam gradativamente refinadas.

Por fim, o Ensaio teórico – *Narrativas: versos, a(n)versos e suas afetações em/na Educação Matemática* – discute possibilidades das narrativas sob as perspectivas de Suely Rolnik e Jerome Bruner. A proposta é compreender as possibilidades da narrativa na pesquisa em Educação Matemática. Neste volume, também apresentamos a resenha do livro Escola e Democracia de Dermeval Saviani, que dispensa maiores comentários.

Desejamos a todos excelente leitura e que a gestão 2016-2019 seja coroada de êxito.

Alessandro Jacques Ribeiro

Solange Hassam Ahamd Ali Fernandes

Editores

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

APRENDIZADOS DISCENTES E DOCENTES: FORMAR FORMANDO-SE NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ana Cláudia Gouveia de Sousa[1]
Luciana de Oliveira Souza Mendonça[2]

RESUMO

Este texto objetiva relatar aprendizados discentes e docentes de licenciandos em Matemática na relação entre ser estudante formando-se professor e refletindo as práticas dessa formação. Para tanto, foram analisadas as escritas dos bolsistas para compor os Relatórios Parciais e Final de um subprojeto do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - Pibid. Como aporte teórico, foram utilizados os estudos sobre aprendizagens e conhecimentos da docência (SHULMAN,1986), para o desenvolvimento profissional (MIZUKAMI, 1996); (PAIVA, 2008) e a partir da prática reflexiva (SCHÖN, 1995); (PIMENTA, 1998); (PEREZ, 2004). A análise evidenciou que, nessa experiência, os bolsistas reconheceram seus aprendizados relativos ao trabalho pedagógico com o erro, ao trabalho em grupo, à construção da sua identidade profissional de professor e à experiência da escrita como sistematização e expressão de saberes.

Palavras-chave:

Formação inicial. Aprendizagens docentes e discentes. Ensino de Matemática.

Introdução

O subprojeto *(Re)construindo conhecimentos matemáticos* da Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE campus Canindé, integrado ao projeto institucional Pibid, tem realizado ações no IFCE e na escola parceira na busca por contribuir com a formação docente e com o desenvolvimento profissional (MIZUKAMI, 1996) dos bolsistas[3] envolvidos no referido subprojeto.

O desenvolvimento profissional, nesse caso, é construído a partir dos sujeitos e espaços concretos (PAIVA, 2008), quer sejam as aulas na Licenciatura em Matemática, as atuações na escola básica ou outros lugares em que as ações formativas se dão. Uma construção de dentro para fora, em que as práticas dos sujeitos e seus contextos são por eles observados, discutidos e articulados com saberes e teorias outras, que se efetiva pela reflexão para a construção da identidade profissional dos bolsistas, futuros professores.

[1]Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE/Canindé. E-mail: anaclaudiaifce@gmail.com
[2]Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE/Maracanaú. E-mail: professoralucianamendonca@gmail.com
[3]Referimo-nos aqui aos licenciandos em Matemática, bolsistas de iniciação à docência pelo PIBID.

Diversas ações, portanto, têm sido desenvolvidas pelos bolsistas para conhecer e atuar na realidade da escola, como visitas e entrevistas, a leitura de documentos, como o Projeto Político Pedagógico (PPP), observações da dinâmica escolar e das aulas de Matemática, encontros com os alunos para sensibilização, avaliação inicial e realização de oficinas e minicursos. Há também a realização de atividades desenvolvidas nos encontros do grupo de estudo Pibid, como elaboração e análise de um instrumento diagnóstico da aprendizagem dos alunos, e depois de suas respostas, planejamento e avaliação de oficinas e minicursos de matemática, escrita e apresentação de trabalhos em eventos locais, regionais e nacionais; e a escrita de relatórios.

As observações e reflexões advindas dessas ações são escritas nos diários de campo, pelos bolsistas, e depois trazidas aos encontros quinzenais do grupo de estudo Pibid. Nessas ocasiões, buscamos discutir as percepções, refletindo sobre elas, sempre guiados por perguntas que norteiam a busca por aprendizados a partir daquela realidade, tais como: *o que posso aprender, como futuro professor, sobre essa realidade percebida? O que aprendi e levo para minha formação, como possível prática?* Essas perguntas demandam sempre a necessidade da reflexão a partir da escrita, na tentativa de exercitar o que defende Freire (1981) sobre a indissociabilidade entre teoria e prática.

Assim, buscamos conhecer os diversos saberes construídos pelos bolsistas, inclusive na prática, como aprendizados da formação discente e docente desses futuros professores. Por isso, o contato mais próximo com a escola, como ambiente de pesquisa e prática, constitui-se como um importante espaço formativo nesse subprojeto. Esse espaço tem proporcionado aos bolsistas aprendizados de grande relevância para sua formação e para o seu desenvolvimento profissional.

Este trabalho, portanto, relata uma investigação que objetivou reconhecer os aprendizados discentes e docentes dos licenciandos na relação de ser estudante formando-se professor e refletindo sobre as práticas dessa formação. Constatamos, então, que os bolsistas reconheceram seus aprendizados relativos ao trabalho pedagógico com o erro, ao trabalho em grupo, à identidade profissional do professor e à experiência da escrita como sistematização e expressão.

Formação e iniciação docente

Em nossa compreensão, a formação docente é um processo permanente, abrangendo a identidade do professor, sua valorização profissional e aspectos epistemológicos, que se dão no âmbito teórico dos conhecimentos e também na prática social, conforme anunciam as diretrizes gerais para a formação de professores (BRASIL, 2001). Prática essa que se amplia e se transforma à medida que os educadores refletem e tomam consciência dela, aprendem e resignificam a partir de seus saberes, valores e experiências, construindo aprendizados técnicos, políticos e humanos.

Compreendemos, conforme Shulman (1986), que a formação do professor para o ensino de uma determinada disciplina não requer apenas o conhecimento da disciplina, dos conteúdos que a compõem. O professor necessita de uma formação que possibilite a transformação do conhecimento específico em conteúdo escolar a ser trabalhado em sala de aula. Ele precisa, além do conhecimento do conteúdo, do conhecimento didático do conteúdo, que envolve o conhecimento disciplinar, pedagógico-disciplinar e curricular.

E, na formação do professor de Matemática, esses conhecimentos compõem:

> o principal eixo da formação dos saberes da docência, pois interligam de forma intencional o saber matemático e os saberes didático-pedagógicos, incluindo aí também o sentido educativo/formativo subjacente à prática escolar que acontece ao ensinar e aprender esses conteúdos. (FIORENTINI, 2004, p. 2-3)

Nesse sentido, pensamos uma formação inicial e uma iniciação à docência em Matemática como a busca pela superação da dicotomia saber da matéria e saber pedagógico da matéria, o que precisa ser aprendido pela prática reflexiva proposta na ideia do educando-educador e educador-educando, nas palavras de Freire (2003). Ou, ainda, coadunando com a ideia de formar formando-se, como sugerem França, Sousa e Sousa (2012, p. 5), quando afirmam que a formação precisa ser um "processo autoformativo individual e grupal", pois "[...] é preciso formar-se permanentemente para propor formação a outros."

Reconhecemos, assim, que a formação inicial do docente deve ser permeada pela possibilidade de aprender pela reflexão da prática, a partir da teoria e a compreensão da teoria articulada à prática, considerando o professor reflexivo (PIMENTA, 1998) e pesquisador de sua prática (FREIRE, 1985), tendo a pesquisa como princípio pedagógico (DEMO, 2011).

Esse movimento de pesquisa da prática se dá a partir de uma reflexão crítica local e geral (SOUSA; GAMA; PASSOS, 2013). Reflexão crítica fundamentada na discussão sobre o professor reflexivo, que concebe a aquisição do conhecimento em ação pela "reflexão-na-ação" e "reflexão-sobre-a-ação" (SCHÖN, 1995, p. 83). A primeira, concomitante à ação, exige do professor uma elaboração rápida, um olhar imediato para a experiência vivida no sentido de perceber suas características e contradições para a tomada de decisão e até o improviso.

A segunda diz respeito a um momento de reflexão posterior à ação, que ocorre sistematicamente, permitindo que o professor pense e tente elaborar sua visão sobre o acontecido (MIZUKAMI, 1996; PEREZ, 2004). Essa precisa ser instigada, discutida, socializada, pois assim pode trazer, pelos diferentes olhares e pela riqueza das discussões, aprendizados ou o reconhecimento dos aprendizados.

Aprendizados observados

Para conhecer os aprendizados discentes e docentes dos bolsistas, analisamos os relatos deles, trazidos para compor os relatórios encaminhados à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES no início de 2014. Como os relatórios têm padrão pré-definido e queríamos mais informações sobre o relatado, pedíamos sempre que eles trouxessem um resumo das anotações do diário de campo, onde não aparecesse só a descrição do fato, mas, além do relato, que escrevessem sobre os sentimentos, atitudes e saberes mobilizados em cada ação realizada, a partir das perguntas sobre seus aprendizados, já apresentadas na introdução deste texto. E, juntos, íamos tecendo o texto para o relatório.

Portanto, a pesquisa foi feita nos textos trazidos pelos 10 bolsistas para compor os relatórios. Neles percebemos diferentes aprendizados específicos do papel de discente e docente em articulação, que apresentamos a seguir, nomeando os sujeitos investigados como B1, B2,.. B10. A análise dos trechos escritos pelos bolsistas foi feita em articulação com o referencial teórico discutido.

Em trecho concernente ao relato sobre os encontros quinzenais do grupo Pibid, um bolsista reconhece a importância dos momentos coletivos como espaço formativo, quando expressa[4]:

> *Nos encontros do Grupo de Estudo PIBID/Matemática, temos momentos de estudo e discussão de artigos, pesquisa, onde aprendemos novos conhecimentos e produzimos materiais para utilizar nas oficinas, minicursos e outras atividades do subprojeto. Aprendemos sobre elaboração de atividades, elaboração de itens de matemática, planejamento de oficinas etc. Também escrevemos relatos de experiência para apresentar em eventos científicos. É uma oportunidade de aprender a ser professor estudando e fazendo. Mas o principal é fazer junto, pois ajudamos uns aos outros, colaboramos e aprendemos com isso (B3).*

Percebemos, nesse relato, a presença da imbricação entre educador e educando, conforme Freire (2003), quando B3 fala do *aprender a ser professor estudando e fazendo*, revela uma simbiose de saberes da discência e docência, na perspectiva de formar formando-se. Nesse sentido, "ensinar é buscar e interrogar, afirmar e reafirmar, é produzir, é construir e desconstruir significados a partir dos saberes de docência e discência (educador e educando) imbricados em seus mundos e nas experiências de vivê-los" (FRANÇA; SOUSA; SOUSA, 2012, p. 4). E, ainda, o *aprender junto,* consagra-se como importante passo na constituição do ser professor.

Relativamente às atividades específicas do professor, aquelas pertinentes a sua atuação, um bolsista relata:

> *Nos encontros semanais de planejamento das oficinas, sempre avaliamos os desempenhos dos alunos a partir de nossas percepções e deles para um replanejamento constante. A elaboração de objetivos, atividades, estratégias didáticas, dinâmicas etc. foi muito difícil no começo, dando até vontade de desistir, mas fui me interessando mais pela profissão do magistério, quando percebia o retorno de alguns alunos, discutíamos isso no grupo e compreendíamos a docência também como investigação da prática para melhorá-la (B7).*

O bolsista B7 demonstra uma (des)construção relativa à imagem da profissão de professor, reconstruindo-a em bases mais reais e sólidas, com o cultivo de um compromisso com a docência desde a formação inicial, o que reflete a identidade docente em construção. Dessa forma, realiza a elaboração de conhecimentos pertinentes ao ensino em articulação com a prática, no tocante ao planejamento pedagógico e avaliação.

Isso foi percebido, inclusive, na relação específica com o aprendizado da Matemática, sendo reconhecida, pelos bolsistas, a sua responsabilidade com esse aprendizado por parte dos alunos e deles próprios, como no relato de B6:

> *No encontro de sensibilização dos alunos para o início do bloco de oficinas de matemática na escola, apresentamos um vídeo motivacional para incentivar os alunos à participação nas oficinas. Foram realizadas dinâmicas de grupo*

[4]A partir deste ponto as falas dos bolsistas aparecerão no texto em trechos em itálico.

> *para interação entre os alunos e deles com nós, bolsistas, buscando compreender como eles vêem a matemática, que dificuldades reconhecem. Percebemos como nossa missão como professor de Matemática é grande, pois os alunos têm rejeição à disciplina, não reconhecem quase nada bom nela, mas sentem-se curiosos, de certa forma (B6).*

O bolsista B6 demonstra entender que as oficinas são espaços de aprendizagem e desenvolvimento, o que está presente no relato que se segue:

> *Nas oficinas sobre Potenciação, iniciamos fazendo uma memória do que os alunos já sabiam sobre o assunto. O interessante foi a participação deles nesse momento, inclusive vindo ao quadro. Introduzimos o conteúdo de potenciação a partir de exemplos, relacionando com situações cotidianas e apresentando isso em matérias de jornais, revistas, através de slides, sendo sempre discutido com todos o contexto e o conhecimento matemático presente. Os alunos puderam compreender o conceito de potenciação e realizaram atividades operando com a mesma. Nossa dupla aprendeu muito com a preparação e realização dessas oficinas, pois os alunos precisam de espaço para falar, escrever e tentar nas aulas de Matemática, mesmo errando (B3).*

O conceito de oficina, trabalhado com os bolsistas no grupo de estudo Pibid, baseia-se em Sousa e França (2007), e diz respeito a um espaço de aprender junto, relacionando teoria e prática, pois na oficina se parte de uma vivência para sua análise e compreensão mais teórica, conceitual, onde "todos são valorizados pelo que são e sabem" (SOUSA; FRANÇA, 2007, p. 75).

Essas atitudes já eram vivenciadas no grupo de estudo do Pibid e abriam espaço às colocações, à espontaneidade, ao *erro*, à busca pelo conhecimento aprendido junto. Isso tem grande valia no ensino e aprendizagem de uma disciplina como matemática, sobre a qual paira uma aura de dificuldade, de impossibilidade e de pretensa exclusividade para os iluminados (LORENZATO, 2008). Assim, o atentar para o erro é o olhar para um caminho, um percurso, vendo-o como anuncia Bachelard (1996), em sua dialetização do erro, ou seja, como obstáculo a ser superado, mas também como pré-requisito para a ampliação dos aprendizados.

Apareceram, ainda, nos relatos, os *aprendizados referentes ao exercício da sistematização escrita das experiências vividas no PIBID*, sejam na forma de relatos de experiências ou outros trabalhos para publicação e/ou apresentação:

> *Elaborar relatos de experiência e trabalhos científicos teve muita importância para a minha formação porque foi uma experiência da vida acadêmica que ajudou a gente a escrever melhor e se desinibir na apresentação dos trabalhos (B1).*

Muitos são, portanto, os aprendizados possíveis aos professores e futuros professores, a partir das vivências realizadas em conjunto com a escola, se é dada atenção às vivências, refletindo a seu respeito, na perspectiva de aprender com elas, dentro da especificidade do contexto sociocultural em que elas ocorrem. Esse movimento envolve o professor, que, desta forma, também desempenha importante papel em seu próprio desenvolvimento profissional. Assim, torna-se importante, para o professor, adquirir a capacidade de aprender constantemente com a própria prática, articulada com a(s) teoria(s), o que pode e deve ser vivenciado na formação inicial, haja vista esses e outros ensaios no âmbito das experiências práticas no currículo.

[4]A partir deste ponto as falas dos bolsistas aparecerão no texto em trechos em itálico.

Considerações finais

A partir dos dados aqui analisados, pôde-se perceber o Pibid como um espaço de concretização do aprendizado para a docência, considerando a prática como aprendizado pela reflexão. O subprojeto Pibid da Licenciatura em Matemática do IFCE/Canindé propõe que a formação na licenciatura em Matemática busque a integração entre o conteúdo matemático e o conteúdo pedagógico, para que eles não estejam apenas justapostos na matriz curricular e na prática.

A pretensão, assim, é que a formação propicie uma busca constante, em todas as ações realizadas, por discussões que ajudem os futuros professores a perceber a articulação entre os saberes do conteúdo, os saberes pedagógicos e os do conteúdo em ensino. Dessa forma, será viabilizada a compreensão de que a Matemática científica precisa desses saberes para ser "transformada" em uma Matemática escolar, que inclui habilidades e competências, em consonância com os significados socioculturais e com uma significação pedagógica para o aprendizado.

Nesta investigação foram observados aprendizados discentes e docentes em que o bolsista se reconhece como educando educador, que forma outros enquanto forma a si próprio nesse movimento conjunto. Além disso, reconhece a importância de uma mudança de postura do educando educador frente ao erro, seu próprio erro, enquanto aprendiz, e o erro de seu aluno, pois o erro é potencial de aprendizado.

Os futuros professores demonstram valorizar o viés da colaboração como forma de aprender junto, e, assim, reveem a imagem profissional do professor, a ser construída, enquanto identidade, no dia a dia dessa profissão. A visão dessa profissão, da Matemática e da aula de Matemática também aparece como aspecto refletido no intuito de aproximar essa disciplina de seus aprendizes, incluindo os próprios licenciandos. Além disso, aparecem aprendizados relativos à escrita, prática muitas vezes, mais distante do estudante de uma licenciatura em Matemática.

Nesse sentido, percebemos o quanto o Pibid também favorece uma reflexão sobre a própria formação oferecida pela licenciatura, sobre o que tem sido privilegiado ou esquecido em seu currículo. Dessa forma, tal reflexão impulsiona uma discussão mais apurada sobre como aproximar a formação inicial da escola, de seus atores e necessidades reais, visto que a educação é uma prática social contextualizada.

Referências

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico.** Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BRASIL. **Parecer CNE/CP 9/2001, de 8 de maio de 2001.** Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Brasília, 2001.

DEMO, P. **Pensando e Fazendo Educação** – Experiências e Inovação educacional. Brasília: Liber Livro, 2011.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. Mesa Redonda VII EPEM: SBEM-SP, **Anais...** São Paulo, Junho de 2004.

FRANÇA, T. M. S.; SOUSA, M.S., SOUSA, A. C. G. Roteiro didático: uma possibilidade de articulação entre teoria e prática. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO – XVI ENDIPE, 2012, Campinas/SP, Didática e Práticas de Ensino: compromisso com a escola pública, laica, gratuita e de qualidade, **Anais...** Campinas/SP: Junqueira & Marin Editores, Livro 3 - p.6901.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido.** 37 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2003.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1985.

FREIRE, P. **Educação e mudança.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1981.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** 2. ed. São Paulo: Autores Associados, 2008. (Coleção Formação de professores).

MIZUKAMI, M. G. N. Docência, trajetórias pessoais e desenvolvimento profissional. In: REALI, A. M. M. R.; MIZUKAMI, M. G. N. **Formação de professores**: tendências atuais. São Carlos,: Ed. UFSCar, PP. 59-91, 1996.

PAIVA, M. A. V. O professor de matemática e sua formação: a busca da identidade profissional. In: NACARATO, D. M e PAIVA, M. A. V. (Org.) **A formação do professor que ensina matemática:** perspectivas e pesquisas. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PÉREZ, G. Prática reflexiva do professor de matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.) **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004.

PIMENTA, S. G. Formação de professores: saberes da docência e identidade do professor. In FAZENDA, Ivani C. A. (Org.) **Didática e interdisciplinaridade**. São Paulo: Papirus, 1998.

SCHÖN, D. A. Formar professores como profissionais reflexivos. In: Nóvoa, A. (Coord.). **Os professores e a sua formação**. 2. ed. Lisboa: Dom Quixote, 1995.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **American Educational Research Association**, v. 15, Nn. 2, pp. 4-14, Feb., 1986.

SOUSA, M. C.; GAMA, R. P.; PASSOS, C. L. B. Aprendizagens da docência reveladas por licenciandos de matemática no projeto PIBID. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – XI ENEM, 2013, Curitiba. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas, **Anais...** Curitiba: PUC/PR, 2013.

SOUSA, M. S.; FRANÇA, T. M. S. (Coords.). **Diversidade de ações educativas:** formar, formando-se. Fortaleza: Encaixe, 2007.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR LICENCIANDOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E NA EXPLORAÇÃO-INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Gabriela Castro Silva Cavalheiro[1]
Renata Cristina Geromel Meneghetti[2]

RESUMO

Este artigo focaliza um trabalho realizado com licenciandos em Matemática junto a uma disciplina de prática pedagógica em uma instituição federal de ensino. Foram investigados os conhecimentos empregados pelos estudantes – em termos de conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais – durante uma aplicação de atividades sobre consumo de energia elétrica, segundo as abordagens de resolução de problemas (RP) e exploração-investigação matemática (EIM). Tal aplicação foi analisada segundo uma metodologia qualitativa, com enfoque em estudo de caso. Comparando-se RP com EIM, na aplicação das atividades, foi possível observar que os alunos mobilizaram conteúdos conceituais diferentes. Os procedimentais tiveram bastante proximidade, mas o maior distanciamento entre as duas abordagens ocorreu quanto aos conteúdos atitudinais. Ambas as abordagens se mostraram com um ótimo potencial didático-pedagógico para o ensino-aprendizagem de Matemática e a escolha entre utilizar uma ou outra dependerá dos propósitos que se pretende no desenvolvimento de conhecimentos matemáticos.

Palavras-chave:

Conteúdos conceituais, procedimentos e atitudinais. Licenciatura em matemática. Resolução de problemas. Exploração-investigação matemática.

Introdução

Neste artigo, apresenta-se um trabalho desenvolvido com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, em uma disciplina de prática pedagógica. Pesquisou-se quais conhecimentos os licenciandos mobilizaram – em termos de conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais – durante uma aplicação de atividades com o tema "consumo de energia elétrica", segundo as seguintes abordagens alternativas para o ensino-aprendizagem de Matemática: resolução de problemas (RP) e exploração-investigação matemática (EIM).

Referencial teórico

Segundo Zabala (1998, p. 30), "ao responder à pergunta 'o que se deve aprender?' devemos falar de conteúdos de natureza muito variada: dados, habilidades, técnicas, atitudes, conceitos, etc." Para esse autor, os conhecimentos podem ser classificados

[1]Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência pela Universidade Estadual Paulista/UNESP, Bauru-SP; Docente do Instituto Federal de São Paulo/IFSP, Araraquara-SP, Brasil. gcavalheiro@ifsp.edu.br
[2]Doutora em Educação Matemática; Livre-docente da Universidade de São Paulo/USP, São Carlos-SP; Professora colaboradora do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência/UNESP, Bauru-SP, Brasil. rcgm@icmc.usp.br

em três tipos de conteúdo: *conceituais* – o que se deve saber –, *procedimentais* – o que se deve saber fazer – e *atitudinais* – como se deve ser. Os conteúdos conceituais referem-se a fatos, dados, objetos, conceitos, símbolos e princípios; ou seja, é o conhecimento da matéria; já os procedimentais correspondem a técnicas, métodos, habilidades, procedimentos, coordenados visando-se a realização de um objetivo; por fim, os atitudinais englobam os valores, atitudes e normas dos estudantes.

A aprendizagem dos conteúdos de forma contextualizada, aplicados a situações do dia a dia do aluno, é algo defendido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM). Na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias,

> [...] o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social (BRASIL, 2000, p. 7).

Sobre o sentido do aprendizado nessa área, os PCNEM ainda apontam como um dos principais objetivos formativos a capacidade de se analisar representações gráficas e/ou algébricas relacionadas a contextos cotidianos. Inclusive, entre as competências e habilidades almejadas estão a busca e a sistematização de informações para a compreensão de situações-problema, a formulação de hipóteses e a elaboração de estratégias para o enfrentamento de questões (BRASIL, 2000).

Tudo isso vai ao encontro do que foi almejado na realização das atividades focadas neste trabalho: abordar, em cursos de formação docente, conteúdos de Matemática da educação básica de forma contextualizada a situações corriqueiras – como o consumo de energia elétrica – e, ainda, seguindo os pressupostos das abordagens metodológicas de RP e EIM, de tal forma a desenvolver as competências e habilidades mencionadas previamente.

Antes de tratar especificamente da RP e EIM, é importante definir os termos *problema* e *tarefa exploratório-investigativa* (TEI). Segundo Onuchic (1999, p. 215), "problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver". Já Ponte (2003) classifica as diversas tarefas desenvolvidas pelos alunos, distinguindo-as por meio do grau de dificuldade e de abertura que apresentem, conforme quadro 1.

Tarefa	Grau de dificuldade	Grau de abertura
Problema	Difícil	Fechado
Exploração	Fácil	Aberto
Investigação	Difícil	Aberto
Exploratório-investigativa (TEI)	Fácil a difícil, depende do aluno	Aberto

Quadro 1 – Diferentes tipos de tarefas segundo grau de dificuldade e de abertura
Fonte: Elaborado pelas autoras a partir de Ponte (2003)

Embora Ponte (2003) não utilize o termo TEI, pois ele diferencia a tarefa exploratória da investigativa, adota-se neste texto tal termo – como em Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) –, pois se acredita que o nível de dificuldade que as distingue é algo pessoal, não sendo possível definir sobre isso *a priori*.

A RP e a EIM são concebidas como abordagens alternativas para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática – nas quais professor e aluno desempenham papéis fundamentais. Elas invertem a ordem tradicional da aula. Ao invés de os alunos "receberem" os conteúdos do professor para simplesmente reproduzi-los em meros exercícios de fixação, nessas abordagens os estudantes são estimulados a buscar e construir novos conhecimentos a partir de situações propostas (problemas ou TEI); somente após essa etapa o docente apresentará formalmente os conteúdos da aula (vide quadro 2).

Características	RP	EIM
Ponto de partida	Problema	TEI
Ponto de chegada	Única possibilidade de resposta	Várias respostas
Novos conhecimentos	Construídos pelos alunos com a devida orientação e supervisão docente	Construídos pelos alunos com a devida orientação e supervisão docente
Etapas	O professor deverá: formar grupos de alunos; entregar a atividade proposta; observar, orientar e avaliar o trabalho discente; anotar os resultados na lousa; discutir e chegar a um consenso com os alunos; formalizar os conteúdos abordados nos problemas.	O aluno deverá: reconhecer a situação, explorá-la preliminarmente e formular questões; formular conjecturas a partir da organização dos dados; realizar testes e eventual refinamento das conjecturas; justificar e avaliar o trabalho através de argumentações ou demonstrações.

Quadro 2 – Semelhanças e diferenças entre RP e EIM
Fonte: Elaborado pelas autoras, considerando Onuchic (1999) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2003)

A escolha pela realização deste trabalho, em um curso de licenciatura, foi proposital, pois, para Nóvoa (1992), é preciso diversificar modelos e práticas formativas, buscando instituir novos relacionamentos dos professores com os saberes científicos e pedagógicos. Nesse sentido, há estudos que discutiram e trabalharam uma das abordagens citadas neste artigo em cursos de formação inicial docente. É o caso de Meneghetti e Redling (2008) – que tratou da investigação matemática nesse contexto – e Proença (2012).

Este último autor, em sua tese de doutorado, investigou o impacto de uma intervenção baseada em um curso sobre RP na formação inicial de professores de Matemática, durante o estágio supervisionado. A maioria dos licenciandos conseguiu articular as teorias do curso com a prática de regência, além de demonstrar capacidade para ensinar Matemática através da RP (PROENÇA, 2012).

Descrição e análise do trabalho desenvolvido

Realizou-se uma aplicação de atividades que foram analisadas à luz de uma metodologia qualitativa, com enfoque em estudo de caso. O caso se refere aos alunos da disciplina de Prática Pedagógica III, que é oferecida no segundo ano (3º semestre), do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

federal de ensino no interior do estado de São Paulo. Tal disciplina possui caráter eminentemente prático, tendo por objetivo capacitar o aluno a preparar e planejar aulas mediante a orientação docente. As atividades foram aplicadas pela primeira autora deste trabalho (aqui denominada de PP), docente responsável pela disciplina, sob a orientação da segunda autora.

Foram elaboradas e aplicadas atividades que abordaram conteúdos matemáticos referentes à educação básica, visando introduzir e desenvolver o conceito de função. Buscou-se adotar contextos e conteúdos similares na RP e na EIM, todos em torno da temática "consumo de energia elétrica". Para ancoleta de dados, foram utilizadas fichas de atividades – contendo as tarefas e os problemas propostos – e relatórios de aplicação das atividades, redigidos pela PP.

Tal aplicação foi desenvolvida durante cinco aulas distribuídas ao longo de três dias. Nos dois primeiros dias, foram aplicadas as duas fichas de atividades. Uma delas continha três problemas e a outra, três TEI, conforme pode ser verificado na figura 1, apresentada a seguir:

PROBLEMAS

Conforme determinação da Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel), está vigorando desde 1º de janeiro de 2015, em todo o país, o Sistema de Bandeiras Tarifárias, representadas pelas cores verde, amarelo e vermelho, conforme mostra a figura abaixo. Esse sistema altera a fórmula de cálculo da energia elétrica, e busca sinalizar ao consumidor sobre a variação do custo de energia conforme a fonte de geração, hidroelétricas ou térmicas. O consumo de energia elétrica é medido em kWh, sendo que o cálculo do custo de energia para o consumidor (conta de energia, em reais) é feito através da multiplicação da tarifa de energia (em reais) pela quantidade consumida no mês.

Instrução: As bandeiras são aplicadas a todos os consumidores, mesmo para quem consuma menos de 100kWh. Os valores de acréscimo das bandeiras amarela e vermelha (R$ 1,50 e R$ 3,00, respectivamente) são para cada 100kWh, sendo cobrados proporcionalmente para consumos que não sejam múltiplos de 100. Suponha que, durante o mês de janeiro/2015, uma família consumiu 120kWh e a conta de energia foi de R$ 48,00 estando estabelecido neste mês a bandeira verde. Considerando essa situação, resolva:

Problema 1: Qual o valor a pagar, considerando a situação de bandeira verde, se o consumo no mês seguinte for de 180kWh?

Problema 2: Se estivesse vigorando bandeira amarela em janeiro/2015 e bandeira vermelha em fevereiro/2015, quais seriam os valores das respectivas contas de energia?

Problema 3: Qual o valor da tarifa de energia vigente, ou seja, o custo de 1kWh? Encontre uma fórmula que relacione o consumo de energia em um mês qualquer com o total a pagar. Faça isso para cada uma das situações de bandeira tarifária (verde, amarela e vermelha).

TAREFAS

A seguinte tabela apresenta uma lista de equipamentos e eletrodomésticos que podem estar presentes em uma residência e as respectivas potências de cada um.

A quantidade de energia consumida no mês (em kWh), de cada item, é o resultado da multiplicação de três valores: potência (em kW), tempo de uso diário (em h), e dias de uso no mês.

Item	Potência [W]	Tempo uso/dia [h]	Dias uso/mês	Energia mês [kWh]
Ventilador	40	10	30	12
Computador	50	10	30	15
Televisor	80	10	30	24
Lâmpadas	100	6	30	18
Refrigerador	150	24	30	108
Lavadora roupas	200	1	15	3
Ferro elétrico	1000	1	20	20
Ar condicionado	3000	8	10	240
Chuveiro	4000	0,5	30	60

Instrução: Para responder às tarefas 1 e 2 não é necessário utilizar todos os itens da tabela acima. Além disso, conforme a conveniência, o tempo de uso diário e os dias de uso no mês podem ser diferentes daqueles apresentados na tabela.

Tarefa 1: Uma determinada família possui todos os itens da tabela e os utiliza durante tempo e dias de acordo com essa mesma tabela. Imagine que ela tenha que reduzir o consumo de energia pela metade devido a restrições impostas no fornecimento. Diante de tal necessidade, proponha uma sugestão de ação para que isso ocorra. Justifique.

Tarefa 2: Suponha que haja um limite máximo de consumo de energia de 300kWh para consumidores residenciais e 700kWh para os comerciais. Ilustre um cenário de limite máximo de consumo para cada tipo de consumidor, indicando escolha de itens, tempo e dias de uso no mês.

Tarefa 3: Imagine que o tempo de uso (diário e/ou mensal) varie igualmente para todos os itens da tabela. Escreva uma fórmula que relacione a energia consumida (em kWh), as potências dos itens (utilizar todos eles) e o tempo de uso. Que conclusões você pode tirar dessa fórmula?

Figura 1 – Recorte das fichas de atividades, contendo os problemas e as TEI
Fonte: Elaborado pelas autoras

O terceiro dia iniciou-se com o fechamento das atividades da aula anterior. Participaram desta aplicação treze alunos, seis do sexo feminino e sete do sexo masculino, todos do curso de Licenciatura em Matemática. A pedido da PP, eles se organizaram em seis duplas mais um aluno, que preferiu ficar sozinho. Cada um escolheu o colega com o qual formou parceria. Na resolução dos problemas, foram identificados os seguintes conhecimentos matemáticos mobilizados pelos licenciandos:

Problema 1: todos os alunos utilizaram regra de três simples, variando apenas os números que escolheram para compor a regra, conforme mostra a figura 2.

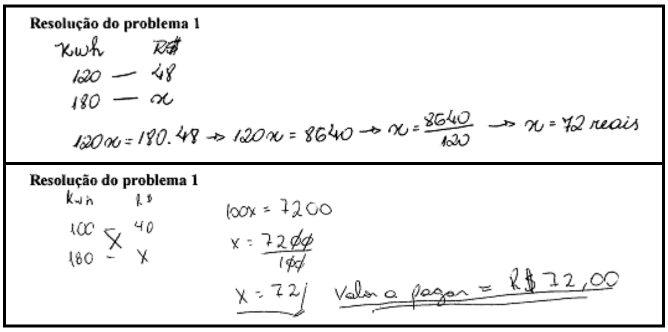


Figura 2 – Resolução do problema 1 por duas duplas diferentes de alunos
Fonte: Elaborado pelas autoras

No problema 2 novamente os alunos usaram regra de três simples, sendo que uma dupla utilizou apenas as operações de divisão, multiplicação e adição sem explicitar a regra de três. Outra dupla compreendeu de forma equivocada as contas de tarifação das bandeiras e, por isso, chegou a uma resposta incorreta. O aluno que optou por desenvolver a atividade sozinho, teve dificuldade e não conseguiu resolver todo o problema.

Para o problema 3, não houve um consenso em relação às formulas apresentadas. As duplas empregaram regra de três ou o valor unitário do kWh para chegar às respostas, as quais só foram totalmente corretas para três duplas, parcialmente certas para duas duplas, incorreta para uma dupla (aquela do problema 2 que teve compreensão equivocada) e em branco para o aluno que resolveu sozinho.

Para as TEI, foram visualizados os conhecimentos matemáticos descritos a seguir.

Tarefa 1: algumas duplas mantiveram todos os itens, reduzindo igualmente (ou não) tempo de uso diário (como na figura 3). Nas demais propostas, ao identificarem itens com maior impacto no consumo, os alunos optaram por eliminar o tempo de uso do ar condicionado, e também reduzir o tempo do ferro ou do chuveiro.

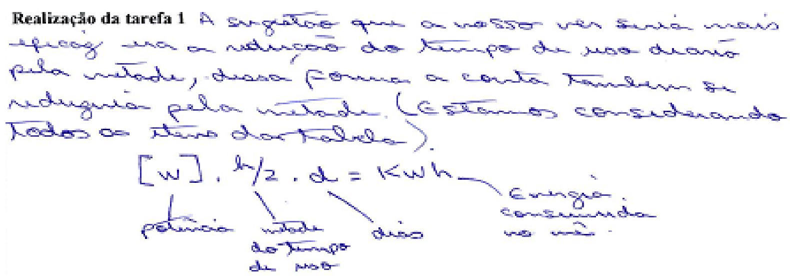


Figura 3 – Realização da tarefa 1 utilizando fórmula para representar e justificar sua proposta
Fonte: Elaborado pelas autoras

Tarefa 2: seguiu praticamente a mesma linha de raciocínio da tarefa 1. A dupla, cuja resposta da tarefa 1 está na figura 3, respondeu a esta tarefa utilizando porcentagem. Eles descobriram que 700 representa um acréscimo de 40% a mais em relação a 500 (consumo total de energia – tarefa 1), enquanto que 300 seria 40% a menos.

Tarefa 3: os alunos tiveram mais dificuldade, tanto na compreensão quanto na realização da tarefa, pois, segundo eles, não estava suficientemente claro o enunciado. O aluno sozinho deixou a resposta em branco. Poucas duplas conseguiram realizar esta tarefa com sucesso.

Em relação às atividades aplicadas, o quadro 3 apresenta os conhecimentos que os licenciandos mobilizaram frente às duas abordagens focalizadas neste trabalho.

Abordagem	Conteúdos		
	Conceituais	Procedimentais	Atitudinais
RP	Fatos, dados, símbolos do texto e da figura; Operações aritméticas básicas Regra de três simples.	Ler, interpretar e selecionar informações no texto e na figura; Identificar e relacionar os números para realizar as operações e para montar a regra de três.	Diálogo e sintonia entre as formas de pensamento; Atitude bastante favorável em relação à Matemática; Motivação e empenho na resolução dos problemas.
EIM	Fatos, dados, símbolos do texto e da tabela; Proporcionalidade; Porcentagem; Elaboração de fórmulas.	Ler, interpretar e selecionar informações no texto e na tabela; Reconhecer grandezas proporcionais, realizar cálculo de porcentagens e elaborar fórmulas que generalizam uma situação.	Discussão e negociação de ideias com o colega; Propostas condizentes com a realidade; Atitude favorável frente à Matemática; Cumprimento das TEI, com preocupação em justificar/argumentar.

Quadro 3 – Conhecimentos mobilizados pelos licenciandos nas abordagens de RP e EIM
Fonte: Elaborado pelas autoras segundo tipologia de Zabala (1998)

Pela análise desta aplicação, sintetizada no quadro 3, pode-se perceber que os conhecimentos mobilizados pelos alunos nas duas abordagens foram diferentes. Em termos de conteúdos conceituais, na RP eles utilizaram regra de três e operações aritméticas básicas, enquanto que na EIM empregaram proporcionalidade, porcentagem e elaboração de fórmulas. Em ambas as abordagens eles lançaram mão de procedimentos de interpretação de dados, fatos e símbolos, reconhecimento e relacionamento de números e grandezas. Mas foi nos conteúdos atitudinais que se observou maior diferença entre RP e EIM. No emprego de RP, observou-se que a convergência entre ideias, a motivação e uma atitude favorável frente à aprendizagem de Matemática se fizeram mais fortemente presentes quando comparada com a realização das atividades via EIM. Além disso, percebeu-se que na EIM houve maior necessidade tanto de negociação de ideias quanto de argumentação, tendo demandado mais tempo no desenvolvimento desse último tipo de atividade.

Considerações finais

Na realização das atividades, comparando-se RP com EIM, observou-se que os estudantes mobilizaram conteúdos conceituais diferentes, ao contrário dos procedimentais, que tiveram bastante proximidade. O maior distanciamento foi notado nos conteúdos atitudinais. Observou-se que ambas as abordagens se mostraram com ótimo potencial didático-pedagógico no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, embora se ressalte algumas diferenças quanto aos conteúdos mobilizados pelos alunos, conforme apresentado no quadro 3.

Durante o processo de aplicação, os alunos relataram ter mais dificuldade nas TEI do que na RP. Dessa forma, entende-se que na escolha entre uma ou outra abordagem, devem ser considerados os propósitos das atividades e o nível de conhecimento que se pretende atingir. Foi possível observar que o trabalho com a RP permitiu maior entrosamento entre os alunos e afinidade nas respostas, enquanto que as TEI, por serem abertas, estimularam uma discussão em um nível em que cada um tentava argumentar seu ponto de vista e se preocupava com uma justificativa.

Por fim, o fato de o licenciando, que optou por desenvolver as atividades sozinho, não ter conseguido finalizar todas as atividades sugere a relevância de se propor tais abordagens por meio do trabalho em grupo, promovendo a sociabilização de conhecimentos, as trocas de ideias e experiências, buscando um aprendizado mais significativo e profundo. Além disso, percebeu-se a importância da contextualização, da interdisciplinaridade – sempre que possível – e principalmente da conexão e da interligação entre os conteúdos matemáticos. Concorda-se, portanto, que em cursos de formação inicial docente é importante proporcionar uma vivência, a exploração e a discussão a respeito de abordagens alternativas de ensino como as que foram abordadas neste artigo.

Referências

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais.** Ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E.M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR, 2005, LISBOA. **Anais...** Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005. p. 1-22.

MENEGHETTI, R. C. G.; REDLING, J. P. O processo de elaboração de tarefas didáticas alternativas para o ensino de matemática como possibilidade de trabalho em curso de formação de professores. **Revista Quadrante**, Lisboa, v. XVII, n. 2, p. 23-46, 2008.

NÓVOA, A. Formação de professores e profissão docente. In _______. (Org.). **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1992. p. 13-33.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 199-218.

PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do ProfMat. Lisboa: APM, 2003, p. 25-39.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PROENÇA, M. C. **A resolução de problemas na licenciatura em matemática**: análise de um processo de formação no contexto do estágio curricular supervisionado. 2012. 208 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2012.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

POTENCIALIDADES DE DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE EM UM GRUPO COOPERATIVO

Thais Helena Inglêz Silva[1]
Alessandro Jacques Ribeiro[2]

RESUMO

Buscando investigar o Conhecimento Matemático para o Ensino de Equação, este trabalho enfoca o desenvolvimento de uma atividade em um grupo cooperativo, constituído por três professores da Educação Básica. Tal atividade integra uma pesquisa de mestrado que teve por objetivo verificar manifestações dos conhecimentos profissionais docentes, mobilizados quando professores refletem sobre práticas avaliativas. Com este artigo, discute-se a importância de ambientes de cooperação para o desenvolvimento dos conhecimentos profissionais docentes, mediados pela reflexão em relação a determinados conceitos algébricos. Para as análises, é apresentada uma situação na qual os professores são levados a refletir sobre o conceito de equação, na qual demonstram mudanças em seus posicionamentos. Dentre nossos resultados, observamos que faltam ainda pesquisas que mostrem se este tipo de mudança impacta, além das percepções dos professores, os resultados apresentados por estudantes.

Palavras-chave:

Equação. Conhecimento Matemático para o Ensino. Grupos Cooperativos.

Introdução

Investigar quais são os conhecimentos necessários para ensinar álgebra na educação básica é o desafio que nos propomos a desvelar com o projeto *"Conhecimento Matemático para o Ensino de Álgebra: uma abordagem baseada em perfis conceituais"*, financiado pelo programa Observatório da Educação (OBEDUC), da Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (Capes). O grupo de participantes do projeto, integrado por estudantes de graduação, mestrandos, doutorandos e professores da educação básica e ensino superior, dividiu-se em três subgrupos responsáveis, cada qual, por investigar as relações da álgebra com a aritmética e com a análise, com a geometria e com a álgebra *per se*.

Cada subgrupo elencou conceitos matemáticos centrais para suas investigações. O subgrupo responsável por investigar a álgebra *per se* elegeu o conceito de equação, dando sequência, também, a agenda de pesquisas de Ribeiro (2012, 2013) acerca da solidificação de um Perfil Conceitual de Equação. É

[1]Mestre em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, SP, Brasil. E-mail: thaisinglez@gmail.com
[2]Doutor em Educação Matemática pela PUC/SP; Professor na Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, SP, Brasil. Coordenador do Grupo de Pesquisa/CNPq *"FORMATE – Formação Matemática para o Ensino"*. E-mail: alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

especificamente neste âmbito de pesquisa que os resultados que apresentamos neste artigo foram produzidos.

Este trabalho é produto de uma dissertação de mestrado (SILVA, 2015), desenvolvida no cenário apresentado acima, a qual teve como um de seus objetivos específicos: *reconhecer os tipos de Conhecimentos Profissionais Docentes que emergem quando os professores estão envolvidos em processos de avaliação sobre equações*. Apesar de o trabalho se desenvolver dentro da temática do Perfil Conceitual de Equação, não o tomaremos como referencial para apresentar nossos resultados, uma vez que o recorte que fazemos, neste momento, enfoca a contribuição de espaços de cooperação para o desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino de Equação.

Apresentamos, a seguir, o referencial teórico adotado para abordar esta temática e uma enunciação do objetivo deste artigo. Na sequência, é apresentada a metodologia e os resultados de uma atividade desenvolvida no âmbito dessa investigação de mestrado, suas discussões e considerações acerca das potencialidades dos espaços cooperativos.

Referencial teórico

Conhecimento Matemático para o Ensino é um termo cunhado por Ball e colaboradores que reúne diferentes conhecimentos necessários para ensinar conceitos matemáticos. Essa ideia se apoia nos trabalhos de Shulman (1986, 1987), nos quais é apresentada uma *base de conhecimentos para o ensino*. A organização sistemática de um conjunto de conhecimentos, que seria requerido ao professor para ensinar, impactou amplamente as pesquisas em educação, que passaram a ver o trabalho de Shulman como suporte à valorização da profissão docente, particularmente porque dentre os conhecimentos por ele elencados encontrava-se o chamado Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*PCK*, do original em inglês, *Pedagogical Content Knowledge*).

O PCK é um tipo de conhecimento específico do professor e correspondente à relação entre o conhecimento específico do conteúdo e o conhecimento das práticas pedagógicas. Essa relação, no entanto, não é uma superposição de conhecimentos, mas se constitui pelas conexões indissociáveis entre um e outro. Por exemplo, refere-se “as formas de representação mais usuais das ideias, as analogias mais poderosas — ilustrações, exemplos, explanações e demonstrações” (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa), ou seja, aspectos exclusivos do *métier* do professor. Além do PCK, Shulman elencou o Conhecimento Específico do Conteúdo e o Conhecimento do Conteúdo e o Currículo, no trabalho de 1986, como componentes da base de conhecimentos docentes, a qual, no trabalho de 1987, foi ampliada com a inserção de outras quatro categorias.

Inspirados nesse trabalho e buscando uma aproximação do mesmo com a Educação Matemática, bem como com as relações do exercício da profissão docente, Ball e seus colaboradores reorganizaram as categorias de Shulman em domínios e subdomínios, como apresentado na Figura 1. Esta organização foi chamada de Conhecimento Matemático para o Ensino (*MKT*, do original em inglês, *Mathematical Knowledge for Teaching)*.

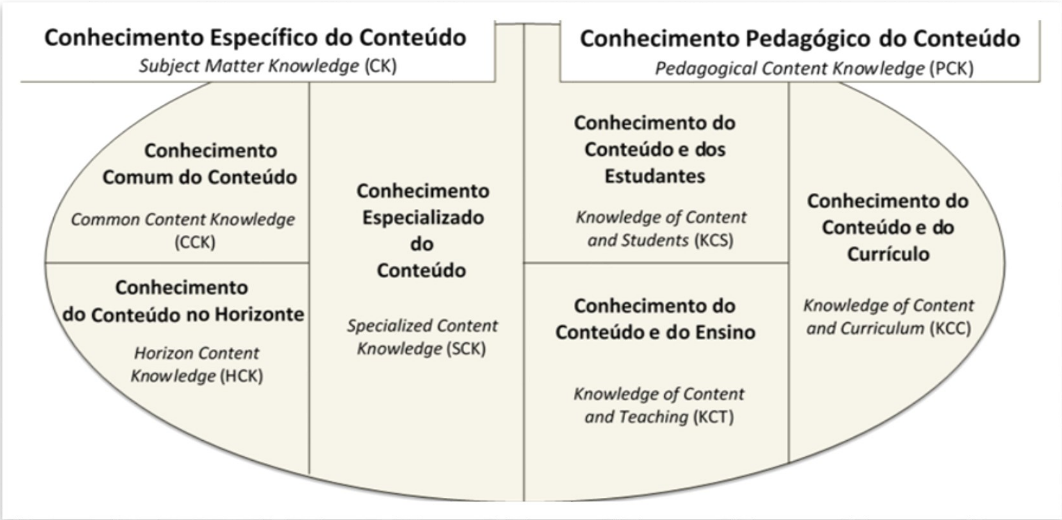


Figura 1 - Domínios e subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino
Fonte: Elabora pelos autores a partir da tradução do original de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403).

O Conhecimento Matemático para o Ensino está associado ao ensino de determinado conteúdo ou conceito e, no caso deste trabalho, ao conceito de equação. Para abordá-lo, trazemos o trabalho de Attorps (2003), no qual foram investigadas as concepções de equação de 10 professores, entre recém-formados e experientes. Como resultados, Attorps listou seis categorias de compreensões equivocadas sobre o conceito de equação – Quadro 1 – sendo as cinco primeiras parte da definição de equação, mas não identificadas pelos professores, e a última não atendendo ao conceito de equação, mas por vezes foi identificada como tal.

Categoria	Exemplo	Explicação	Categoria	Exemplo	Explicação
1) Identidade	$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$	Regra, fórmula, resultado, identidade, etc.	**4) Triviais**	$x = 2$	Solução, expressão para o valor de x.
2) Equações não algébricas	$\int f(x)dx = x^2 + C$	Integrais, derivadas, área sob uma curva, etc.	**5) Funções**	$f(x) = 2x + 1$	Função.
3) Mais de uma variável	$2x + 5y = \sqrt{a}$	Fórmula, algo que não seja possível de resolver.	**6) Inequações e expressões**	$x + 1 \geq 2$	Inequações.

Quadro 1 - Categorias distintas da definição de equação e seus exemplos
Fonte: adaptado de Silva (2015, p. 57)

Por fim, para justificar a escolha teórico-metodológica da terceira etapa de nossa pesquisa, bem como para dar forma ao objetivo especifico do presente artigo, trazemos o conceito de trabalho cooperativo apresentado em Fiorentini (2004), a partir das ideias de Hall e Wallace (1993, *apud* FIORENTINI, 2004) e de Boavida e Ponte (2002, *apud* FIORENTINI, 2004). Define-se o trabalho cooperativo como uma "fase de trabalho coletivo que ainda não chega a ser colaborativo, pois no trabalho cooperativo, apesar da realização de ações conjuntas e de comum acordo, parte do grupo não tem autonomia e poder de decisão sobre elas" (FIORENTINI, 2004, p. 56).

Assim, objetivamos, com a análise do desenvolvimento de uma atividade realizada em ambiente de cooperação, discorrer sobre (algumas) modificações no Conhecimento Matemático para o Ensino de Equação dos professores envolvidos, quando eles interagem entre si e com a pesquisadora. Com isso, pretendemos argumentar no sentido da importância de momentos de reflexão cooperativos/colaborativos para a formação de professores e também para o desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática.

Metodologia

A pesquisa de mestrado que originou o presente artigo foi estruturada em três etapas, sendo todas elas concebidas sob um viés qualitativo e interpretativo. Particularmente, a etapa em questão organiza-se com características de um grupo focal, no qual, conforme Gondim:

> O moderador de um grupo focal assume uma posição de facilitador do processo de discussão, e sua ênfase está nos processos psicossociais que emergem, ou seja, no jogo de interinfluências da formação de opiniões sobre um determinado tema. Os entrevistadores de grupo pretendem ouvir a opinião de cada um e comparar suas respostas; sendo assim, o seu nível de análise é o indivíduo no grupo. (2002, p. 151)

A seleção dos participantes foi realizada por meio de um formulário disponível na Internet e levado a um encontro de professores da rede Estadual, no município de Santo André, o que figurou a primeira etapa da pesquisa. Responderam ao formulário 21 professores, dos quais 6 participaram de entrevistas individuais na segunda etapa da pesquisa e, na terceira e última, estiveram presentes 3 professores. Esse afunilamento no número de participantes ocorreu naturalmente, conforme a disponibilidade de cada um deles.

Chamamos os três participantes da terceira etapa pelos nomes fictícios Annabeth, Clarisse e Percy. Todos são formados em licenciatura em matemática, com diferentes tempos de atuação. Annabeth, a mais experiente, na ocasião lecionava para os 6º e 9º anos do Ensino Fundamental, após 12 dos 17 anos de experiência trabalhando exclusivamente com o Ensino Médio. Clarisse lecionava para o 8º ano do Ensino Fundamental e para o 2º ano do Ensino Médio, tendo sempre trabalhado com os dois níveis de ensino. Percy lecionava para os 2º e 3º anos do Ensino Médio, não tendo experiência com os 6º e 7º anos do Ensino Fundamental.

A terceira etapa ocorreu em três encontros, realizados na Universidade Federal do ABC (UFABC), estruturados em torno de quatro ou cinco atividades previamente planejadas. Neste artigo, apresentamos os resultados da primeira atividade desenvolvida no segundo encontro desta terceira etapa, inspirada no trabalho de Attorps (2003). A atividade solicitava aos professores que assinalassem, ao lado de cada sentença ou expressão, S para aquelas que acreditavam tratar-se de equação e N para as que acreditavam não se tratar. O Quadro 2 apresenta a ficha recebida pelos professores, bem como nossas intenções com relação a cada sentença.

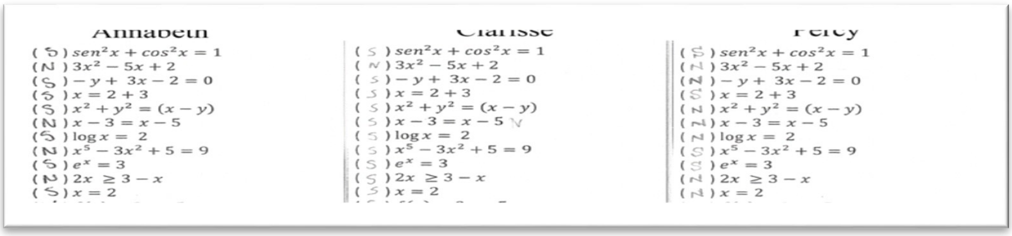
Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

1. ( ) $sen^2x + cos^2x = 1$	1 - Identidades	7. ( ) $\log x = 2$	Eq. sem procedimento de resolução definido
2. ( ) $3x^2 - 5x + 2$	6 - Expressões	8. ( ) $x^5 - 3x^2 + 5 = 9$	
3. ( ) $-y + 3x - 2 = 0$	3 - Mais de uma incógnita	9. ( ) $e^x = 3$	
4. ( ) $x = 2 + 3$	4 - Equações triviais	10. ( ) $2x \geq 3 - x$	6 - Inequações
5. ( ) $x^2 + y^2 = (x - y)$		11. ( ) $x = 2$	4 - Equações triviais
6. ( ) $x - 3 = x - 5$	Equações sem solução	12. ( ) $f(x) = 2x - 5$	5 - Funções

Quadro 2 - Ficha da primeira atividade desenvolvida no segundo encontro com os professores.
Fonte: Adaptado de Silva (2015, p. 132)

Discussão dos resultados

Como a atividade em questão foi desenvolvida no segundo encontro da terceira etapa, os professores já se conheciam e já haviam passado pela experiência da atividade cooperativa, ao trocar informações e defender suas opiniões quando da realização de outra atividade. Sendo assim, logo que findaram o preenchimento das fichas individualmente, espontaneamente passaram a compartilhar suas impressões sobre as sentenças e expressões.



Annabeth	Clarisse	Percy
(S) $sen^2x + cos^2x = 1$	(S) $sen^2x + cos^2x = 1$	(S) $sen^2x + cos^2x = 1$
(N) $3x^2 - 5x + 2$	(N) $3x^2 - 5x + 2$	(N) $3x^2 - 5x + 2$
(S) $-y + 3x - 2 = 0$	(S) $-y + 3x - 2 = 0$	(N) $-y + 3x - 2 = 0$
(S) $x = 2 + 3$	(S) $x = 2 + 3$	(S) $x = 2 + 3$
(S) $x^2 + y^2 = (x - y)$	(S) $x^2 + y^2 = (x - y)$	(N) $x^2 + y^2 = (x - y)$
(N) $x - 3 = x - 5$	(S) $x - 3 = x - 5$ N	(N) $x - 3 = x - 5$
(S) $\log x = 2$	(S) $\log x = 2$	(N) $\log x = 2$
(N) $x^5 - 3x^2 + 5 = 9$	(S) $x^5 - 3x^2 + 5 = 9$	(S) $x^5 - 3x^2 + 5 = 9$
(S) $e^x = 3$	(S) $e^x = 3$	(S) $e^x = 3$
(N) $2x \geq 3 - x$	(S) $2x \geq 3 - x$	(N) $2x \geq 3 - x$
(S) $x = 2$	(S) $x = 2$	(N) $x = 2$

Figura 2 - Fichas preenchidas por cada professor referentes à primeira atividade do segundo encontro

Analisando os resultados obtidos nas fichas, destacamos: a. todos os docentes identificaram a sentença 1, que na verdade é uma identidade, como sendo uma equação, ao contrário do esperado, uma vez que o não reconhecimento desse tipo de equação é uma das concepções alternativas apontadas por Attorps (2003) em seu trabalho; b. nenhum docente identificou a sentença 2 como equação, a qual também refere-se a uma das concepções alternativas de Attorps, sobre a identificação de expressões algébricas como equações; c. todos os docentes concordam que a sentença 4 é uma equação, mesmo que o sinal de igualdade tenha apenas papel de operador[3]; d. em todas as outras sentenças não houve consenso entre os participantes.

Com relação às discussões, Clarisse começou argumentando o critério que usara: "*Bom, eu parti do princípio que se eu tenho os dois membros e uma igualdade, eu tenho uma equação*", ao que Annabeth respondeu, sobre a quinta sentença: "*Então, mas se* [for uma] *igualdade, que tem a questão do equilíbrio*, [essa] *daqui vai ser* *(x + y).(x - y). Não tem como ser igual a x - y, então vai ser falso*". Annabeth argumentou no sentido de dizer que se não há solução possível, a sentença não se trata de uma equação.

Chamamos estes aspectos sobre o conceito de equação, levantados pelos professores, como a necessidade da existência de solução, de pontos de observação. Foram assim chamados por se tratarem de

[3]A este sentido, ver o trabalho de Kieran (1981) ou o de Trivilin e Ribeiro (2015).

aspectos significativos para a discussão, sobre os quais planejamos as ações do último encontro e que discutimos com maior profundidade na dissertação. Na totalidade do encontro, foram levantados e, em alguns casos, discutidos, sete pontos de observação, a saber: a necessidade da existência de incógnita, a quantidade de incógnitas possíveis, a diferenciação entre incógnita e variável, a necessidade de haver solução para configurar uma equação, a quantidade de soluções possíveis, a relação entre os conceitos de função e de equação e o papel do livro didático na construção do conceito de equação. Discorremos sobre alguns deles, conforme apresentamos as situações.

Um momento de mudança de concepção ocorreu quando os professores estavam discutindo sobre a quantidade de soluções possíveis para uma equação. A pesquisadora questionou: "*Então, é condição necessária pra ser uma equação eu ter um número finito de soluções?*", ao que Annabeth respondeu: "*Eu, até então, acreditava que sim*". É importante destacar que, apesar de ter essa crença, Annabeth havia assinalado a identidade da sentença 1 como equação, a qual possui infinitas soluções. Isso evidencia que o conceito de equação, embora amplamente utilizado pelos professores, não está bem construído em seus conhecimentos. Annabeth tomou consciência disso quando disse: "*Na verdade nós não construímos esse conceito, nós aceitamos esse conceito pronto* [...] *eu não paro pra pensar se aquilo era ou não uma equação, tá posto que é uma equação, eu não me questionava*".

Outro importante momento de mudança de posicionamento, agora tendo por base o grupo como um todo, foi em relação à existência de solução das/nas equações. Percy argumentou que o fato de não haver solução não significa que uma sentença não possa ser chamada de equação, enquanto "*Annabeth e Clarisse justificam que não existe a ideia de uma igualdade falsa, logo, para ser equação, a igualdade deve ser satisfeita para algum valor*" (SILVA, 2015, p. 137). Percy defendeu seu argumento de que, para ser equação, não é necessário verificar a existência de soluções dizendo: "[...] *se a gente prestar atenção à nossa prática, o que que a gente acaba dizendo? Que é uma equação sem solução. Então a gente afirma que é uma equação. Depois que a gente vem afirmar que é sem solução*".

Para entrar em um consenso, os professores seguiram apresentando seus pontos de vista e manifestando mudanças de opinião, a todo tempo. É o caso de Clarisse, ao dizer: "*Uma equação é a apresentação de duas sentenças matemáticas ou de valores. Se ela tem solução ou não, é uma coisa que vem depois. Então, basicamente, uma equação é uma apresentação*". Como Annabeth ainda não concordava com o argumento de Percy e de Clarisse, disse "*e se você tem uma equação enorme, que você não consegue achar o valor de cara, ela deixa de ser uma equação?*" Queremos fundamentar, por meio destes episódios, o quão rica é a discussão dos participantes em um ambiente de cooperação, uma vez que, por sua própria conta, os professores procuraram encontrar argumentos, justificativas e exemplos para ilustrar seus pontos de vista.

Nessa atividade, identificamos a manifestação e o desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino de Equação em alguns momentos. Quando os professores relatam sua prática em sala de aula, como Percy fez ao argumentar sobre a necessidade de existência de solução, em nosso entendimento,

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

ele manifesta elementos do subdomínio de Conhecimento do Conteúdo e do Ensino. Este subdomínio é ampliado por ele e pelas outras professoras no compartilhamento de suas práticas, ao ouvirem sobre outras situações de ensino e sobre como cada professor aborda determinados conteúdos em sala de aula.

Há manifestação do Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes quando os professores relatam como seus alunos reagem ao ver determinadas equações e se eles saberiam dizer se certas sentenças são ou não equações. Isso ocorreu, nesta atividade, em outra passagem que não foi possível relatar neste artigo[4]. Há também, segundo nossa interpretação, uma evidente manifestação tanto do Conhecimento Comum do Conteúdo Equação - saber identificar o que é e o que não é uma equação - quanto do Conhecimento Especializado do Conteúdo Equação - saber justificar suas escolhas, exemplificar, apresentar contraexemplos para defender sua opinião.

Considerações finais

Gostaríamos de defender, a partir dos resultados de nossa pesquisa, que atividades que proponham a interação e o compartilhamento de experiências entre professores, particularmente em grupos que trabalham em modalidade de cooperação ou colaboração, são propícias tanto para apreender o Conhecimento Matemático para o Ensino de determinado conteúdo quanto para desenvolvê-lo. Percebemos que, ao propor um ambiente de formação continuada na perspectiva cooperativa, isso se mostrou útil não só para a compreensão de elementos importantes acerca do ensino de equação, mas, também, para os participantes da pesquisa, os quais não apenas contribuem com ela, mas também agregam conhecimentos e novas práticas ao seu repertório.

Desta forma, pesquisas em ambientes de cooperação são ferramentas tanto para ampliar as fronteiras do conhecimento sobre determinado assunto, para a academia, quanto para ampliar as fronteiras individuais da prática dos professores participantes. Dessa maneira, essa prática tanto é uma atividade de transformação potencial - os resultados das pesquisas que podem ser convertidos em planejamento da formação de professores –, mas, também, atual, por alterar a atividade didática dos participantes - se não em nível prático, ao menos na compreensão do conceito.

Particularmente, investigar o Conhecimento Matemático para o Ensino tem se mostrado um caminho rico para isso. Ao mesmo tempo em que podemos identificar quais conhecimentos são essenciais para a formação de professores, o que é fundamental para repensar os cursos de formação inicial e/ou continuada, também, ao possibilitar que o professor tome consciência desses conhecimentos que, muitas vezes, já tem construídos, permite que ele os aprofunde e os clarifique. Espera-se, por conseguinte, que isso resulte em uma apresentação dos conceitos de maneira mais clara, precisa e segura. Essa ocorrência, entretanto, precisa ser temática de outras investigações.

Referências

ATTORPS, I. Teacher's Images of the "Equation" Concept. In: CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 3., 2003, Bellaria. **Proceedings**… Pisa: ERME, 2003.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, Thousand Oaks, v. 59, p. 389-407, 2008.

BOAVIDA, A; PONTE, J. P. da. Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**, n. 1, p. 43-55, 2002.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. Cap. 2. p. 47-76

GONDIM, S. M. G. Grupos focais como técnica de investigação qualitativa: desafios metodológicos. **Paidéia**, Ribeirão Preto, v.12, n. 24, p. 149-161, 2002.

HALL, V.; WALLACE, M. Collaboration as a subversive Activity: a professional response to externally imposed competition between schools? **School Organisation**, v.. 13, n. 2, 1993, p.101-117.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 317-326, 1981.

RIBEIRO, A. J. Elaborando um Perfil Conceitual de Equação: Desdobramentos para o Ensino e a Aprendizagem de Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, p. 55-71, 2013.

RIBEIRO, A. J. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 26, n. 42B, p. 535-557, 2012.

RIBEIRO, A. J. A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 2, p. 70-86, 2009.

SHULMAN, L. S. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, n. 57, p. 1-22, 1987.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Thousand Oaks, v. 15, p. 4-14, 1986.

SILVA, T. H. I. **Conhecimento do Professor de Matemática sobre Equações:** analisando o processo avaliativo sob o olhar de um modelo de perfil conceitual. 2015. 167 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática, Universidade Federal do ABC - UFABC, Santo André, 2015.

TRIVILIN, L. R.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 29, p. 38-59, 2015.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

A AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA EM FORMA DE TEIA

Hendrickson Rogers Melo da Silva[1]
Ediel Azevedo Guerra[2]

RESUMO

Este artigo apresenta um método de avaliação em ambiente computacional que se encontra em maior consonância com as teorias didáticas e psicológicas aceitas na educação matemática do que aquele padrão ou tradicional, largamente adotado nas escolas brasileiras. Esse modo de avaliação, denominado, neste artigo, *método de avaliação em teia*, pode ser utilizado com grande operacionalidade em turmas presenciais ou no ensino a distância. Esse método se baseia nas teorias de Douady (1986) e Robert (1998), que são aliadas às teorias dos campos conceituais, de Vergnaud, e da aprendizagem de Vygotsky. É apresentado também um exemplo de como elaborar questões avaliativas nesse método no caso do ensino de estatística na educação básica. A pesquisa se caracteriza como qualitativa, explicativa e exploratória.

Palavras-chave:

Avaliação em Matemática. Filosofia da Teia. Teorias Psicológicas. Banco de Questões. Tecnologia Educacional.

Introdução

O processo de ensino e de aprendizagem, em contexto escolar, envolve de modo contínuo três etapas, nomeadamente planejamento, execução e avaliação das ações didáticas. No método tradicional, o processo de avaliação consiste basicamente na aplicação de exames escritos, assumindo, em geral, um caráter meramente classificatório, não fornecendo ao estudante um retorno ou diagnóstico acerca das suas dificuldades de aprendizagem nem opções para que ele supere essas dificuldades. O professor, por sua vez, realiza a correção das provas com o intuito de apenas constatar os erros e os acertos dos estudantes para conferir-lhes uma nota.

A adoção dessa forma padrão de exame tem se consagrado nas escolas por algumas razões práticas: (a) é aplicável em turmas com números grandes de estudantes; (b) produz um registro escrito documental do que o estudante produziu em face do que lhe foi solicitado na questão proposta no texto do exame escrito; (c) fornece um critério quantitativo para a aprovação ou reprovação do examinando. A principal crítica desferida ao método

[1]Especialista em Educação Matemática e Educação a Distância, mestrando no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Federal de Alagoas. Maceió/AL, Brasil (hendricksonrogers@hotmail.com).
[2]Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco, docente e orientador no PPGECIM. Maceió/AL, Brasil (edielguerra@hotmail.com).

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

padrão de exame escrito é que ele se presta mais à hierarquização e classificação dos alunos do que à avaliação do processo de ensino e de aprendizagem.

Muitos autores têm ressaltado a necessidade do desenvolvimento de estratégias de avaliação que permitam a superação dessa ausência de retorno de informações, aos estudantes e professores, acerca dos êxitos e das dificuldades apresentadas por eles no processo de ensino e de aprendizagem. O objetivo principal deste artigo é o de apresentar um método de avaliação que permita tanto a autoavaliação do estudante, quanto ofereça: (1) subsídios ao professor para diagnosticar as dificuldades do estudante e (2) opções ao estudante de superação de suas dificuldades na aprendizagem de um dado conteúdo matemático.

O método de avaliação, aqui apresentado, será denominado doravante *método de avaliação em teia*. Neste artigo, apresentamos as ideias fundamentais que o norteiam e um exemplo de sua aplicação num caso particular. A pesquisa se caracteriza como qualitativa, uma vez que as características desta abordagem são: "objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno" (GERHARDT, SILVEIRA, 2009, p. 32); também explicativa, pois ela explica o porquê das coisas através dos resultados oferecidos. E por conter uma análise de exemplos que estimulam a compreensão do leitor, nossa pesquisa também pode ser caracterizada como exploratória (GIL, 2007).

Ideias norteadoras do método da avaliação em teia

O *método de avaliação em teia,* aqui proposto, tem como mola propulsora a aprendizagem contínua em ambiente computacional (celulares, *tablets*, *desktops*, *notebooks* etc., conectados à internet). Desse modo, ele pode ser utilizado também em processos de ensino a distância. No que se segue, destacamos algumas ideias que o norteiam.

A avaliação é dinâmica

De acordo com a psicóloga e pesquisadora em Educação Matemática Márcia Brito (2011), a ideia de Avaliação Dinâmica se materializa quando os educandos aprendem não apenas nas aulas, entre as avaliações, mas também durante as avaliações, sendo a aprendizagem um fenômeno contínuo envolto em situações de teste-intervenção-reteste. Quando um problema é resolvido de maneira incorreta, o *feedback* pode ocorrer para o aluno, auxiliando-o o quanto antes para que ele tenha condições de acertar o tópico e dominar o Campo Conceitual (cuja definição será apresentada mais adiante) relativo a ele. A (pre)ocupação do docente é com correção e superação das dificuldades do aluno, dentro do contexto de uma interação dinâmica, de um relacionamento intenso entre o aprendiz e o educador – afeto e Matemática.

Esse estilo de avaliar é prospectivo e evidencia os dados qualitativos; seu escopo é compreender a relação entre o aprendizado e o desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Fundamenta-se na noção de que as habilidades cognitivas são modificáveis e que existe algum tipo de zona de

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

desenvolvimento proximal de Vygotsky (1980 apud LUNT, 1994). (A zona de desenvolvimento proximal é a diferença entre o Nível de Desenvolvimento Real – aquelas atividades que o sujeito é capaz de realizar sem assistência – e o Nível de Desenvolvimento Proximal – aquelas atividades que o sujeito é capaz de realizar com a mediação de terceiros). Como ficará claro adiante, o método que aqui propomos: (1) permite a investigação da trajetória da aprendizagem do indivíduo e como ele usa o conteúdo aprendido, permitindo um "diagnóstico" da aprendizagem, avaliando o processo/trajeto e não apenas o produto; (2) possibilita a avaliação da maneira de o estudante trabalhar com o conhecimento aprendido.

Além disso, a construção da avaliação é um momento de planejamento; leva-se em conta não o que e quanto um estudante aprendeu, mas sim o que ele é capaz de fazer com o conhecimento aprendido. Tudo isto traz um *feedback* para o próprio avaliador quanto à suas estratégias de ensino, oportunizando sugestões úteis (LIMANA; BRITO, 2008).

Aprendizagem via conceitualização

Para o proponente desta teoria, o matemático e psicólogo Gerard Vergnaud (1986), campo conceitual é "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, conteúdos, e operações de pensamento, conectados uns aos outros e provavelmente interligados durante o processo de aquisição" (VERGNAUD, 1986, p. 40). Dominar determinado campo conceitual, então, é o mesmo que ser capaz de resolver problemas que contenham o conceito a ser avaliado, com níveis de interação com outros conceitos e de complexidade diferentes. O conceito equação, por exemplo, é estudado ao longo de todo o ensino fundamental, interagindo com outros conceitos como proporcionalidade, verbo, gráfico etc. (conceitos matemáticos e não matemáticos). E seu nível de complexidade aumenta com o passar das séries, até que o estudante chegue ao nível dos sistemas de equações lineares e polinômios, também conectados a conceitos antigos e novos para o aluno.

Segundo a psicóloga Magina (2005, p. 3), "a aquisição do conhecimento se dá, em geral, por meio de situações e problemas com os quais o aluno tem alguma familiaridade, o que implica em dizer que a origem do conhecimento tem características locais". Ela enfatiza o fato de que, em sua teoria, Verngnaud afirma que o docente deve identificar quais conceitos seus alunos usam explicitamente e quais são os que eles usam, embora corretamente, sem o desenvolvimento adequado a ponto de serem explícitos. Faz-se ainda a proposição de que o professor procure "entender quais foram os meios utilizados pelo seu aluno para realizar a tarefa solicitada, já que o aluno pode utilizar diferentes caminhos para produzir uma resposta correta, mesmo que esta inclua exercícios que não aceitem mais do que uma resposta certa" (MAGINA, 2005, p.5).

Minimização da sobrecarga cognitiva e promoção da assistência contínua

O psicólogo John Sweller define carga cognitiva como "um construto representando a carga que a realização de uma tarefa particular impõe no sistema cognitivo" (SWELLER, 1998, p. 266 apud SOUZA, 2010, p. 42). Souza (2010, p. 32, 33), na construção de sua dissertação, entrou em contato com o próprio

Sweller, comprovando isso apresentando *e-mails* trocados entre eles nos anexos de seu trabalho; ele cita um exemplo simples e objetivo que contribui para a compreensão da teoria ora analisada:

> Se Y= X + 8, X = Z + 4 e Z = 10, encontre o valor de Y. Um principiante [...] para encontrar a solução deste problema focalizará sua atenção primeiramente no objetivo (Estado Final); encontrar Y. Porém, como Y= X + 8, ele só poderá encontrar o valor de Y se souber o valor de X. Então, encontrar X passa a ser seu subobjetivo. Porém, como X = Z + 4, ele só poderá encontrar o valor de X se souber o valor de Z. Então, encontrar o valor de "Z" se torna também um subobjetivo. Relendo a questão, ele verificará que o valor de Z é um dado fornecido (Z = 10). Esse valor pode ser substituído na equação X = Z + 4 obtendo-se assim o valor X= 14 que por sua vez deverá ser substituído na equação Y= X + 8 obtendo-se o valor Y=22, que é o objetivo (Estado Final) do problema. Observa-se de um modo geral que [...] um principiante[3] para resolver um problema resulta em uma demanda considerável da capacidade da Memória de Trabalho, eis que ele tem de manter simultaneamente em mente o objetivo, os subobjetivos e as prováveis operações associadas a esses. Essa demanda sobre a memória de trabalho, quando excessiva, pode ser prejudicial para a aprendizagem (SWELLER; LEVINE, 1982).

Para evitar que questões de Matemática excedam os limites da capacidade da Memória de Trabalho, fazendo com que o raciocínio e a aprendizagem fiquem abaixo do desempenho esperado, essa teoria propõe diretrizes. Em suas pesquisas anteriores à formulação de tais diretrizes, Sweller verificou experimentalmente que resolver muitos problemas, estudando apenas poucos exemplos, resultava numa aprendizagem demorada devido à sobrecarga na Memória de Trabalho. A técnica chamada Efeito do Problema Resolvido resolvia as dificuldades originadas por técnicas como a das tentativas e erros. Obviamente todo professor sabe que os exemplos são necessários. "Contudo, a novidade é a comprovada eficiência dos exemplos, que, ao substituírem os exercícios a resolver, conseguem resultados de aprendizagem equivalentes em menor tempo e com menor esforço" (CLARK; NGUYEN; SWELLER, 2006, p. 190 apud SANTOS, 2010, p. 38); ou seja, um educador matemático que oferece a seus alunos uma lista de problemas que contenha vários deles resolvidos está usando a teoria da carga cognitiva a favor da aprendizagem e, cientificamente falando, terá uma probabilidade maior de sucesso em relação ao professor das listas tradicionais.

Dando continuidade às pesquisas sobre a Teoria da Carga Cognitiva de Sweller, o psicólogo Richard Mayer elaborou ainda princípios que demonstraram minimizar as sobrecargas cognitivas, aumentando as chances de um processo cognitivo de aprendizagem bem sucedido. De acordo com Mayer (2001a), recomenda-se que o professor leve em consideração o fato de que ao se usar a Tecnologia Digital da Informação e Comunicação (TDIC), faz-se uso de recursos que atingem mais de um canal de percepção simultaneamente, por exemplo, a visão e a audição, acarretando uma sobrecarga cognitiva a qual pode causar confusão e até mesmo desestímulo do aprendiz.

Os princípios de Mayer (2001b) asseguram que, na construção de conteúdos e materiais de ensino, é necessário ponderar os três principais tipos de carga cognitiva:

1) Carga cognitiva intrínseca, que é imposta pela complexidade do conteúdo/material usado no ensino.

[3] A Teoria da Carga Cognitiva se fundamenta em esquemas objetivando diminuir a Carga Cognitiva (a expressão também se refere à carga sobre a Memória de Trabalho durante a aprendizagem, onde essa memória não tem somente a função de armazenamento, mas também de gerenciamento de informações). Isso implica que tais esquemas permitem muitos elementos serem manipulados como um único elemento na Memória de Trabalho e, como resultado, mais capacidade de Memória de Trabalho é liberada. Esquemas são estruturas mentais utilizadas para organizar o conhecimento (SWELLER, 2003). Os esquemas permitem que os *experts* resolvedores de problemas categorizem problemas, reconheçam estados/situações de certa categoria de problema e, consequentemente, resolvam-nos. Já os principiantes não possuem esquemas e por isso são incapazes de categorizar problemas. Eles não têm alternativa, a não ser se engajar em técnicas de buscas, tais como a "tentativa-e-erro" (LARKIN; SIMON, 1980 apud SOUZA, 2010).

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

2) Carga cognitiva natural (ou relevante), a qual é gerada por quaisquer atividades de ensino-aprendizagem.

3) Carga cognitiva externa ao conteúdo (ou irrelevante), a qual não contribui para a construção e automação de esquemas, ou seja, é a carga a ser evitada pelo educador, pois desperdiça a memória de trabalho que já sofre exigências das cargas anteriores.

Assim sendo, é necessário controlar a carga intrínseca associada à TDIC, dispondo o material de modo a otimizar a quantidade de objetos interativos. Interatividade não precisa significar sobrecarga cognitiva, o saldo negativo entre as cargas; antes pode ser a ferramenta desta época a ser usada em prol do fazer-ensinar-avaliar Matemática. Mas, novamente, depende-se da postura pedagógico-tecnológica do docente.

O método de avaliação em *teia*

Esse método se situa no campo das propostas de avaliação em ambientes computacionais, tais como aquele apresentado por Soares et al (2009, p. 137). Ele foi realizado com estudantes recém-chegados à graduação em Matemática e "utilizou-se um programa interativo que oferece um banco de questões bem como recursos para a criação de novos exercícios: o WIMS – WWW *Interactive Multipurpose Server* um programa livre que pode ser acessado através de qualquer navegador web na internet". Essa é uma das poucas experiências em avaliação matemática mediada por computador conectado à internet, registrada na literatura científica, que temos conhecimento. A avaliação em *teia*, que aqui propomos, é uma materialização das ideias explícitas e implícitas nesse método de avaliação e que dá continuidade aos estudos dessa temática.

O nome *teia* que qualifica o tipo de avaliação é facilmente explicado pelo formato de sua estrutura não linear (Apêndice A) – literalmente uma teia de trajetórias possíveis a serem percorridas pelos educandos (LUNT, 1994; LIMANA; BRITO, 2008; BRITO, 2011) de acordo com suas resoluções/respostas, possibilidades estas planejadas criteriosamente (como veremos a partir do próximo tópico) pelo educador-engenheiro[4].

Essa não linearidade da avaliação é planejada e construída através da opção Formulários do pacote de aplicativos *online Google Docs*[5]. Também faz parte do planejamento da *teia*: a definição da quantidade de ramos (trajetos possíveis dos quais deriva a quantidade de mão de obra para quem está construindo a avaliação e o tempo total de elaboração do questionário interativo); a escolha criteriosa (VERGNAUD, 1986, 1993) do banco de questões (DOUADY, 1986; ROBERT, 1998), conforme veremos mais a frente, e a quantidade e qualidade (MAYER, 2001a, 2001b) de assistência contínua e imediata a ser dada ao estudante durante seu percurso (SWELLER, 1988, 2003).

Algumas implicações imediatas da implementação do planejamento embasado na filosofia da *teia*: o docente colocará em sua *teia* uma assistência à disposição do estudante (SWELLER, 1988); o aluno poderá

[4]Essa expressão é uma referência à complexidade singular de cada indivíduo, apontada pela Psicologia da Educação Matemática (BRITO, 2011), a engenhosidade necessária à elaboração de uma *teia* (mas não necessariamente complicada e trabalhosa) e seu armazenamento *online* em um AVA (DA SILVA; COLODETE, 2015 e DA SILVA; LUIZ, 2015). O docente não precisa ser um programador, mas precisa ter alguma familiaridade com um computador e a internet.
[5]www.google.com/docs/about, acesso em jun. 2015. No *site* se encontra o tutorial ou manual de uso do programa *online* gratuito. Usamos o programa para a realização de nossa ideia original muito embora ele seja elástico, para fins diversos.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

escolher o nível do problema a ser resolvido (ROBERT, 1998) de duas formas: automática e volitiva. A primeira ocorre cada vez que ele errar na solução do problema, pois automaticamente o próximo item (problema) será mais simples dando-lhe ânimo. A segunda forma ocorrerá sempre que o aprendiz se sentir desconfortável com a questão e escolher a opção pela questão mais simples (obviamente que isto implicará uma quantificação inferior de seu aprendizado, pois ele terá fugido de um problema mais elaborado para um que exige uma gama de conhecimentos menor); o avaliando poderá escolher se conclui ou se continua o questionário após uma quantidade mínima (antevista pelo engenheiro) de ramos percorridos; espera-se que o aluno se sinta mais motivado ao usar a tecnologia para sua formação (já que costumeiramente a usa para outros fins).

E a verificação das trajetórias percorridas por uma sala de aula inteira é facilmente realizada (SOARES et al., 2009). Dito de outro modo, a correção da prova é simples, pois o planejamento e o programa Formulários garantem a visualização fácil pelo avaliador do uso que o aprendiz fez de seu conhecimento. Quando o estudante conclui suas trajetórias, ele as envia *online* ao professor. Os percursos de vários alunos enviados inclusive simultaneamente, chegam automaticamente na conta gratuita (aberta pelo docente) no *Google*, na forma de uma planilha contendo todas as escolhas dos avaliandos, possibilitando ao avaliador analisar e quantificar as respostas dos estudantes celeremente.

Uma vez que a filosofia básica da *teia* está bem definida, passaremos a construir e aplicar parâmetros e critérios para a elaboração do banco de problemas de uma *teia*. Em seguida, examinarmos duas outras teorias que embasam tal critério.

Problemas e a Dialética ferramenta-objeto

O banco de problemas da *teia*, independente do tema matemático que está sendo avaliado por meio de suas questões, é elaborado criteriosamente. Vergnaud (1993) e a teoria do ensino de matemática por resolução de problemas instruem colocando o problema como o início da atividade matemática no lugar das definições áridas. Eles explicam que as situações-problema são ambientes férteis para o processo ensino-aprendizagem de conceitos, ideias e métodos matemáticos, os quais incentivam os estudantes a produzir sua estratégia de resolução. Os PCN também diferenciam uma questão-problema de um exercício de fixação. "Um problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada" (BRASIL, 1998, p. 41).

Regine Douady, em sua tese doutoral sobre a Dialética ferramenta-objeto, entende que o conhecimento deve acontecer por meio de propostas de ensino adequadas, nas quais a participação contínua do estudante é imprescindível. Sua teoria é um processo recorrente que visa por professor e alunos em posições estratégicas num contrato didático em que a parte do aprendiz é o querer aprender e o atuar nesta direção, enquanto ao educador compete promover situações de modo que os conceitos matemáticos trabalhados assumam, alternadamente, as funções seguintes: ferramenta de resolução de problemas (conhecimentos já aprendidos pelo aluno) e objeto de estudo (conhecimento a ser aprendido).

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

Uma vez aprendido pelo estudante, o objeto assume o *status* de ferramenta (DOUADY, 1986).

Essa teoria, portanto, define aprendizagem como a movimentação de um conceito matemático ou objeto ao posto de ferramenta para a aquisição de um novo objeto. Ao elaborar problemas com base na Dialética ferramenta-objeto, de acordo com Douady (1986), o educador matemático precisa observar seis instruções quanto ao conhecimento do aprendiz:

1) Conhecimento antigo: para a resolução do problema, o aprendiz mobilizará algo de seus conhecimentos anteriores os quais funcionam como ferramentas.

2) Conhecimento via pesquisas (ou Novo conhecimento implícito): diante das dificuldades na resolução do problema, o aprendiz pesquisa a procura do novo conhecimento o qual ainda não dispõe.

3) Explicitação do conhecimento (ou Institucionalização local): os estudantes apresentam os conhecimentos que conseguiram (uma parte apenas?) num contexto de descoberta e discussão entre os antigos e os novos conhecimentos. O educador deve estar atento para intervir quando ocorrerem contradições emergentes na mente dos educandos, evitando a diminuição da atuação deles.

4) Institucionalização do novo conhecimento: o educador toma as ferramentas dos alunos e as examina formalmente (as expõe de acordo com definições, convenções, teoremas, demonstrações etc.), fazendo com que tais ferramentas sejam descontextualizadas do problema, sendo colocadas como disponíveis também para a resolução de outros problemas; ou seja, assumam o posto de objetos, mas objetos recém adquiridos, de modo que o mesmo conceito matemático é apreendido pelo educando com novos significados e utilidades.

5) Familiarização do novo conhecimento (ou reutilização num novo problema): os objetos recém adquiridos, na fase anterior, são operacionalizados como ferramentas, para que o aprendiz possa utilizá-los em novas questões.

6) Complexificação do conhecimento: o educador leva o educando a problemas para ampliação e aquisição de outros novos conhecimentos, como as questões do dia a dia, as quais são mais abrangentes e mais complexas, se iniciando um novo processo recorrente da Dialética de Douady (1986).

Douady (1992, p. 135), em sua teoria, também define: "Um quadro é constituído de objetos de um campo da Matemática, de relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diferentes e das imagens mentais associadas a esses objetos e a essas relações". Cita-se como exemplos o quadro da estatística, o quadro geométrico, o quadro algébrico etc. Também é possível subdividir o quadro da estatística, por exemplo, em quadro das medidas de tendência central, quadro das medidas de dispersão etc. O quadro geométrico é composto pelo quadro da geometria euclidiana, quadro da geometria esférica etc. Para Douady (1992), uma mudança de quadro é uma transição de um quadro para outro com o intuito de formular um mesmo problema de dois ou mais modos distintos. Tal mudança objetiva driblar dificuldades durante a resolução da questão, alcançando-se o funcionamento de ferramentas que não constavam numa formulação anterior. Uma mudança de quadro é espontânea, quando ocorre pela iniciativa do aprendiz, ou provocada, quando ocorre pela intervenção alheia.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

Problemas e os níveis de funcionamento do conhecimento

Outra pesquisadora francesa, Aline Robert (1998), criou um conjunto de classificações de noções matemáticas visando oferecer ao professor fundamentação em suas análises a respeito da complexidade de conteúdos, quer sejam para fins diagnósticos, de avaliação ou para elaboração de sequências e cenários. Robert (1998) estuda a mobilização de conhecimentos matemáticos por meio da classificação em três níveis de funcionamento do conhecimento que se pode esperar dos alunos.

No nível Técnico, o problema exige do estudante apenas mobilizações isoladas de seu conhecimento, o que deve estar bem explícito em seu enunciado, ou seja, "aplicações imediatas de teoremas, propriedades, definições, fórmulas etc. Trata-se então de contextualização simples, local, sem etapas, sem trabalho preliminar de reconhecimento, sem adaptações" (ROBERT, 1998, p. 27).

Já no nível Mobilizável, os problemas exigem um pouco mais: embora o enunciado ainda seja bastante claro, o estudante precisa estar preparado para realizar adaptações em seus conhecimentos, mudanças de quadro (DOUADY, 1992), mas com indicações previstas no bojo da questão. Aqui também pode existir a necessidade de (a) aplicar várias vezes a mesma ferramenta ou utilizar várias ferramentas diferentes, em etapas sucessivas; (b) articular duas informações de naturezas distintas. Nas palavras de Robert (1998, p. 28), "não há somente aplicação simples, as características ferramenta e objeto podem ser relacionados. Mas o que está em jogo é explícito. Ou seja, um saber é dito mobilizável [...] quando está bem identificado [...] mesmo se houve lugar para se adaptar ao contexto particular".

O terceiro nível é o de funcionamento dos conhecimentos Disponíveis (nível Disponível). Os problemas que se enquadram nesta categoria não dão pistas ao estudante quanto às ferramentas a serem usadas em sua resolução. Robert (1998, p. 28) salienta que o aluno deve "procurar em seus próprios conhecimentos o que pode intervir na solução. Por exemplo, poder fornecer contraexemplos (encontrar ou inventar), mudar de quadros sem sugestão (relacionar), aplicar métodos não previstos, são comportamentos que se esperam neste nível".

Segundo a teoria de Robert (1998), não faz sentido tentar descobrir o que o aluno não aprendeu. Deve-se, no lugar disso, investigar a causa da sua dificuldade de mobilização do conhecimento. Por que não o tem disponível para resolver determinado problema? Por que os conceitos envolvidos (VERGNAUD, 1993) não lhe são reconhecidos?

A seguir, colocam-se os critérios usados na elaboração do banco de questões de uma *teia* e, em seguida, a configuração não linear desses problemas. Assim, o educador poderá responder as indagações do parágrafo anterior.

A Filosofia da Teia e a sincretização das teorias de Regine Douady (1986) e Aline Robert (1998)

A Filosofia da Teia é o terreno sobre o qual a Avaliação em Matemática em forma de Teia nasce, floresce e frutifica. Dentro de sua amplitude está a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vernaud, a qual defende que a essência do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização da realidade. Entre suas

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

definições de campo conceitual, está a que o compara a um conjunto com três subconjuntos onde um deles se assemelha a um banco de problemas, cuja resolução requer conceitos, trajetos e representações de tipos distintos, embora relacionados (VERGNAUD, 1993). Tanto Douady (1986) quanto Robert (1998) se cruzam com Vergnaud (1983) quando este instrui que: (1) um problema não possui um único conceito; (2) um conceito não é apreendido dentro de um só tipo de problema; (3) a aprendizagem de todas as propriedades de um conceito e/ou a apropriação de todos os conceitos de um problema é um processo que demanda um contrato didático entre educador e educando que demora anos, por meio de comparações e incompreensões entre problemas, métodos e concepções.

Fundamentada em sua filosofia, uma *teia* possui seu banco de questões norteado pelas seguintes diretrizes advindas da articulação das teorias de Doaudy (1986), Vergnaud (1993) e Robert (1998):

Problemas com níveis de complexidade crescente

Para a organização de uma avaliação em *teia* é necessário que se distinga bem o nível do problema ou situação-problema cuja resolução será proposta ao estudante. Como já visto na seção anterior, um problema pode ser enquadrado em uma das três possibilidades seguintes:

- Nível 1) Técnico – enunciados onde os conhecimentos são todos familiares ao aluno ou que só possui o conceito em avaliação (campo conceitual mínimo[7]); problemas com somente um conhecimento antigo, ou seja, com somente dois conceitos: o atual (em avaliação) e um anterior.
- Nível 2) Mobilizável – aquele em que os conhecimentos empregados na resolução de um exercício podem ser identificados em seu enunciado e são suficientes para resolvê-lo, mesmo que algumas adaptações ao contexto particular sejam necessárias; ou seja, o problema envolve o campo conceitual no qual está o conceito atual, em que cada conceito envolvido está explícito no próprio enunciado.
- Nível 3) Disponível – itens nos quais o aluno deve procurar sozinho, em seus conhecimentos, o que é pertinente para a resolução do exercício, ou seja, problemas nos quais o campo conceitual do conceito em avaliação não está explícito no enunciado da questão.

Natureza do conceito focalizado e tipo de quadro

Um segundo passo necessário para a elaboração de uma avaliação em *teia* é que o docente tenha clareza com relação à natureza de ferramenta ou de objeto do conceito focalizado. Segundo Douady (1986):

Ferramenta: é o conceito usado como instrumento para a resolução do problema (esteja ele explícito no enunciado ou não); isto é, o conceito atual ou em avaliação.

Objeto: é o conceito que aparece na questão explicitamente, sendo exigidas do resolvedor do problema definições, propriedades e/ou teoremas desse conceito. Também pode ser considerado como uma ferramenta futura, assim que o aluno apreendê-lo.

[6]Referência metafórica à beleza epistemológica, ao propósito de corresponder às tecnologias digitais da época no exercício da Educação e à estrutura ramificada da avaliação proposta pela dissertação de mestrado de Da Silva, da qual este artigo é um recorte.
[7]Isto não significa que o problema possua um único conceito, pois em sua construção todo problema possui diversos conceitos matemáticos e não matemáticos (MAGINA, 2005).

Quadro: é um agrupamento de objetos, isto é, um campo conceitual teórico (ex.: quadros geométrico, algébrico, numérico etc.). Também pode ser considerado um problema com vários conhecimentos a serem apreendidos.

Jogo de Quadros: são campos conceituais teóricos sinônimos ou interpretações distintas do enunciado de um problema ou de um campo conceitual. Usa-se o jogo e a mudança de quadros nas assistências (SWELER, 1988, 2003) da *teia*, oferecidas em cada problema do questionário adaptativo às respostas do estudante[8].

Tipos de problemas e seus níveis de complexidade

Problemas Técnicos: exigem/oferecem uma ou mais ferramentas, conhecimentos antigos e problemas que exigem/oferecem um objeto, conhecimento em avaliação.

Problemas Mobilizáveis: exigem/oferecem ferramentas e objetos, e problemas que exigem/oferecem um jogo de quadros.

Problemas Disponíveis: exigem jogos e/ou mudança de quadros.

Na Tabela 1 (Apresentada a seguir), dentro do planejamento de uma *teia*, apresentam-se os três tópicos recém-vistos sendo usados como critérios na escolha de um item para compor o banco de questões.

Questões ideais em ordem crescente de complexidade em seu campo conceitual	Nível e Tipo	Questões NÃO ideais em ordem crescente de complexidade em seu campo conceitual	Nível e Tipo
1	Técnico e Objeto	1	Técnico e Ferramenta
2	Mobilizável e Quadro	2	Técnico e Quadro
3	Mobilizável e Quadro	3	Técnico e Quadro
4	Mobilizável e Quadro	4	Técnico e Quadro
5	Disponível e Objeto	5	Mobilizável e Objeto
6	Disponível e Quadro	6	Mobilizável e Quadro
7	Mobilizável e Quadro	7	Técnico e Quadro
8	Mobilizável e Quadro	8	Mobilizável e Objeto
9	Mobilizável e Quadro	9	Mobilizável e Quadro
10	Disponível e Quadro	10	Mobilizável e Quadro

Tabela 1 – Exemplo de Planejamento inicial do banco de problemas
Fonte: elaboração própria.

Planejamento de uma *teia*

Como exemplo, explica-se o planejamento do banco de questões da *teia* sobre Estatística (disponível em http://blogdoprofh.com/2015/08/21/avaliacao-em-forma-de-teia-sobre-2/).

[8]Convidamos o leitor para visualizar e comprovar os recursos citados, acessando a página da referida *teia*: http://blogdoprofh.com/2015/08/21/avaliacao-em-forma-de-teia-sobre-2.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

O ensino de tópicos da Estatística é estimulado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2012) por sua versatilidade e frequência nos meios de comunicação e, além disso, esse tema esteve presente em todas as edições do Exame Nacional do Ensino Médio. Nesta seção, aborda-se esse campo conceitual sob a ótica do método da avaliação em *teia,* aplicada *online* por um dos autores deste artigo (Da Silva) a seus alunos do ensino médio.

A estrutura não linear do questionário possui um banco com vinte problemas. No entanto, estipula-se que o estudante responda no máximo dez deles e no mínimo sete, a depender de seu interesse em continuar sua trajetória na *teia* – parte do contrato didático (DOUADY, 1986). O planejamento da quantidade dessas questões, seus níveis e tipos podem ser analisados também na Tabela 1. Classifica-se em ideais e não ideais os problemas de acordo com o conhecimento geral que o educador tem da sala de aula, bem como de seus objetivos (avaliação mensal, do bimestre, da recuperação, preparação para o ENEM etc.).

Os problemas ideais revelam o nível de desenvolvimento dentro do(s) campo(s) conceitual(ais) avaliado(s) que o professor oportunizou a seus alunos alcançar. O estudante que apresenta a solução certa recebe como próximo problema outro com nível conceitual superior, como consta no esboço da *teia,* constante na figura 1:

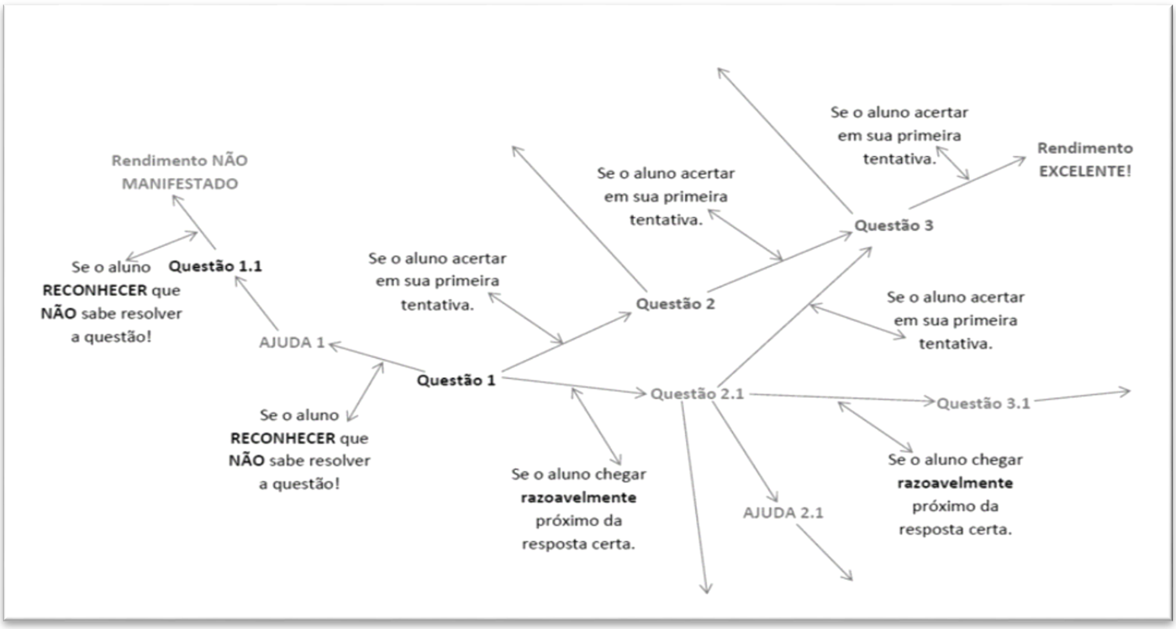


Figura 1 – Esboço da Teia
Fonte: elaborado pelo autor.

Por exemplo: um aluno que não consegue resolver a primeira questão ideal (Tabela 1 e primeiro problema da página seguinte) encontra-se numa das seguintes categorias: a) o problema lhe exige um conceito (ferramenta) que para aquele aluno ainda é objeto, pois ainda não o possui; ora, isto pode ser conciliado por meio da assistência contínua, a qual lhe oportunizará a ferramenta exigida no problema; b) o estudante, mesmo com a assistência, ainda não compreende a questão; para evitar qualquer sobrecarga

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

cognitiva ou desânimo, a postura psicopedagógico-tecnológica da *teia* lhe permite pular o problema e enfrentar um mais simples, na tentativa de adaptar a avaliação ao conhecimento do educando; dito de outro modo: coloca-se diante do aluno uma quantidade menor de conceitos necessários à resolução da questão, descobrindo com precisão o que ele já sabia ou pode aprender com uma assistência imediata.

De fato, o que para um é conhecimento técnico, por exemplo, pode não ser para outro, de modo que para o aluno que não identifica a solução e erra ao responder um problema, pois o conceito avaliado não lhe era uma ferramenta, mas um objeto (DOUADY, 1986), é-lhe oferecido um próximo problema menos exigente na tentativa de personalizar (VYGOTSKY, 1980) o processo ensino-aprendizagem-avaliação, motivando-o durante a realização desse processo (BRITO, 2011), enquanto ele vai revelando em seu trajeto o que sabe resolver sozinho, o que sabe resolver ao receber assistência e o que não sabe ainda (VYGOTSKY, 1980).

Ao aluno que não identifica a solução e pede assistência, é oferecida uma mudança de quadro que lhe permita revisar o conceito estudado e encarar o(s) objeto(s) a partir de novos pontos de vistas, com mais detalhes, de acordo com a técnica chamada Efeito do Problema Resolvido de Sweller (1988).

A filosofia básica da *teia* ainda possibilita as seguintes situações: o estudante escolhe pular o problema (e isto fica registrado na planilha que contém sua trajetória e é enviada ao avaliador), recebendo automaticamente outro de nível inferior; ou o estudante escolhe concluir sua avaliação naquela questão, mesmo sem resolvê-la. Portanto, o banco de problemas dentro do contexto psicopedagógico-tecnológico da não linearidade da *teia* respeita as diferenças cognitivas de cada educando.

Todos os problemas, independente de sua localização na *teia*, possuem uma imagem (tabela, gráfico, figura etc.) como "elemento motivacional" de acordo com Marja van den Heuvel-Panhuizen (1996 apud BURIASCO et al., 2009, p. 86) que aumenta o acesso do estudante ao objetivo da questão e proporciona um ambiente familiar aos jovens seres humanos rodeados e usuários de tecnologia. No entanto, nem o enunciado nem as imagens das questões são colocados aleatoriamente, pois poderiam gerar sobrecargas cognitivas, distraindo o educando em lugar de incentivá-lo, como instrui outra componente da filosofia da *teia*, já analisada, a teoria das Cargas Cognitivas (MAYER, 2001b).

A seguir, apresentam-se três dos problemas que cumprem o planejamento da Tabela 1, destacando-se os elementos característicos do sincretismo teórico da filosofia básica da *teia*:

A mesma análise pode ser realizada em todas as outras dezessete questões da *teia* em consideração.

1) Numa de suas aulas de Estatística, o prof. H entrevistou os alunos de uma fila: dois tinham 17 anos, dois tinham 16 anos, um tinha 15 anos e outro 18 anos de idade. Qual a idade média, a idade modal e a idade mediana dos alunos dessa fila?

Filosofia da Teia

Objeto: os valores das três medidas de tendência central mencionadas no enunciado (média aritmética, moda e mediana).

Ferramentas: conceitos das medidas estatísticas e operações aritméticas.

2) O dono de uma microempresa pretende saber, em média, quantos produtos são produzidos por cada funcionário em um dia. O chefe tem conhecimento que nem todos conseguem fazer a mesma quantidade de peças, mas pede que seus funcionários façam um registro de sua produção em uma semana de trabalho. Ao fim desse período, chegou-se à tabela X . Para saber a produção média de seus funcionários, o chefe faz o cálculo da média aritmética de produção. Mas se observarmos bem a tabela, veremos que há valores distantes da média. O estudo da Estatística apresenta medidas de dispersão que permitem a análise da dispersão dos dados. Como vimos em sala, a variância é uma medida de dispersão que mostra quão distantes os valores estão da média. Sobre as duas funcionárias é correto afirmar que: ( ) A produção média de Rute é maior do que a da outra funcionária. ( ) Ainda não entendi a ideia de variância... ( ) A variância de Marta é inferior a da outra funcionária. ( ) As variâncias são maiores do que as produções médias. ( ) A produção média de Marta é maior do que a da outra funcionária e o mesmo acontece com as variâncias. ( ) Puxa, preciso de uma ajudinha...

Funcionários	Quantidade de peças produzidas por dia				
	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
Rute	10	9	11	12	8
Jonas	15	12	16	10	11
Marta	11	10	8	11	12
Simão	8	12	15	9	11

Tabela X – Produção de peças por funcionário

Filosofia da Teia

Jogo de quadros: os valores de médias aritméticas e variâncias a partir da tabela.

Ferramentas: Tabela, definição de variância, afirmativas nas opções de resposta a serem comparadas.

Mobilização necessária: transformar os dados da tabela em valores médios e, em seguida, em valores de variâncias. Comparar os resultados dos cálculos com as afirmações das opções.

10) (ENEM–2010) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols. Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então ( ) Z < Y < X. ( ) Z < X = Y. ( ) Y < Z < X. ( ) Z < X < Y. ( ) X = Y < Z. ( ) Gostaria de assistência!

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Filosofia da Teia

Conhecimentos exigidos como disponíveis:

Jogo de quadros: a tabela precisa ser interpretada pelo aluno para o cálculo das três medidas de tendência central; os símbolos de igualdade e desigualdade que relacionam as três incógnitas.

Mudança de quadro necessária: retirar os dados da tabela e transformá-los numa sequência ordenada de quantidades de gols marcados de acordo com as quantidades de partidas para, somente então, operacionalizar os dados do enunciado.

Considerações finais

Desse modo, se finda aqui uma parte das pesquisas realizadas para a construção da dissertação sobre uma forma alternativa de avaliação do processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Explicamos como as teorias de Douady (1986) e de Robert (1998), aliadas a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1993) podem fornecer subsídios de fundamental importância para a elaboração de um banco de problemas destinados a um modo de avaliação alternativo àquele padrão utilizado na maioria das escolas, ao qual denominamos método de avaliação em *teia*. A nosso ver, esse modo de avaliação está em maior consonância com as teorias de aprendizagem atualmente mais aceitas no campo da psicologia da educação matemática.

Apresentamos também um exemplo de um planejamento da construção do banco de questões da *teia* sobre Estatística e destacamos a presença dos elementos teóricos abordados neste estudo nos enunciados dos problemas. Pretendemos ainda estender a análise dos efeitos do método de avaliação em *teia,* aplicando-o a um grupo de professores dos ensinos básico e superior, além de explorar os dados coletados das *teias* que vêm sendo aplicadas a estudantes dos ensinos básico e superior. Nossas próximas pesquisas também investigarão mais detalhadamente o papel da assistência contínua ao estudante enquanto este é avaliado.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+)** – Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares**

Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – ciências naturais. Brasília. MEC/SEMTEC. 1998.

BRITO, M. R. F. Psicologia da educação matemática: um ponto de vista. **Educ. rev.**, Curitiba , n. se1, p. 29-45, 2011 . Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40602011000400003&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: jun. 2015.

DA SILVA, H. R. M.; COLODETE, M. F. **Avaliação em matemática em forma de rede, com tecnologia autoinstrucional *online* e *offline*, presencial ou à distância.** 2015. 28f. Artigo (Pós-graduação em Educação Matemática), Escola Superior Aberta do Brasil (ESAB), Vila Velha, 2015.

DA SILVA, H. R. M.; LUIZ, M. L. **O uso do blog como um ambiente virtual de aprendizagem e ambiente de treinamento prático para o exercício da tutoria *online*.** 2015. 20f. Artigo (Pós-graduação em Formação docente para atuação em Educação a Distância), Escola Superior Aberta do Brasil (ESAB), Vila Velha, 2015.

BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 33, p. 69-95, 2009. Disponível em: < http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221900005.pdf> Acesso em jul. 2015.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 7, n. 0, p. 2, 1986.

DOUADY, R. Repères – **IREM**. n. 6 – Janvier 1992.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T.(Orgs.) **Métodos de pesquisa.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

LIMANA, A.; BRITO, M. R. F. O modelo de avaliação dinâmica e o desenvolvimento de competências: Algumas considerações a respeito do ENADE.. In: DIAS SOBRINHO, José; RISTOFF, Dilvo; GOERGEN, Pedro. (Org.). **Universidade e sociedade:** Perspectivas internacionais. 1ª ed. Sorocaba, SP: EDUNISO, v. , p. 189-214, 2008.

LUNT, I. A prática da avaliação. **Vygotsky em foco:** pressupostos e desdobramentos, v. 6, p. 219-254, 1994.

MAGINA, S. A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente. **Encontro Regional de Professores de Matemática**, v. 18, 2005. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/conf/conf_01.pdf>. Acesso em: ago. 2015.

MAYER, R. **Multimedia Learning**. Cambridge: Cambridge University ress. 2001a.

MAYER, R. Cognitive Constraints on Multimedia Learning: When Presenting

More Material Results in Less Understanding. **Journal of Educational Psychology**. v. 93, n.1, 187-198. 2001b.

ROBERT, A. Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 18, n. 2, p. 139-189, 1998.

SOARES, J. M. et al. Instrumentação Tecnológica e Realimentação no Processo de Avaliação para o Ensino de Matemática na Universidade: um método baseado na Engenharia Didática. **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 22, n. 34, p. 131-152, 2009.

SOUZA, N. P. C. **Teoria da carga cognitiva**: origem, desenvolvimento e diretrizes aplicáveis ao processo ensino-aprendizagem. Belém, 2010. 173 p. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. UFPA. Disponível em: <http://www.researchgate.net/profile/Nelson_Souza/publication/262676606_Teoria_da_Carga_Cognitiva_Origem_Desenvolvimento_e_Aplicaes/links/0deec53869db7e1ad0000000.pdf>. Acesso em: ago. 2015.

SWELLER, J. Cognitive load during problem solving: Effects on learning. **Cognitive science**, v. 12, n. 2, p. 257-285, 1988.

VERGNAUD, G. A teoria dos Campos Conceituais. In: NASSER, L. (Ed.). **Anais do primeiro Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro** – 1993. 18 p.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. In: **Análise Psicológica 1** (V) p. 75-90. 1986.

VERGNAUD, G. **Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives.** Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho, 1983.

VYGOTSKY, L. S. **Mind in society:** The development of higher psychological processes. Harvard university press, 1980.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

MATEMÁTICA NO COTIDIANO: (RE) EDUCAÇÃO AMBIENTAL NO DESCARTE DE EMBALAGENS

Leonardo Flausino Araújo Silva[1]
Ubiramar Ribeiro Cavalcante[2]

RESUMO

Educação Ambiental implica em uma educação para a conservação, consumo responsável e solidário na repartição equitativa dentro de cada sociedade e entre as sociedades atuais e as futuras. Assim, para que ela seja eficaz, é necessário trabalhar os problemas ambientais dentro de sua realidade e cotidiano, para que se possa deixar de enxergá-la como algo distante e passar a vê-la como algo do qual todos fazem parte. O presente trabalho teve como objetivo abordar a Educação Ambiental na disciplina de Matemática na Educação de Jovens e Adultos (EJA) de uma escola pública de Ituiutaba-MG, mostrando que este ensino pode ser realizado de modo interdisciplinar. Neste caso, essa abordagem ocorreu por meio da quantificação e pesagem das embalagens descartadas nas residências dos próprios alunos para uma maior sensibilização e assimilação do conteúdo. Com este trabalho, houve a consolidação de uma estratégia que pode ser interdisciplinar e que é promissora para o ensino de matemática.

Palavras-chave:

Consumismo. Reciclagem. Meio ambiente. Educação de Jovens e Adultos.

Introdução

Na sociedade atual, marcada pelo consumismo exagerado e por degradações ao meio ambiente, faz-se necessário uma intervenção a fim de que os conceitos de Meio Ambiente e sustentabilidade não sejam esquecidos. Nesse contexto e na busca da mediação desses valores, a escola se torna um espaço privilegiado para possibilitar parte das transformações necessárias à construção de uma sociedade igualitária que respeite a diversidade nos diversos sistemas ecológicos e sociais (REBOUÇAS, 2012). Os Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática (PCN), de 1997, afirmam que a quantificação de aspectos envolvidos em problemas ambientais favorece uma visão mais clara desses agentes, ajudando na tomada de decisões e permitindo intervenções necessárias como, por exemplo, a reciclagem e o reaproveitamento de materiais (BRASIL, 1997).

Nesse contexto, surgiu a necessidade de trabalhar a Educação Ambiental crítica, na qual discentes e docentes refletem

[1]Especialista em Ciências Ambientais pelo IFTM – Campus Ituiutaba, Ituiutaba, MG, Brasil, leonardoflausino@hotmail.com
[2]Especialista em Ciências Ambientais pelo IFTM – Campus Ituiutaba, Ituiutaba, MG, Brasil, ubiramarrc@gmail.com

a questão ambiental contextualizada a partir da realidade social, econômica, política e cultural, e incorporando as consequências do modelo de desenvolvimento na natureza e na sociedade (CARVALHO, 2006). A Constituição Federal de 1988, no artigo n° 225, estabelece que o poder público deve promover Educação Ambiental em todos os níveis de ensino e a conscientização pública para a preservação do meio ambiente (BRASIL, 1988).

A Educação Ambiental implica em uma educação para a conservação, para o consumo responsável e solidário na repartição equitativa dentro de cada sociedade e entre as sociedades atuais e as futuras. Os autores Dias e Bomfim (2011) relatam, em seu trabalho sobre a Educação Ambiental crítica, que esse trabalho deve ser interdisciplinar, ter posicionamentos críticos e específicos, atuando na formação de cidadãos em espaços formais ou informais, além de realizar a inclusão de pessoas para que estas participem da tomada de decisões e ações em seu favor e em favor da natureza.

Assim, para que a Educação Ambiental seja eficaz, se faz necessário trabalhar os problemas ambientais dentro de sua realidade e cotidiano. Desse modo, será possível deixar de enxergar a Educação Ambiental de forma alienada, como algo distante e passar a entendê-la como algo do qual fazemos parte (SAUVÉ, 2005).

Reis, Semêdo e Gomes (2012) nos dizem que a Educação Ambiental deve ser trabalhada em caráter formal, envolvendo os alunos e o ambiente escolar, ou em caráter informal, envolvendo toda a sociedade, primando pela formação de cidadãos conscientes e responsáveis, pois o exercício da cidadania é um dos aspectos essenciais à Educação Ambiental. Nesse contexto, a Educação Ambiental foi trabalhada nas residências, que é um espaço informal, e foi aperfeiçoada no ambiente formal escolar, além de ser o ambiente onde as pessoas aprendem seus principais valores morais e exemplos de vida, fazendo com que este aprendizado familiar tenha reflexos nos nichos onde o aluno vive, como no trabalho, nas residências de amigos e familiares, dentre outros, o que faz com que o resultado desta ação, com o tempo, produza uma sociedade mais sustentável. Por se tratar de mudanças em hábitos e costumes de pessoas de diferentes culturas e localidades geográficas, o trabalho individualizado ou em pequenos grupos com os alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) terá uma eficácia maior pela sensibilização.

Groenwald e Filippsen (2003) relatam que é necessária a sensibilização das pessoas para com os problemas ambientais que o planeta vivencia hoje, uma vez que esses foram provocados pelo homem, fato que o torna responsável pelo cenário ambiental atual. A reversão deste problema depende da efetivação de acordos e planos em discussão a serem elaborados pela coletividade.

Assim, como Valentin e Santana (2010) realizaram um trabalho sobre a utilização da energia elétrica que, após as atividades de conscientização, despertou uma mudança positiva de hábitos na conservação do meio ambiente, este trabalho busca obter esta mesma conscientização em relação ao espaço em que se vive. O trabalho realizado na EJA pretende promover uma (re) Educação Ambiental com os alunos, para que as mudanças nos hábitos de descarte de embalagens seja uma resposta da sensibilização realizada.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

Groenwald e Filippsen (2003), em seu trabalho, enfatizam que não é mais possível ensinar matemática sem relacioná-la com as problemáticas do cotidiano, pois a intenção desta disciplina é preparar o aluno para a resolução de desafios que lhes são apresentados diariamente.

Neste trabalho, objetivou-se quantificar o número de embalagens descartadas nas residências dos alunos, para que a Educação Ambiental pudesse ser desenvolvida com dados reais do cotidiano de cada aluno, e realizar, por meio desses dados, uma (re) educação ambiental, visando um consumo consciente e sustentável. Isso foi elaborado a fim de obter um maior impacto e conscientização, por se tratar de dados reais que foram demonstrados em gráficos na sala de aula, mostrando a importância e a eficácia de se trabalhar a Educação Ambiental, sem condicioná-la apenas à disciplina de Ciências.

Material e métodos

O trabalho foi desenvolvido no ensino da disciplina de Matemática, na Escola Municipal Aureliano Joaquim da Silva, que é um Centro de Atenção Integral à Criança e ao Adolescente (CAIC) de Ituiutaba-MG, com alunos da Educação de Jovens e Adultos, que compreende do 1° ao 5° ano do ensino fundamental, anos iniciais, e 6° ao 9° ano, anos finais, que possuem idade entre 16 e 80 anos. Para a obtenção dos dados, foi realizado um trabalho na escola que consistiu de quatro etapas.

Na primeira etapa, ocorreu a apresentação do trabalho aos alunos, demonstrando a importância do projeto para que, a partir daquele momento, os alunos pudessem ter um maior envolvimento, e para que os dados necessários para o levantamento do descarte de embalagens pudessem ser preenchidos de maneira fiel. Na segunda etapa, foi realizado um questionário impresso com os 15 alunos participantes sobre a quantidade do descarte de embalagens de suas famílias, entre os meses de maio a julho de 2015. No questionário, o aluno informou sobre seus descartes mensais com as seguintes informações: nome do item, peso/volume do produto, marca e quantidade. Foram considerados apenas os itens descartados em suas residências e foram desconsideradas as embalagens descartadas em lanches e lazer fora de suas casas.

De posse das informações dos alunos, iniciamos a terceira etapa que consistiu na pesagem das embalagens, utilizando como apoio as tabelas do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO) e outra do Instituto de Pesos e Medidas do Estado de São Paulo (IPEM), por exemplo: 2 refrigerantes 2L, cuja embalagem pet possui o peso de 48,38g vazia (2 x 48,38g = 96,76g). Vale lembrar que conhecer a marca do produto é fundamental para a obtenção do peso correto, pois há variação de pesos devido ao design e tamanho da embalagem. As referidas tabelas são de institutos que normatizam o peso e capacidade volumétrica de embalagens de várias empresas do Brasil, sendo, então, dados confiáveis e reais para a utilização.

Todas as embalagens foram pesadas e o resultado apresentado em quilograma (kg). Os casos isolados de marcas que não estão inscritas nas tabelas supracitadas foram pesados em uma balança eletrônica e não foi realizada a comparação com os dados fornecidos pelas empresas. A quarta etapa

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

consistiu-se de uma análise resultados dentro da disciplina de Matemática, realizada de diversas maneiras como debate, confecção de gráficos de setores, linhas e barras, tabelas, regra de três, multiplicação, unidades de medidas de peso e volume, além de textos sobre a importância da reciclagem no planeta, começando pelo espaço em que vivemos e, após o término do trabalho, os resultados foram apresentados no mural da escola.

Resultados e discussão

Cada aluno realizou os cálculos e confeccionou os seus gráficos a partir dos dados da pesagem (Figuras 1 e 2). Após esta etapa, todos os alunos da EJA confeccionaram os gráficos de barras de todo o material que foi pesado (Figura 3) para a demonstração dos resultados. Os resultados também foram estudados individualmente. Na maioria das residências foi predominante, por ordem decrescente, o descarte de plástico, metal, papel e vidro, devido a diversos fatores que influenciam nas compras como a cultura alimentar e o preço.

Em 2008, a indústria brasileira de embalagens foi avaliada em US$ 24.636 milhões, correspondendo a um total de 7,5 milhões de toneladas, sendo equivalente a 1,6% do produto interno bruto. Deste montante, as embalagens plásticas representaram 22%, em massa, e 25%, em valor. A principal aplicação das embalagens plásticas é o setor alimentício (65%), que apresentou um consumo de 1.085.003 t, em 2008, no qual os segmentos de bebidas não alcoólicas (531.286 t), laticínios e gorduras (196.683 t), carnes e vegetais (157.521 t) são os mais expressivos. No setor não alimentício (582.531 t), os segmentos de química e agricultura (237.381 t), produtos de limpeza (187.242 t), higiene e beleza (141.039 t) são os principais usuários das embalagens plásticas (COLTRO; DUARTE, 2013).

Além dos resultados individuais, o coletivo (referente a todos os alunos da EJA) foi posteriormente exposto nos murais da escola, a fim de sensibilizar a comunidade escolar.

Figura 1 - Aluna confeccionando um gráfico de setores com o resultado da pesagem das embalagens.
Fonte: o autor, 2015.

*Figura 2- Gráfico de Setores produzido por um dos alunos em sala de aula.
Fonte: o autor, 2015.*

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

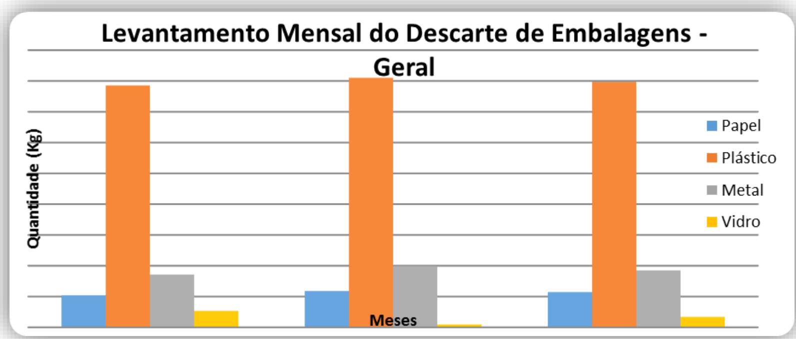


Figura 3 – Resultado do descarte de embalagens de todo o material dos alunos da EJA (em quilogramas).
Fonte: elaborado pelos autores, 2015.

Cada aluno apresentou o seu quantitativo de descarte de embalagem. Eles propuseram mudanças nos hábitos de consumo e de descarte dentro de suas residências, soluções simples como levar sacola ecológica para o mercado, separar as embalagens descartadas e entregá-las à coleta seletiva do município, identificar o lixo que contém materiais perfuro-cortantes, dentre outros.

Ao confeccionar os gráficos, os alunos ficaram impactados ao poderem verificar quantitativamente os descartes, algo nunca realizado por eles (Figuras 4 e 5).

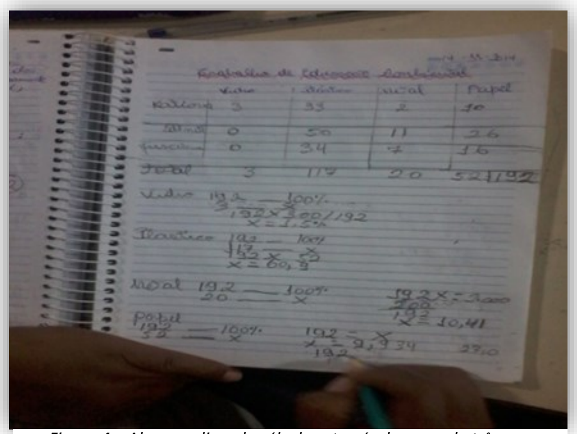


Figura 4 – Aluno realizando cálculos através da regra de três para a obtenção da porcentagem para a confecção do gráfico.
Fonte: o autor, 2015.

Figura 5 – Gráfico de setores produzido através do cálculo da porcentagem obtido.
Fonte: o autor, 2015.

A matemática foi importante porque por meio dela pudemos dimensionar e quantificar o volume utilizado mensalmente de embalagens, fazendo com que o aluno deixe de aprender Educação Ambiental com dados de livros, revistas ou reportagens que não sejam relacionados ao seu contexto diário. Após o ensino de matemática ser executado sobre os referidos dados, foi possível também a realização de um debate sobre o tema, no qual os alunos trocaram experiências e propuseram mudanças nos hábitos de consumo para torná-lo sustentável.

Uma pesquisa realizada por Silva e Groenwald (2001) mostrou que o ensino de Matemática quando relacionado a situações do cotidiano dos alunos facilita a compreensão do tema abordado, pois somente com educação do individuo a preservação ambiental poderá ser realizada de fato. A escola, por estar inserida nesse contexto, e por ser a cidadania uma das principais funções políticas da educação, assume papel importante para promover consciência, sensibilidades e atitudes socioambientais responsáveis (TORALES, 2013).

Considerações finais

A Educação Ambiental é fundamental para a formação do cidadão consciente e responsável. A teoria aliada à prática sensibiliza os educandos e estimula a mudança de comportamento em relação ao meio ambiente e à sociedade. As ações de preservação e conservação do meio ambiente são resultados de um trabalho contínuo e fundamentado no ambiente escolar.

O ensino de Educação Ambiental tem resultados e ações temporários se não forem relacionados com o contexto do indivíduo, pois, desse modo, ela é vista pelo aluno, na maioria das vezes, como algo fora de sua realidade e inacessível, além dos impactos ambientais serem tratados como algo distante e inacreditável de atingir a própria comunidade onde se vive. Com este trabalho, houve a consolidação de uma estratégia que pode ser interdisciplinar e que é promissora para o ensino de matemática. A prática de ações como esta potencializam mudanças no indivíduo.

Agradecimentos

Agradecemos a equipe gestora do CAIC de Ituiutaba que autorizou a realização das atividades deste trabalho nesta escola, aos alunos envolvidos, ao INMETRO e ao IPEM pelo fornecimento da tabela de pesos e medidas.

Referências

BRASIL. **Constituição Federal de 1988.** Promulgada em 5 de outubro de 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/ConstituicaoCompilado.htm>. Acesso em: 01 de out. de 2015.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

COLTRO L.; DUARTE L. C. Reciclagem de Embalagens Plásticas Flexíveis: Contribuição da Identificação Correta. **Polímeros,** v. 23, n. 1, p. 128-134, 2013.

CARVALHO, I. C. M. **Educação ambiental:** a formação de sujeitos ecológicos. Cortez, 2011.

DIAS, B.C.; BOMFIM, A.M. A teoria do fazer em educação ambiental crítica: uma reflexão construída em contraposição à educação ambiental conservadora. In: VIII ENPEC – ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, Campinas. **Anais...** 2011. Disponível em: <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/viiienpec/resumos/R0098-1.pdf>. Acesso em 10 de mai. de 2016.

GROENWALD, C; FILIPPSEN, R. **Educação matemática e educação ambiental:** educando para o desenvolvimento sustentável. Disponível em: <http://fep.if.usp.br/~profis/arquivos/ivenpec/Arquivos/Orais/ORAL066.pdf>. Aceso em: 23 de set. de 2015.

REBOUÇAS, J. P. **A educação ambiental entre reprodução e emancipação: experiências em escolas públicas de Mossoró/RN**. 2012. Dissertação (Mestrado). Programa Regional de Pós-graduação em Desenvolvimento e Meio Ambiente. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2012.

REIS, L. C. L dos; SEMÊDO, L. T. A. S.; GOMES, R. C. Conscientização ambiental: da educação formal a não formal. **Rev. Fluminense de Extensão Universitária**, Vassouras, v. 2, n. 1, p. 47-60, jan/jun., 2012.

SAUVÉ, L. Educação Ambiental: possibilidades e limitações. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 2, p. 317-322, mai/ago. 2005.

SILVA, C.; GROENWALD, C. Integrando a Matemática ao Tema Educação Ambiental. In: III ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS – Comunicação oral. ABRAPEC, Atibaia, SP. **Anais...** Disponível em: <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/iiienpec/Atas%20em%20html/o71.htm>. Aceso em: 23 set. de 2015.

TORALES, M. A. A Inserção da Educação Ambiental nos currículos escolares e o papel dos professores: da ação escolar a ação educativo-comunitária como compromisso político-ideológico. **Revista Eletrônica do Mestrado em Educação Ambiental**. Universidade Federal do Rio Grande. 2013. Disponível em: <http://www.seer.furg.br/remea/article/view/3437/2064>. Acesso em: 04 de out. de 2015.

VALENTIN, L.; SANTANA, L. Concepções e Práticas de Educação Ambiental de Professores de uma Escola Pública. **Ciência & Educação**, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 387-399, 2010.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES RACIONAIS FRACIONÁRIAS: UM ESTUDO DE CASO NAS ESCOLAS DE MOÇAMBIQUE

António Fernando Zucula[1]
Maria Isabel Ramalho Ortigão[2]

RESUMO

Este artigo apresenta os resultados de uma investigação sobre estratégias de estudantes do ensino médio, em uma escola secundária da cidade de Maputo, República de Moçambique, para resolver inequações racionais fracionárias. Trata-se de uma pesquisa conduzida em 2011, para responder as seguintes indagações: que estratégias os estudantes utilizam para resolver inequações algébricas fracionárias? Que tipos de erros são cometidos? Para a análise e discussão dos resultados foram utilizadas as categorias criadas por Douady (1986) e por Tsamir (1998). A partir dos resultados foi possível verificar que os erros mais frequentes incidem sobre: “multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos” e “dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto/quociente”. Esses erros são decorrentes do processo de ensino-aprendizagem das inequações, o qual privilegiou técnicas de resolução em vez de conceitos e propriedades matemáticas.

Palavras-chave:

Inequações Racionais Fracionárias. Análise. Dificuldades. Estratégias.

Introdução

A Matemática lecionada na escola implica, sobretudo, desenvolver o pensamento matemático e as habilidades do aluno. Estes dois aspectos são necessários para a compreensão de diferentes situações, incluindo aquelas do cotidiano e, também, servem de ferramenta a outros campos de conhecimento. Analisando esta situação, a partir da política educacional moçambicana e compreendendo que a educação é a chave para o desenvolvimento econômico, sociocultural e político de um país, nos propusemos a investigar dificuldades na resolução de inequações racionais fracionárias por estudantes moçambicanos, matriculados no ensino médio.

Segundo a literatura, os estudantes mostram, em geral, grandes dificuldades na resolução de inequações desde os primeiros anos da escola secundária até a universidade. Para Costa (1998) e Huillet (1996), na sua resolução, tais estudantes aplicam um processo puramente algébrico e, muitas vezes, resolvem-nas como se de equações se tratassem, pois o fazem substituindo

[1]Academia de Ciências Policiais de Moçambique (ACIPOL). Doutorando UERJ/Bolsista CAPES - PEC-PG. E-mail: zucula_antonio@yahoo.com.br
[2]Universidade do Estado do Rio de Janeiro. E-mail: isabelortigao@terra.com.br

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

apenas o sinal de igualdade pelo sinal de desigualdade, o que parece ilustrar uma transferência mecânica de procedimentos.

Este estudo tem como suporte a Educação Algébrica, pois além de se tratar de um tema presente no cotidiano escolar do ensino médio de Moçambique, já que é parte integrante dos Programas Curriculares do Ensino Básico e do Ensino Secundário Geral, também, tem sido objeto de discussão, estudos e análise de professores e pesquisadores por todo o mundo. Em Moçambique, por exemplo, estudos envolvendo resolução de equações algébricas têm sido conduzidos, particularmente, por Huillet (1996), Costa (1998), Monjane (2001) e Zucula (2012).

No Brasil, Ribeiro (2007) investigou os significados da noção de equação algébrica, sob a luz das teorias de Registros de Representação Semiótica, de Durval e da Transposição Didática de Chevallard. O autor chama a atenção para os multissignificados encontrados em sua pesquisa. Outros estudos brasileiros envolvem conhecer os erros que os estudantes cometem ao se envolverem em resoluções de equações (AZEVEDO, 2002; FREITAS, 2002).

Quando os alunos terminam o ensino médio, tem-se a expectativa de que eles tenham desenvolvido suas capacidades de pensar e aplicar raciocínios numéricos, espaciais, algébricos, lógicos, gráficos e estatísticos. Essa capacidade desenvolve-se ao longo do tempo e relaciona-se diretamente às experiências pelas quais eles irão passar e aos diversos tipos de pensamento que estão associados aos diferentes campos da Matemática, que deverão ser trabalhados de forma integrada e organizados num grau crescente de complexidade.

Com relação à álgebra, predomina, ainda, uma visão tradicional do ensino desse campo da Matemática vinculado à aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações e expressões. Este pode ser um dos motivos que faz com que muitos estudantes tenham dificuldades, levando-os a formarem uma opinião de que a álgebra estudada na escola não tem nenhuma relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o mundo cotidiano.

Tsamir e os seus colegas (1998, p. 56) identificam algumas dificuldades dos estudantes com relação à resolução de inequações $\frac{A}{B} > 0 \Rightarrow A > 0 \ e \ B > 0; A^2 > B^2 \Rightarrow A > B \vee A^2 < B^2 \Rightarrow A < B$ fracionárias:

> - Dificuldades com valores excluídos: as restrições, para cada inequação proposta, foram denominadores não podendo ser nulos. Segundo eles, os estudantes produziram, em geral, soluções erradas ao negligenciarem essas restrições. Isto significa que os autores detectaram dificuldades nos estudantes em relação às condições da existência de soluções no conjunto dos números reais.
> - Escolha inapropriada de conetivos lógicos: os estudantes, com frequência, inverteram o uso dos conetivos "e" e "ou".
> - Dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto/quociente: a origem desse tipo de dificuldade advém do uso de afirmações insuficientes do tipo:
> - Resolver equação no lugar de inequação: Alguns estudantes, em algumas inequações, simplesmente trocaram o sinal de desigualdade (> ou <) pelo sinal de igualdade (=) e resolveram inequações como se fossem equações.
> - Multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos: uma boa parte dos estudantes multiplicou ambos os membros de inequações pelo denominador sem levar em conta o caso em que o denominador era negativo.

O autor classificou os erros cometidos pelos estudantes nas cinco categorias acima, afirmando, em especial, que as duas últimas decorrem do uso de procedimentos de resolução válidos para a equação como se fossem válidos para a inequação. Neste sentido, a nosso ver, o impacto das similaridades estruturais entre equações e inequações cria um forte sentimento intuitivo de que os procedimentos usados para resolver equações poderão ser usados, também, para inequações.

Douady (1986, p. 11) identifica as seguintes, representações usadas como recursos na resolução de inequações:

- RA (uso da representação algébrica somente);
- RA+RG (combinação entre a representação algébrica e a representação gráfica);
- RA+RN (combinação entre a representação algébrica e a representação numérica).

Para Douady (1986), ao trabalhar com inequações, é necessário que o professor mobilize ou crie condições, por meio de tarefas, que permitam aos estudantes a mobilização para lidarem com diferentes representações.

O texto aqui proposto baseia-se nos resultados de uma investigação conduzida com o propósito de investigar as dificuldades dos estudantes matriculados no 11º ano do Ensino Médio Geral, de uma escola pública da cidade de Maputo, Moçambique.

Na sequência, apresentamos a pesquisa referenciada no texto e descrevemos, brevemente, a estrutura do sistema educacional em Moçambique. Na continuidade, discutimos os resultados da pesquisa e finalizamos com nossas considerações finais. Cabe observar que, devido a limitações com relação ao número de páginas, apresentamos aqui duas das questões propostas aos estudantes.

A Pesquisa

A pesquisa referenciada nesse texto buscou responder as seguintes questões:

(a) Que tipo de dificuldades, erros e ideias alternativas apresentam os estudantes do 11º ano na resolução de inequações racionais fracionárias?

(b) Qual é a forma de representação que induz ao erro ou facilita a resolução correta de cada tipo de inequação racional fracionária?

Para a condução da pesquisa (ZUCULA, 2012), foi selecionada uma amostra de 55 estudantes do 11º ano do ensino médio de uma escola pública moçambicana. Os estudantes foram convidados a responder a um rol de questões envolvendo a resolução de inequações. Optou-se por propor questões típicas elaboradas com base em livros didáticos usuais nas escolas públicas de Moçambique (VUMA; CHERINDA, 2009; FAGILDE, 2011; NEVES et al, 1990; NETTO; ALMEIDA, 1991). Foram realizadas, ainda, a observação de aulas e a análise de documentos curriculares oficiais (Plano Curricular do Ensino Secundário Geral-PCESG e Programa de Matemática do Ensino Médio). Após a aplicação do instrumento investigativo,

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

realizou-se inicialmente uma categorização dos 55 testes em relação ao desempenho, separando-os em três grupos: respostas certas, respostas erradas e respostas em branco.

O Sistema educacional moçambicano

O Sistema da Educação em Moçambique é regido pela Lei nº 6/92 de 6 de Maio de 1992 e apresenta a seguinte estrutura:

- Ensino pré-escolar, que abrange as crianças de zero aos cinco anos de idade, em creches e jardins de infância.
- Ensino primário, que compreende as sete primeiras séries, subdivididas em: Ensino primário do 1º Grau (EP1) que vai da 1ª a 5ª séries, e o Ensino primário do 2º Grau (EP2) que abarca a 6ª e a 7ª séries. As crianças devem ingressar no Ensino primário no ano em que completam seis anos de idade.
- Ensino Secundário Geral, que compreende dois ciclos, nomeadamente: o 1º ciclo (ESG1) que cobre a 8ª, 9ª e 10ª séries e o 2º ciclo (ESG2) que abrange a 11ª e a 12ª séries. Este segundo ciclo também é denominado de ensino médio.
- Ensino Técnico-Profissional (ETP), que estrutura-se em ensino Elementar, Básico e Médio, que correspondem ao EP2, ESG1 e ESG2, respectivamente.

A formação de professores para o Ensino Primário é realizada por meio do nível básico ou médio. Para atuar nos Ensino Primário, exige-se no mínimo, que se tenha concluído a 10ª série, mais um ano de formação pedagógica. Para a atuação no Ensino secundário é necessário a formação em nível superior, em universidade. O Ensino Superior (ES) forma estudantes que concluíram o ESG2 ou equivalente e a sua duração varia entre 4 a 5 anos para a licenciatura (graduação). A idade mínima para o ingresso na Universidade é 18 anos.

De modo geral, a estrutura do sistema educacional moçambicano é diferente do brasileiro, embora a educação básica se complete, em ambos, em doze anos. Outra diferença é a idade de ingresso no nível superior, que no Brasil, não se exige idade mínima, mas apenas que o estudante tenha concluído o ensino médio.

Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de inequações racionais fracionárias

Como afirmado anteriormente, foram propostas aos estudantes a resolução de seis inequações, das quais duas são apresentadas a seguir, com o intuito de descrever os tipos de dificuldades, erros e ideias alternativas apresentadas por eles em sua resolução. A tabela 1, apresentada a seguir, apresenta o percentual de acertos e erros cometidos pelos estudantes.

Categorias	Inequação 1: $\frac{5}{x-2} > 0$	Inequação 2: $\frac{2x-5}{x-2} < 1$
Respostas certas	(14) 25%	(20) 36%
Respostas erradas	(27) 50%	(30) 55%
Respostas em branco	(14) 25%	(5) 9%
Total	(55) 100%	(55) 100%

Tabela 1 – Desempenho dos estudantes
Fonte: Dados da pesquisa 2011, elaboração dos autores.

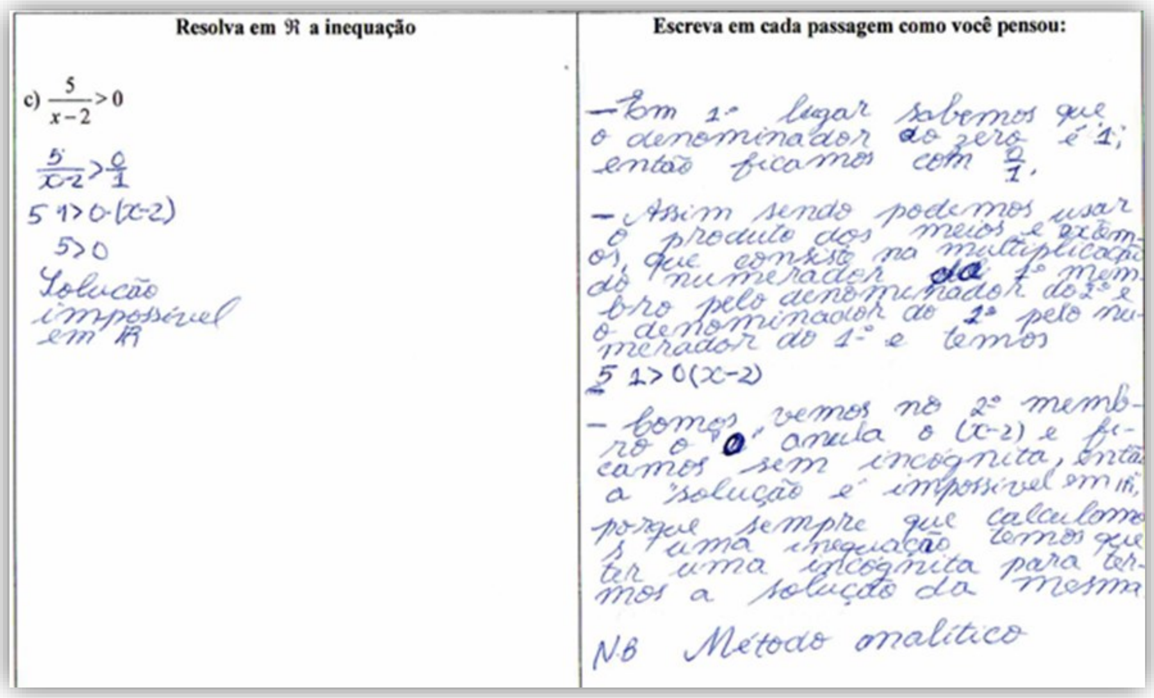
Observa-se que 14 estudantes acertaram a primeira inequação e 20 acertaram a segunda inequação. Dos 14 estudantes que acertaram, 12 resolveram a inequação de forma simples, ou seja, eles apenas impuseram a condição de que se $x - 2 > 0$, então $x > 2$, acertando a atividade em poucas passagens.

Constatamos, na resolução desta inequação, que 50% do total de testes (27 estudantes) continham uma resposta errada, dos quais 33% (9 estudantes) cometeram o erro do tipo "multiplicar ou dividir por fatores (MDF) que não são necessariamente positivos". Um exemplo desse tipo de erro cometido é o seguinte:

$$\frac{5}{x-2} > 0 \Rightarrow 5 > 0(x-2) \Rightarrow 5 > 0$$

Observando o erro descrito e a justificativa contida na figura 1 (apresentada na sequência), constatamos que o estudante não se preocupou com o domínio de existência, isto é, com o fato de o denominador de $\frac{5}{x-2}$ não poder ser nulo, nem com o sinal que $(x\text{-}2)$ pode ter. A causa do erro esteve no fato de o estudante não ter colocado a condição de existência, isto é, não ter se preocupado com o denominador de $\frac{5}{x-2}$, que não pode ser nulo.

Na figura 1, que se segue, pode-se compreender melhor, na justificativa, o raciocínio do estudante e a causa do erro, quando diz "Em 1º lugar sabemos que o denominador do zero é 1; então ficamos com 0/1. Assim sendo, podemos usar o produto dos meios e extremos que consiste na multiplicação do numerador do 1º membro pelo denominador do 2º e o denominador do 1º pelo numerador do 1º e temos $5.1 > 0(x-2)$ ". Isto é consistente com a visão científica em termos matemáticos. Todavia, tratando-se da resolução de inequação, essa visão ou esse procedimento do estudante não está correto (a). Na figura 1, apresentamos um exemplo de teste contendo este tipo de erro.



Resolva em $\Re$ a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:
c) $\frac{5}{x-2} > 0$ $\frac{5}{x-2} > \frac{0}{1}$ $5 \cdot 1 > 0 \cdot (x-2)$ $5 > 0$ Solução impossível em $\mathbb{R}$	— Em 1º lugar sabemos que o denominador do zero é 1; então ficamos com $\frac{0}{1}$. — Assim sendo podemos usar o produto dos meios e extremos, que consiste na multiplicação do numerador do 1º membro pelo denominador do 2º e o denominador do 2º pelo numerador do 1º e temos $5 \cdot 1 > 0(x-2)$ — Como vemos no 2º membro o 0 anula o $(x-2)$ e ficamos sem incógnita, então a solução é impossível em $\mathbb{R}$, porque sempre que calculamos uma inequação temos que ter uma incógnita para termos a solução da mesma NB Método analítico

Figura 1: Exemplo de erro do tipo multiplicar ou dividir por fatores (MDF) que não são necessariamente positivos.
Fonte: Dados da pesquisa 2011, elaboração dos autores.

Nos 27 testes com respostas incorretas, observamos ainda que 9 estudantes deixaram de mencionar a condição de existência, ou seja $x \neq 2$, o que corresponde a um erro do tipo "dificuldades com valores excluídos". Em relação aos 14 (25%) testes em branco, os estudantes só iniciaram as resoluções, abandonando-as num estágio preliminar que não permitia dizer se eles alcançariam respostas certas ou erradas. Por esta razão, se categoriza esses testes como contendo respostas em branco.

As constatações nesta inequação $\frac{2x-5}{x-2} < 1$ foram que 60% do total de testes continha reposta errada, o que corresponde a 30 dos 50 estudantes que a resolveram. Também verificamos que 57% desses 30 estudantes que não acertaram (17 estudantes) cometeram o seguinte tipo de erro: Para resolver a inequação $\frac{2x-5}{x-2} < 1$ os estudantes apresentaram a seguinte resolução:

$$\frac{2x-5}{x-2} < \frac{1}{1} \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-2} < \frac{x-2}{x-2} \Leftrightarrow 2x-5 < x-2 \Leftrightarrow 2x-x < -2+5 \Leftrightarrow x < 3 \Leftrightarrow x \in \Re :]-\infty;3[$$

Nessa resolução, os estudantes multiplicaram e dividiram os fatores (MDF) que não são necessariamente positivos. Eles só apresentaram apenas uma possibilidade de resolução, e não consideram outras possibilidades. Neste caso, o x não satisfaz ambas as desigualdades. Deveriam primeiro notar que $\frac{2x-5}{x-2}$ é indefinida em $x = 2$. Feito isto, eles deveriam transformar a inequação na forma padrão, isto é,

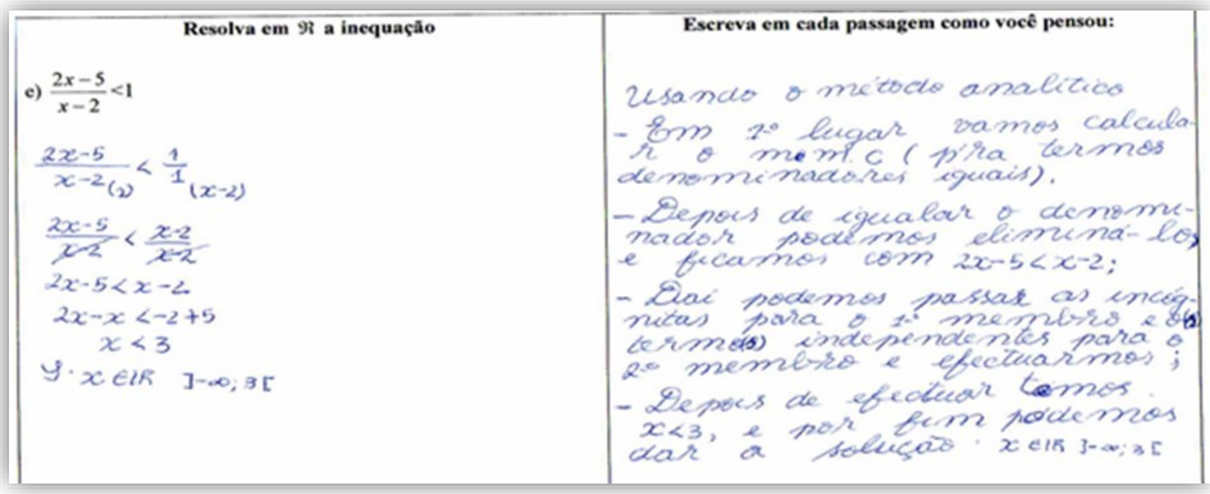
$$\frac{2x-5}{x-2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{(x-2)} - \frac{1}{(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5-(x-2)}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5-x+2}{x-2} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} < 0$$

Então $x - 3 > 0$ e $x - 2 < 0$ ou $x - 3 < 0$ e $x - 2 > 0$. Este procedimento é equivalente a resolver os dois sistemas de inequações S_1 e S_2, resolução que é apresentada a seguir, fazendo posteriormente a união entre as respectivas soluções. Os sistemas citados são:

$$S_1 = \begin{cases} x-3>0 \\ x-2<0 \end{cases} \quad ou \quad S_2 = \begin{cases} x-3<0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x<2 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x<3 \\ x>2 \end{cases}$$

Conjunto de soluções $S =]\ 2,\ 3\ [$

O equívoco que descrevemos é descrito como sendo a dedução incorreta de sinais (DIS) de fatores a partir do sinal do produto/quociente. A justificativa do aluno, apresentada na figura 2, reflete claramente como ele realiza a resolução: "… passar incógnitas para o 1° membro e os termos independentes para o 2° membro e …", numa sequência de procedimentos automáticos que culmina com a transposição do coeficiente alterando também o sinal.



Resolva em $\Re$ a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:
e) $\frac{2x-5}{x-2}<1$	Usando o método analítico
$\frac{2x-5}{x-2}_{(1)} < \frac{1}{1}_{(x-2)}$	- Em 1º lugar vamos calcular o m.m.c (p'ra termos denominadores iguais).
$\frac{2x-5}{\cancel{x-2}} < \frac{x-2}{\cancel{x-2}}$	- Depois de igualar o denominador podemos eliminá-los e ficamos com $2x-5<x-2$;
$2x-5<x-2$	- Daí podemos passar as incógnitas para o 1º membro e os termos independentes para o 2º membro e efectuarmos;
$2x-x<-2+5$	- Depois de efectuar temos $x<3$, e por fim podemos dar a solução: $x \in \mathbb{R}\ ]-\infty; 3[$
$x<3$	
S: $x \in \mathbb{R}\ ]-\infty; 3[$	

Figura 2 – Exemplo de erro do tipo "multiplicar ou dividir por fatores (MDF) que não são necessariamente positivos" e "dedução incorreta de sinais (DIS) de fatores a partir do sinal do produto/quociente".
Fonte: Dados da pesquisa 2011, elaboração dos autores.

Análise de influências de tipo de representação que induz ao erro ou facilita a resolução correta de cada tipo de inequação

Nesta seção, está em destaque a análise da influência de tipos de representações que induzem ao erro ou facilitam a resolução correta de cada tipo de inequação tendo como bases teóricas as contribuições de Douady (1986).

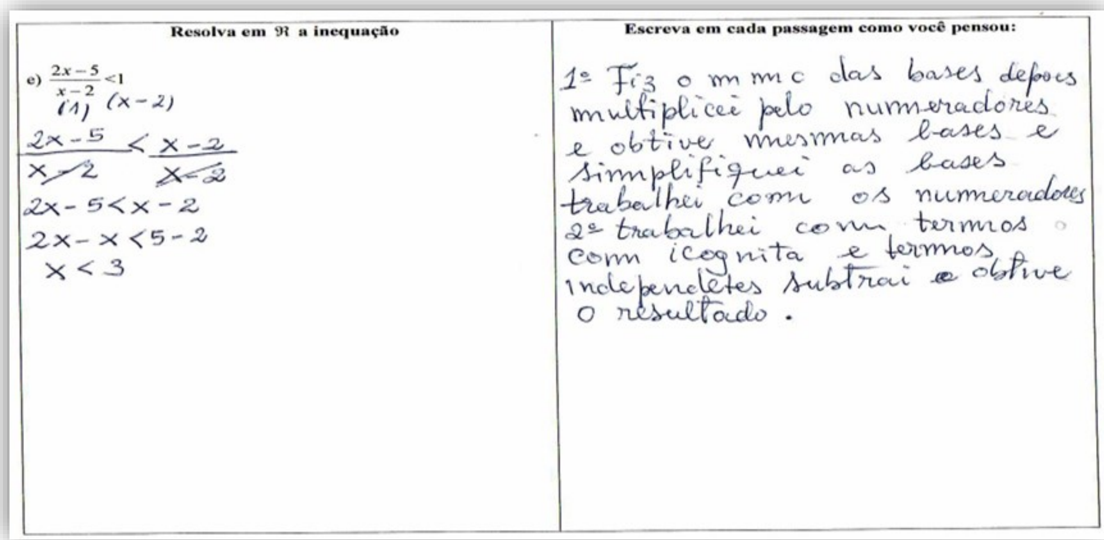
A questão que foi aplicada aos estudantes que participaram da pesquisa foi a seguinte: $\frac{2x-5}{x-2}<1$. A tabela 2, apresentada a seguir, descrimina tipos de representações usadas pelos estudantes para resolverem a inequação.

Inequação	Representações usadas pelos alunos			Reposta em Branco
	RA	RA+RG	RA+RN	
$\frac{2x-5}{x-2}<1$	21 (4)*	29 (16)**	0	5

Fonte: Dados da pesquisa 2011, elaboração dos autores.
(*) Entre parênteses são dados os números de estudantes que resolveram corretamente em cada representação.
(**) Entre parênteses são dados os números de estudantes que resolveram corretamente em cada representação.

Quando elaboramos as inequações que fariam parte do teste, para além de seguirmos as sugestões de Neves e Alves (1990), Netto e de Almeida (1991), Vuma e Cherinda (2009) e Fagilde (2011), também nos preocupamos em escolher inequações cujas resoluções pudessem apresentar a combinação entre representações.

Entre os 50 estudantes que resolveram a inequação, 21 (42%) optaram por usar, apenas, a representação algébrica (RA). Destes, apenas 4 estudantes acertaram e os 17restantes erraram. A escolha de usar somente a representação algébrica (RA) não foi adequada e, possivelmente, isso contribuiu para o alto índice de resultados errados. Segue-se o extrato do teste de um estudante que usou apenas a representação algébrica (RA) e, por esse fato, obteve o resultado errado.



Resolva em ℜ a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:
e) $\frac{2x-5}{x-2}<1$ $(1)\ (x-2)$ $\frac{2x-5}{\cancel{x-2}} < \frac{x-2}{\cancel{x-2}}$ $2x-5<x-2$ $2x-x<5-2$ $x<3$	1º Fiz o mmc das bases depois multipliquei pelo numeradores e obtive mesmas bases e simplifiquei as bases trabalhei com os numeradores 2º trabalhei com termos com icognita e termos independetes subtrai e obtive o resultado.

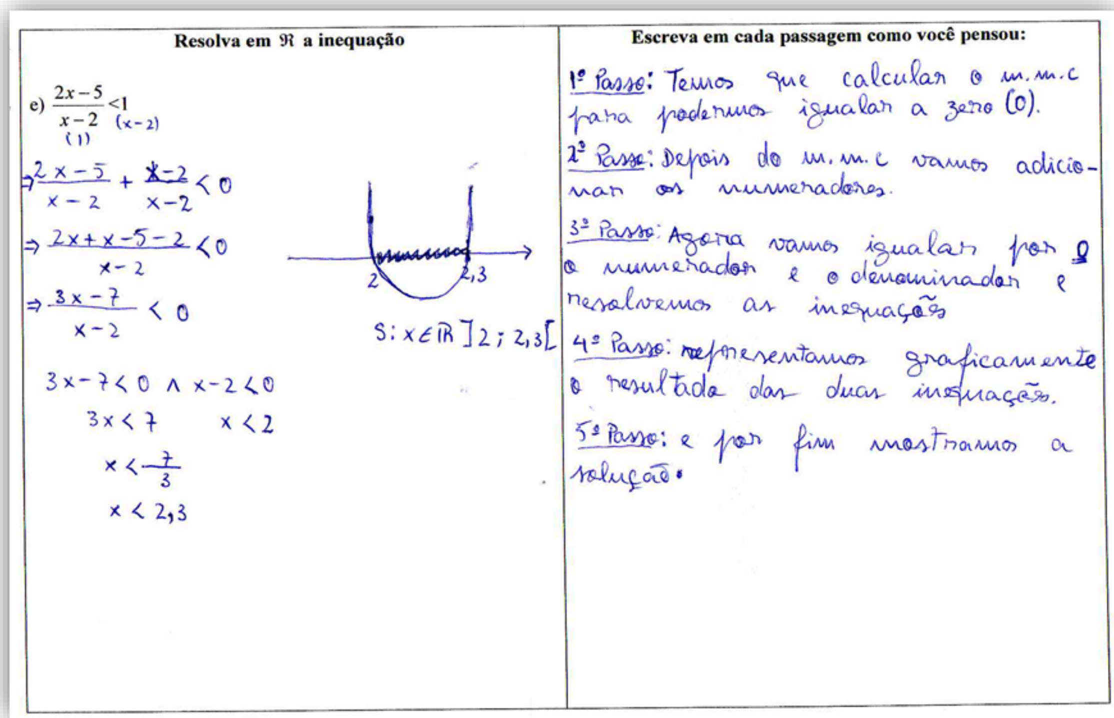
Figura 3 – Uso da representação algébrica (RA)
Fonte: Dados da pesquisa 2011, elaboração dos autores.

Observando-se a resolução, juntamente com as justificativas apresentadas na figura 3, constata-se que se trata da representação algébrica (RA). Nas justificativas ficou claro o emprego da citada representação, conforme os dizeres do estudante:

> Fiz o mmc das bases depois multipliquei pelo numerador e obtive mesmas bases e simplifiquei as bases, trabalhei com os numeradores, trabalhei com termos incógnita termos e independentes subtrai e obtive o resultado (ESTUDANTE A).

Contudo, no que concerne à expressão “bases”, pode representar uma concepção alternativa e/ou dificuldade conceptual do estudante. Esse estudante não consegue diferenciar os conceitos “bases” e “denominador”.

Dos 50 estudantes que resolveram esta inequação, 29 (58%) optaram pela combinação entre as representações algébrica (RA) e gráfica (RG), dos quais 16 resolveram corretamente. Como exemplo da combinação entre a representação algébrica (RA) e gráfica (RG) na inequação, segue o extrato do teste de um estudante que resolveu a atividade de modo equivocado.



Resolva em $\Re$ a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:
e) $\frac{2x-5}{x-2} < 1$ $\Rightarrow \frac{2x-5}{x-2} + \frac{\cancel{x-2}}{x-2} < 0$ $\Rightarrow \frac{2x+x-5-2}{x-2} < 0$ $\Rightarrow \frac{3x-7}{x-2} < 0$ $3x-7<0 \wedge x-2<0$ $3x<7 \quad x<2$ $x<\frac{7}{3}$ $x<2{,}3$ $S: x \in \mathbb{R}\ ]2;2{,}3[$	1º Passo: Temos que calcular o m.m.c para podermos igualar a zero (0). 2º Passo: Depois do m.m.c vamos adicionar os numeradores. 3º Passo: Agora vamos igualar por 0 o numerador e o denominador e resolvemos as inequações 4º Passo: representamos graficamente o resultado das duas inequações. 5º Passo: e por fim mostramos a solução.

Figura 4 – Uso da combinação entre representações (RA+RG)
Fonte: Dados da pesquisa 2011, elaboração dos autores.

Categorizamos como combinação entre as representações algébrica e gráfica (RA+RG), pois, de acordo com a justificação do estudante:

> Temos que calcular o m.m.c para podermos igualar a zero (0) depois do m.m.c vamos adicionar os numeradores. Agora vamos igualar por 0 o numerador e o denominador e resolvemos as inequações, representamos graficamente o resultado das duas inequações e por fim mostramos a solução (ESTUDANTES B).

Todavia, a parte relativa à expressão "igualar o" pode representar uma concepção alternativa ou erro conceitual do estudante, pois ele faz confusão entre o sinal de igualdade e o de desigualdade.

Para essa atividade, tivemos que, dos 55 estudantes, 21 (38%) usaram somente a representação algébrica, 29 (53%) optaram pela combinação de RA e RG e 5 (9%) não resolveram a inequação.

Considerações finais

No estudo referenciado neste trabalho, buscou-se identificar as estratégias utilizadas por estudantes do ensino médio de uma escola moçambicana para resolver inequações algébricas fracionárias. Em nossas análises, percebemos que, de modo geral, os estudantes fazem uso de esquemas técnicos, sem uma devida compreensão de seus significados. Possivelmente, isso reflita uma perspectiva tecnicista de ensino em que o aspecto algorítmico seja priorizado em detrimento do aspecto conceitual (conceitos, propriedades e princípios). Tais perspectivas estão presentes não somente em escolas moçambicanas, mas também no Brasil e em outros países.

Esperamos que este estudo contribua para a investigação em Educação Matemática de maneira que avancemos na qualidade da educação, no país e no mundo em geral, do ponto de vista da melhoria qualidade da aprendizagem na área. O uso das diferentes representações, nomeadamente: algébrica, gráfica e numérica, de uma forma combinada no ensino de inequações, poderá permitir que os estudantes aprendam a resolver, de várias maneiras, problemas relacionados com inequações racionais fracionárias.

Os professores poderão trabalhar simultaneamente com equações e inequações (mesmo que antes disso tenham trabalhado sequencialmente com equações e depois com inequações), fazendo um paralelo na tentativa de evitar analogias inapropriadas entre os procedimentos de resolução desses dois conteúdos matemáticos, de modo a usar um quadro comparativo que espelhe semelhanças e diferenças. Assim, eles poderão minimizar as dificuldades dos estudantes na aprendizagem desse conteúdo matemático.

Referências

AZEVEDO, E. Q. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas**. 2002. 176f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2002..

COSTA, MA. J. **Visualização e mudança de quadros numa perspectiva construtivista: uma contribuição para o estudo das inequações**. Trabalho de diploma. Universidade Pedagógica: Moçambique, 1998.

DOUADY, RE. Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'ensignement des mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques**, Paris, v. 7, n. 2, p. 5-31, 1986.

FAGILDE, SA. A. M. **M11-Matemática 11ª classe.** Programa actualizado. Textos Editores: Lda-Moçambique, 2011.

FREITAS, M. A. **Equação do 1° grau:** métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. 2002. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2002.

HUILLET, DA. Analytical or graphical resolution? The inequalities case. **Proceedings of the 2nd National Congress of Association for Mathematics Education of South Africa**: Cape Town, p. 79-89, 1996.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA (MEC) E INSTITUTO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO (INDE). **Plano Curricular do Ensino Secundário Geral (PCESG)**: Documento Orientador, objectivos, Política, Estrutura, Plano de estudos e Estratégias de Implementação, 2007.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. **Programa de Matemática do ensino secundário, 2° ciclo**. Maputo: Moçambique, 2009.

MOÇAMBIQUE. Lei 6/92, de 6 de Maio. **Reajusta e adequa a Lei 4/83 do Sistema Nacional de Educação**. Boletim da República, I série, n.º 19, Maputo, p. 104 (8-13), 1992.

MONJANE, TE. L. M. **Análise de erros dos alunos da 8ª classe na resolução de sistemas de equações com duas incógnitas**. UP. FCNM, 2001.

NETTO, S. DI P.; DE ALMEIDA N. S. **Matemática Curso Fundamental**. 2ª ed. Vol. 1, 2º Grau, São Paulo: Editora Scipione. 1991.

NEVES, MA. A.; VIEIRA. M. T. C.; ALVES, A. G. **Livro de texto de matemática do 10º ano**, 2ª ed. 1º Volume, Porto Editora,1990.

RIBEIRO, A. J. **Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. 2007. 141f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2007.

TSAMIR, P.; ALMOG. N.; TIROSH. D. Students` Solutions of inequalities. **Proceedings of PME 22. Stellenbosch, South African**, v. IV, p. 129-136. 1998.

VUMA, JO. P.; CHERINDA, MA. **Matemática 11ª classe, Pré-Universitário:** Novo currículo do ensino secundário. Maputo: Longman Moçambique, 1ª ed., 2009.

ZUCULA, A. F. **Resolução de Inequações Racionais Fracionárias por estudantes moçambicanos:** um estudo de caso. 2012. 86f. Dissertação (Faculdade de Educação da Universidade Eduardo Mondlane), Maputo, Moçambique, 2012.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

DIVISÃO DE FRAÇÕES: EXPLORANDO ALGORITMOS NÃO USUAIS

Rafael Filipe Novoa Vaz[1]

RESUMO

Este artigo fornece reflexões sobre a prática pedagógica comum do professor de Matemática que supervaloriza a memorização de regras e procedimentos operatórios com o fazer matemática em sala de aula e, por outro lado, parece alocar em segundo plano a compreensão dos conceitos, dos significados e das relações entre as grandezas. No ensino de frações, a ênfase na memorização de procedimentos contribui para que a divisão de frações perca significado, o conceito relacionado à divisão é confundido com o algoritmo utilizado nesta operação. Esta pesquisa apresenta diferentes abordagens do tema, fornecendo ao professor os subsídios necessários para ensinar divisão de frações de forma mais conceitual, não se limitando ao algoritmo na qual a divisão se transforma na multiplicação de frações sem nenhum significado.

Palavras-chave:

Prática pedagógica. Ensino de matemática. Divisão de frações.

Introdução

Os professores do século XXI ainda trazem consigo concepções antigas, transmitidas através das gerações. “Ensinar como aprendi” é uma prática pedagógica comum. Para tornar a situação mais complexa, os alunos de hoje em dia possuem muitos motivos para estarem desatentos ou desinteressados; afinal, os *smartphones*, a internet e as redes sociais são muito mais atraentes que as aulas que ainda são ministradas neste século XIX.

> O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, “carroções”, cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar ideias fortes da matemática. (LOPES, 2008, p.20-21)

Nas escolas básicas, é possível constatar uma estrutura padronizada e engessada, na qual grande parte do ensino de Matemática está inserida. Há uma tendência por parte de professores, principalmente os de Matemática, a considerar que a aprendizagem é exclusivamente e diretamente proporcional a quantidade de exercícios resolvidos pelo estudante (D’AMBRÓSIO,

[1]IFRJ – CPAR. E-mail: rafael.vaz@ifrj.edu.br

1989). Essa ideia, ainda hoje, parece estar inserida na prática pedagógica do professor, na qual os procedimentos operatórios e a memorização de regras são supervalorizados (PONTE, 1992), em detrimento da compreensão dos conceitos pertinentes, mesmo que diversas pesquisas apontem para uma falência desse modelo.

A divisão de frações

Para Wu (1999, p.2), existem problemas que persistem no ensino de frações, como, por exemplo, as regras das quatro operações aritméticas em frações, que parecem ser feitas exclusivamente para explicar o fenômeno que descrevem, sem relação com as quatro operações usuais em inteiros positivos com que os alunos estão familiarizados. O aluno aprende a somar frações com denominadores diferentes, a igualar denominadores usando o menor múltiplo comum, muitas vezes, sem compreender qual a relação entre as novas frações que serão somadas e as frações anteriores. Na divisão de frações, o estudante aprende que para dividir duas frações há uma espécie de "receita de bolo", que consiste em multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, mesmo que esse algoritmo não faça nenhum sentido.

Segundo Lopes (2008), a prescrição de regras e macetes para realizar operações é um problema grave no ensino de frações. Para Rojas et al (2015), o conhecimento dos professores de Matemática está centralizado nos procedimentos operatórios de frações, principalmente na multiplicação e na divisão: "Nas operações de multiplicação e divisão de frações, o professor se limita a ensinar os procedimentos simbólicos mediante a algoritmos convencionais, promove a automatização dos algoritmos para efetuar as operações" (ROJAS et. al., 2015, p. 163).

Em consonância com Rojas et. al. (2015), Wu (1999) e Ma (1999), Fazio e Siegler (2011) defendem que o professor atue mais significativamente na compreensão dos conceitos relacionados às frações e recomendam que os professores promovam estratégias de ensino que privilegiem, no ensino de frações, o "conhecimento conceitual" e não o "conhecimento processual", termos adotados por esses pesquisadores.

O conhecimento conceitual de frações é definido como o conhecimento do significado das frações, de suas magnitudes e relações com grandezas físicas. Trata-se de uma compreensão de como os procedimentos aritméticos com frações são matematicamente justificados. Por outro lado, o conhecimento processual é a habilidade de percorrer uma série de etapas para resolver um problema (FAZIO; SIEGLER, 2011).

Em uma pesquisa, Ma (1999) constatou uma grande lacuna nos conhecimentos dos professores de Matemática relacionados à divisão de frações. O trabalho envolveu 23 professores norte-americanos;

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

destes, 21 se propuseram a resolver $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, no entanto, apenas 43% conseguiram resolver corretamente. A pesquisadora relata que 24% dos professores ficaram inseguros sobre quais seriam os procedimentos algorítmicos que deveriam ser adotados e apenas um destes professores foi capaz de criar uma representação conceitualmente correta para este caso.

> A deficiência dos professores no entendimento do significado da divisão por frações determinou a sua incapacidade de criar uma representação apropriada. Mesmo o seu conhecimento pedagógico não pode compensar a ignorância do conceito. (MA,1999, p.60)

Em contrapartida, Ma (1999) observou que todos professores chineses foram capazes de resolver a mesma questão. Segundo a autora, eles descreveram o procedimento com a seguinte frase “dividir por um número é equivalente a multiplicar pelo recíproco” e não “inverter e multiplicar” como os professores americanos. Segundo a autora, durante as entrevistas, os professores chineses foram mais além, apresentaram três alternativas para a resolução da questão. Uma delas poderia ajudar na introdução do algoritmo usual da divisão:

$$\begin{aligned} 1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} &= \left(1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1}\right) \div \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1}\right) \\ &= \left(1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1}\right) \div 1 \\ &= 1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Figura 1 - Justificativa do algoritmo apresentada por um professor chinês
Fonte: Ma (1999)

A seguir, serão apresentadas três abordagens que podem ser utilizadas para o estudo da divisão de frações no ensino fundamental. A sequência foi idealizada pelo autor e elaborada a partir dos trabalhos de Ma (1999) e Wu (1999): divisão com auxílio de representações, divisão através de um algoritmo não usual e divisão através da multiplicação.

Divisão com auxílio de representações gráficas

Em um momento inicial, as divisões de frações poderiam ser exploradas de modo mais construtivo, por meio de conceitos adquiridos durante a aprendizagem dos números naturais e das frações, sem a utilização de qualquer algoritmo novo. Ao ensinar divisão de números naturais, o professor utiliza comumente a ideia de “quantos cabem?” Por exemplo, na divisão de 100 por 20 é possível pensar que 100 ÷ 20 = 5, pois “cabem cinco números 20 em 100”. Trata-se de uma forma de pensar natural para professores e estudantes que, geralmente, não é utilizada no ensino de frações e que poderia contribuir para a aprendizagem desse conteúdo.

Para tanto, o auxílio de figuras seria muito eficiente. Para dividir 1/2 por 1/8, o estudante poderia observar, na figura 2, que cabem quatro pedaços correspondentes a 1/8 em um pedaço correspondente a 1/2. Logo, ${}^{1}/_{2} \div {}^{1}/_{8} = 4$.

1							
1/2				1/2			
1/4		1/4		1/4		1/4	
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Figura 2 - Tabela de frações
Fonte: elaborado pelo autor.

Outra exploração interessante está associada à ideia da repartição. Na divisão de 30 por 2, o modo mais eficiente provavelmente não seria em pensar quantos "2" cabem em "30", e sim, repartir o 30 em duas partes. Um modo análogo pode ser utilizado na divisão de 3/4 por 2. Ao repartir cada 1/4 da fração em dois pedaços iguais, obtém-se 3 pedaços destacados em oito o que corresponde a 3/8.

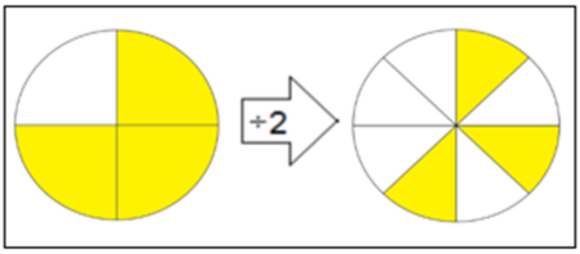


Figura 3 – Divisão de 3/4 por 2
Fonte: elaborado pelo autor.

Divisão através de um algoritmo não usual

Em uma segunda etapa, há a divisão de frações através da divisão de numerador por numerador e denominador por denominador. Este algoritmo foi apresentado por alguns professores chineses (Ma, 1999), provavelmente seja desconhecido pelos professores.

Para a construção desse algoritmo, inicialmente, poderia ser trabalhada a divisão de frações com denominadores iguais. Por exemplo, a divisão de 9/10 por 3/10. Neste caso, o conceito de quantos 3/10 cabem em 9/10 poderia ser facilmente compreendido, até mesmo em frações representadas em conjuntos. A figura 4, a seguir, mostra dois conjuntos de quadrados coloridos, nos quais há 10 quadrados, sendo 9 vermelhos e 1 azul. A figura 5 ilustra os quadrados vermelhos agrupados em três subconjuntos. Como em cada há 3 destes subconjuntos, conclui-se que 9/10: 3/10 = 3.

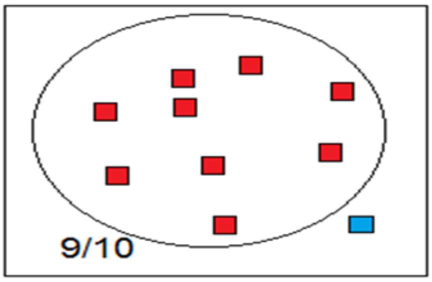


Figura 4 - 9/10 de um conjunto
Fonte: elaborado pelo autor.

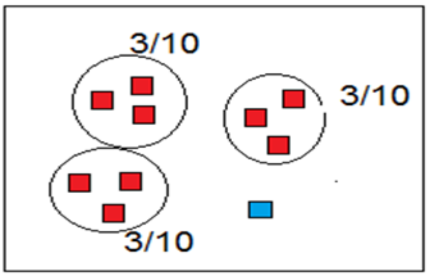


Figura 5 - 9/10 dividido por 3/10
Fonte: elaborado pelo autor.

Após a resolução desta operação com o auxílio dos diagramas, o professor poderia explorar outros modos de se obter a resposta, conduzindo os estudantes a possibilidade de encontrar o mesmo resultado dividindo-se os numeradores e os denominadores.

$$\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{9 \div 3}{10 \div 10} = \frac{3}{1} = 3$$

Em seguida, poderia ser explorada a divisão com numeradores iguais, por exemplo: 1/4 dividido por 1/2. Com o auxílio da tabela apresentada na figura 1, o aluno poderia observar que em 1/4 é a metade de 1/2. Logo, em 1/4 cabe a metade de 1/2, ou seja, 1/4 : 1/2 = 1/2.

1							
1/2				1/2			
1/4		1/4		1/4		1/4	
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Figura 6 - Tabela de frações
Fonte: elaborado pelo autor.

Neste ponto, alguns alunos poderiam observar que a fração 1/2 pode ser obtida realizando uma operação análoga ao exemplo anterior, ou seja, dividindo numerador por numerador e denominador por denominador. A próxima etapa seria dividir frações com denominadores e numeradores distintos, em que os termos da primeira fração fossem múltiplos dos termos da segunda.

$$\frac{9}{10} \div \frac{3}{5} = \frac{9 \div 3}{10 \div 5} = \frac{3}{2}$$

Normalmente, os estudantes aprendem divisão de frações após a multiplicação. Consequentemente, a utilização de um procedimento similar a multiplicação, no qual se operam numerador com numerador e denominador com denominador, pode fazer mais sentido ao aluno.

Divisão através da multiplicação: o algoritmo conhecido

A última etapa seria a construção do algoritmo mais eficiente em termos operacionais, que é encontrado em todos os livros didáticos. Para se dividir duas frações, multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda. E como chegar a este algoritmo?

O professor poderia propor a turma que refletisse sobre uma divisão entre frações em que o denominador da primeira não fosse múltiplo do denominador da segunda, por exemplo, 6/7 dividido por 3/5. Um bom caminho seria aquele que contempla a utilização de outro conceito que frequentemente é abandonado: o de fração equivalente.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

O conceito de fração equivalente é essencial para a comparação entre frações e para a compreensão da adição e da subtração de frações. Porém, sua aplicabilidade pode ser estendida a outras operações. Como 7 não é múltiplo de 5, a divisão de 6/7 por 3/5, usando o procedimento anterior, não é possível. Entretanto, a fração 6/7 é equivalente a 30/35, e 35 é um múltiplo de 5. Fazendo esta substituição, a divisão se torna fácil.

$$\frac{6}{7} \div \frac{3}{5} = \frac{30}{35} \div \frac{3}{5} = \frac{30 \div 3}{35 \div 5} = \frac{10}{7}$$

A construção de um conhecimento conceitual fornece inúmeras possibilidades. Para dividir frações com denominadores diferentes, um procedimento análogo à adição/subtração poderia ser adotado ao se obter duas frações equivalentes que possuíssem denominadores iguais, como mostra o exemplo a seguir:

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{20} \div \frac{15}{20} = \frac{8 \div 15}{20 \div 20} = \frac{8 \div 15}{1} = \frac{8}{15}$$

Neste caso, entretanto, para que a última parte do processo fosse facilmente compreendida pelo estudante seria necessário que ele já estivesse habituado a interpretar a fração como um quociente entre dois inteiros. O exemplo anterior poderia ser utilizado para introduzir o algoritmo da divisão. Como o denominador da primeira fração $\frac{2}{5}$ não é divisível pelo denominador da segunda $\frac{3}{4}$ (5 não é divisível por 4), obtêm-se uma fração equivalente a 2/5, multiplicando numerador e denominador por 4.

$$= \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$$

Como o novo numerador (8) também não divide o numerador de $\frac{3}{4}$ (8 não é divisível por 3), obtém-se outra fração equivalente a $\frac{8}{20}$, multiplicando numerador e denominador por 3.

$$= \frac{8 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{24}{60}$$

Em seguida, substituímos 2/5 por 24/60, e realizamos a operação.

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{24}{60} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$$

Para finalizar a sequência didática, o professor poderia realizar o mesmo procedimento sem indicar os resultados das multiplicações:

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} \div \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} \div \frac{3}{4}$$

Na sequência, dividimos 3 por 3, no numerador, e 4 por 4 no denominador.

$$=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\rightarrow\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}$$

Então, sendo conveniente, dependendo da turma e da necessidade, o professor poderia desenvolver a generalização deste algoritmo:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\div\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{a\cdot c\cdot d}{b\cdot c\cdot d}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\cdot\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}$$

Considerações finais

Por que se multiplica a primeira pelo inverso da segunda? Este é, sem dúvida, o questionamento – vindo de um aluno do sexto ano do ensino fundamental - que motivou a escrita deste artigo. A melhor forma de ensinar divisão é, unicamente, a transmissão de um algoritmo, exercitado em dezenas de exemplos? Será que um aluno que simplesmente memoriza a regra e aplica eficientemente realmente aprendeu divisão?

As pesquisas, referenciadas neste trabalho, apontam que ambas as respostas são negativas. A ênfase na memorização de procedimentos pode contribuir para que a divisão de frações não tenha significado, pois o conceito relacionado a dividir é confundido com o próprio algoritmo da divisão de frações.

O ensino de frações precisa ser repensado e reformulado, porque ele ainda está embasado em concepções ultrapassadas, como aquela na qual a aprendizagem matemática está relacionada, quase exclusivamente, à repetição e à memorização (D'AMBRÓSIO, 1989; LOPES, 2008). O ensino de matemática deveria, sim, estar e ser fundamentado na melhor compreensão dos conceitos e dos significados, na valorização do raciocínio e do pensamento matemático. No caso específico de frações, esse ensino deve estar voltado para o desenvolvimento do que Fazio e Siegler (2011) denominaram de "conhecimento conceitual de frações".

Referências

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. São Paulo. v. 2, n. 2, p. 15 – 19, 1989.

FAZIO, L.; SIEGLER, R. S. Teaching fractions. **Educational Practices Series**. Geneva. International Academy of Education - International Bureau of Education. v. 22, 2011.

LOPES, Antônio J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**. Rio Claro. v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics:** Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

PONTE, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: PONTE, J.P. et al. **Educação matemática**. Lisboa. Instituto de Inovação Educacional, 1992. p.187-239.

ROJAS, N.; FLORES, P.; CARRILLO, J. Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

los Números Racionales. **Bolema.** Rio Claro. v. 29, n. 51, p. 143-167, 2015.

WU, H. **Some remarks on the teaching of fractions in elementar school**. [1999]. Disponível em: http://math. berkeley. edu/~ wu/fractions2. pdf . Acesso em: 05 Mai. 2013.

VAZ, R. F. N. **Metodologia Didática de Análise de Soluções Aplicada no Ensino de Frações**. 2013. 81f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), UFRJ, Rio de Janeiro, 2013.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO POR ALUNOS DO 5º ANO

Daiana Gomes Prior[1]
Tânia Stella Bassoi[2]

RESUMO

Para identificar como os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental I elaboram e resolvem problemas de divisão, utilizou-se como referência teórica as obras de Vergnaud (2009), Correa e Spinillo (2004), Nehring (2001), entre outras. Os objetivos da pesquisa são identificar as ideias de divisão na elaboração e resolução de problemas feitos pelos alunos, resolver problemas de divisão e analisar as formas de resolução. Essa é uma pesquisa de cunho qualitativo com observação em ambiente natural e análise dos registros escritos organizados pelas crianças participantes da pesquisa, bem como entrevista sobre as produções. Como resultado verificou-se que os estudantes apresentaram dificuldades em elaborar enunciados claros, resolver os problemas de divisão produzidos por eles, bem como traduzir os registros da linguagem natural para a linguagem matemática. A ideia de divisão, recorrente na elaboração dos problemas, foi a procura pelo elemento unitário.

Palavras-chave:

Elaboração de problemas. Resolução de problemas. Divisão. Anos Iniciais.

Introdução

Com a disseminação da educação para todos, o conhecimento matemático teve que se tornar acessível, exigindo do professor práticas pedagógicas que conduzissem o educando a aprender diferentes conceitos matemáticos. Um dos conceitos que fomentou essa pesquisa foi o domínio da divisão.

A preocupação inicial do estudo era analisar como as crianças compreendiam o algoritmo da divisão e como operavam com ele. Ao iniciar a revisão da literatura sobre o assunto, houve uma mudança de interesse e, ao invés de estudar como as crianças entendem e utilizam o algoritmo, procurou-se responder ao seguinte questionamento: Como alunos do 5º ano do Ensino Fundamental I elaboram e resolvem problemas de divisão? Buscou-se compreender as ideias que as crianças tinham sobre divisão. Frente a esse problema, o objetivo geral deste estudo foi, a partir da elaboração e resolução de problemas pelas crianças, identificar as ideias de divisão presentes nestas ações, analisando também suas formas de interpretação e de resolução de problemas.

[1]Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel – UNIOESTE. E-mail: daianeprior@hotmail.com.
[2]Professora Associada do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Cascavel – UNIOESTE. E-mail: tstellabassoi@gmail.com.

Um dos teóricos que sustentou este trabalho foi Vergnaud (2009). O autor apresenta os problemas de estruturas multiplicativas como uma relação de multiplicação quaternária, envolvendo quatro medidas, sendo duas a duas de naturezas distintas. No estudo dessas relações, podemos encontrar vários tipos de multiplicação e divisão ou, ainda, várias classes de problemas em que para a sua resolução é necessária uma multiplicação ou uma divisão.

Para Nunes (2005), o percentual de acertos de problemas envolvendo divisão resolvidos com materiais manipuláveis é maior do que os resolvidos com lápis e papel. Dessa forma, torna-se importante trabalhar com os alunos de maneira que registrem as diferentes formas de representação na resolução de problemas. Este processo é complexo para as crianças, pois, em geral, elas interpretam mentalmente os problemas apresentados, mas não conseguem transcrever a forma de pensamento ou transcrevem parcialmente, levando a um erro de interpretação pelo professor. A avaliação desta transcrição parcial poderia ser reconsiderada se acompanhada da explicação da criança que a elaborou.

No cotidiano escolar, frequentemente encontramos casos em que a criança não consegue visualizar o objeto matemático, dependendo da compreensão do tipo de representação semiótica utilizado. Para Nehring (2001, p. 26) "[...] as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento".

A matemática exige dos alunos a ação de interpretar e representar uma determinada escrita em outro sistema semiótico. Assim:

> [...] acreditamos que a dificuldade na resolução de problemas em sala de aula não seja somente de interpretação, mas sim de compreensão do processo de leitura e entendimento do enunciado que precisa ser estabelecido e do conteúdo cognitivo que é envolvido nas diversas situações modeladas, exigindo uma tarefa de conversão entre o enunciado do problema – texto e a representação numérica. (NEHRING, 2001, p. 30)

Dessa forma, segundo Nehring (2001, p. 36), "[...] o aspecto do sentido da operação possui uma identificação semântica que tem por base a passagem do objeto real aos signos". Nesse contexto, as crianças deveriam ler um determinado enunciado, compreender o objeto com o qual deverão operar para, então, transcrevê-lo em signos matemáticos, realizando, assim, as operações necessárias para a resolução.

Fundamentadas nestes teóricos, algumas questões orientaram a análise dos dados, a saber: Quais as palavras recorrentes que utilizaram para referirem-se a problemas de divisão? Como interpretavam e resolviam um problema de divisão escrito por outras crianças? Quais as escritas utilizadas para a resolução dos problemas de divisão?

Desenvolvimento

A pesquisadora neste trabalho atuou, segundo Lüdke e André (1986, p.29), como "observador participante" no qual "[...] a identidade do pesquisador e os objetivos do estudo são revelados ao grupo pesquisado desde o início". Dessa forma, desde o primeiro momento, as crianças souberam que se tratava de uma pesquisa sobre problemas de dividir, que eles deveriam escrever em duplas e dar para outra dupla resolver. Houve a necessidade de realizar dois encontros com o grupo: 1) coletar os problemas elaborados e resolvidos pelas duplas de alunos e 2) realizar a entrevista com as duplas de elaboração e com a dupla de resolução dos problemas.

Este estudo foi realizado em uma turma de 5º ano, de uma escola municipal do município de Vera Cruz do Oeste – PR, composta por 22 alunos do período vespertino. No primeiro encontro com a turma, a pesquisadora perguntou aos alunos se sabiam resolver uma "continha" de dividir e eles responderam que sim. Perguntou, então, se sabiam o que era um problema, eles responderam que era criar uma historinha com números. Em seguida, os alunos se organizaram em duplas por escolha deles, resultando onze duplas que foram identificadas como D1, D2,..., D11.

A entrevista auxiliou na análise das respostas obtidas, deixando clara a necessidade de um diálogo com as crianças após a resolução de qualquer atividade que exija interpretação do registro escrito. Ao justificarem as elaborações dos problemas, percebeu-se que a oralidade pode contribuir para a evolução do registro escrito, uma vez que, pela expressão falada, eles diziam como o problema poderia ter sido mais claro para os resolvedores, evidenciando que a dificuldade não estava na elaboração e, sim, no momento de transcrever a operação matemática pedida para a linguagem natural.

Como resultado da pesquisa, verificou-se que os enunciados criados pelas crianças faziam referência à operação a ser executada. As palavras mais utilizadas foram "dividiu" e "distribuiu", possivelmente para induzir a dupla que resolveria o problema a entender que se tratava de uma operação de divisão, procurando reproduzir a forma como trabalhavam com os problemas de divisão na escola.

Outros problemas não utilizaram nenhuma palavra que se relacionasse com divisão explicitamente, mas deixavam subentendida a operação a ser realizada para que os colegas pudessem resolver. A seguir, estão listados alguns exemplos que representam as principais características encontradas nos problemas elaborados;

Problema contendo a palavra "dividir" representando a maioria dos problemas.

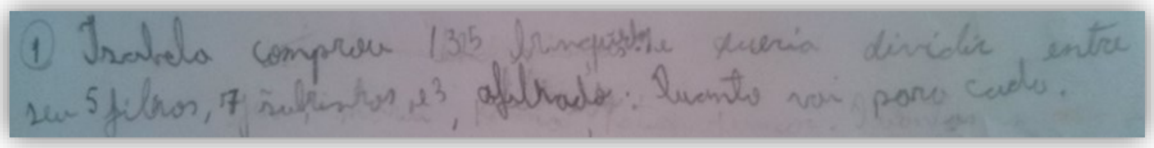

① Isabela comprou 135 brinquedos e queria dividir entre seu 5 filhos, 7 subrinhos e 3 afilhado. Quanto vai para cada.

Figura 1[3] – Problema elaborado pela dupla D4
Fonte: Acervo das autoras.

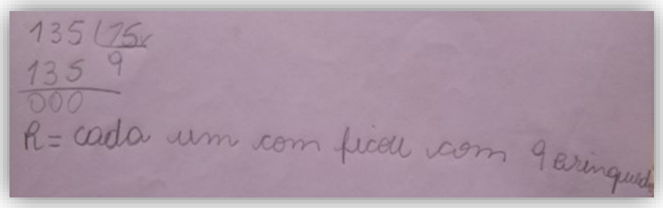

135 | 15
135   9
000
R= cada um com ficou com 9 brinqued

Figura 2 – Resolução do problema pela dupla D3.
Fonte: Acervo das autoras.

[3] "Isabela comprou 135 brinquedos e queria dividir entre seu 5 filhos, 7 subrinhos e 3 afilhado. Quanto vai para cada."

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

Na resolução desta dupla, o uso do sinal “x” (vezes) junto ao divisor apareceu em muitas resoluções, possivelmente pelo fato de a professora ter ensinado a resolver o algoritmo da divisão lembrando o processo multiplicativo inverso. Para resolver este problema, foi necessário efetuar uma operação de adição para encontrar o divisor e realizar a operação de divisão.

A dupla D3, ao resolver, transcreveu corretamente o problema da linguagem natural para a linguagem matemática, compreendeu o sentido operatório apresentado no problema, pois efetuou o cálculo de adição antes da divisão. Apresentaram também domínio do algoritmo, realizando corretamente a divisão. Ao entrevistar a dupla D4, eles afirmaram que a dupla D3 resolveu o problema de acordo com a proposta por eles elaborada.

O problema elaborado pela dupla D2 e resolvido pela dupla D4 é um dos problemas que não apresentaram palavra que sugerisse a operação a ser realizada.

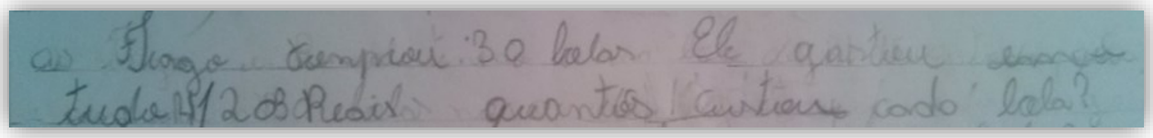


Figura 3[4] – Problema elaborado pela dupla D2
Fonte: Acervo das autoras.

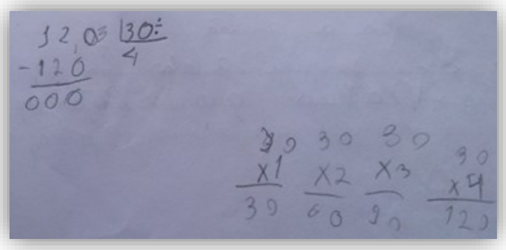


Figura 4 – Resolução do problema pela dupla D4
Fonte: Acervo das autoras.

A dupla D4, ao resolver, conseguiu traduzir o enunciado que estava em linguagem natural para a linguagem matemática, reconhecendo, o sentido operatório subentendido. Eles demonstraram dominar o uso do algoritmo da divisão, realizando corretamente os cálculos.

A dupla D2, ao ser questionada sobre a forma como a dupla D4 resolveu, disse que a resolução estava correta, de modo que as duas duplas tinham clareza sobre como elaborar o enunciado e também sobre a forma de resolvê-lo. Embora, no processo de resolução, a dupla D4 tenha registrado o sinal de divisão junto ao divisor, abaixo da operação, apresentou a operação de multiplicação que mostra a ideia de quantos 30 cabem em 120, um processo inverso de divisão.

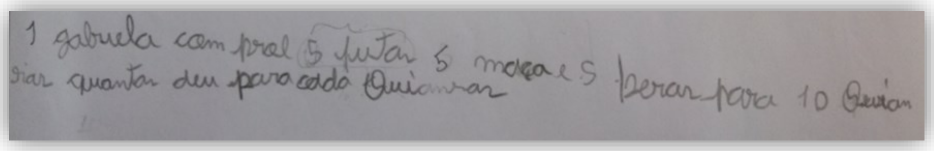


Figura 5[5] – Problema elaborado pela dupla D6
Fonte: Acervo das autoras.

[4]“Tiago comprou 30 bolas. Ele gastou em tudo R$ 120 Reais quantos custou cada bola?”
[5]“Gabriela com prol 5 futas 5maça e 5 peras para 10 Quiansas quantas deu para cada Quiansas”

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

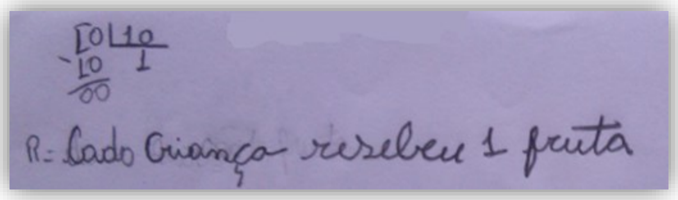


Figura 6 – Resolução do problema pela dupla D6
Fonte: Acervo das autoras.

Neste problema, as crianças elaboradoras não utilizaram palavras como repartir ou dividir no texto. A dupla D8 utilizou o algoritmo da divisão, embora o texto pudesse conduzir a uma interpretação errônea, pois, no texto, cinco frutas estavam dispostas anteriores a cinco maças e cinco peras.

Os elaboradores, ao falarem em frutas e as denominarem por maças e peras, estão fazendo referência a grandezas de mesma natureza, assim, quando a dupla D8 resolveu o problema, utilizou o método de divisão matemática, isto é, juntaram todas as frutas e dividiram pelo número de crianças e deram como resposta o elemento representante da classe das frutas, pois não faria sentido falar uma maça ou uma pera.

Durante a entrevista sobre a forma de resolução, a dupla elaboradora disse que a resolução não estava correta, pois cada criança deveria receber metade de cada fruta para poder comer ambas, o que não ficou explícito no enunciado. Essa concepção de divisão é similar a ideia de divisão social, como verificado por Correa e Spinilo (2004).

Um dos onze problemas elaborados não contemplou a proposta de elaborar um problema de divisão.

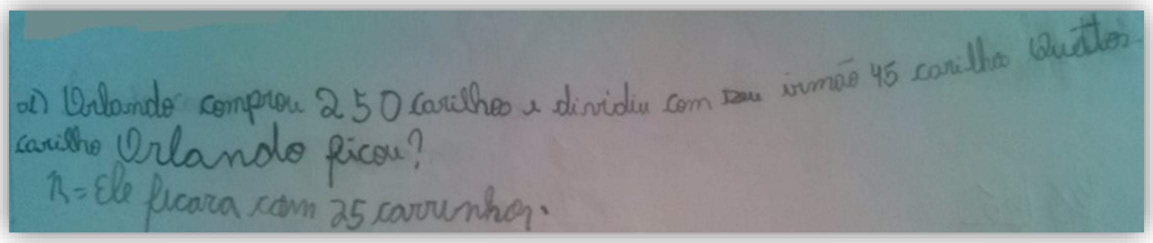


Figura 7[6] – Problema elaborado pela dupla D8
Fonte: Acervo das autoras.

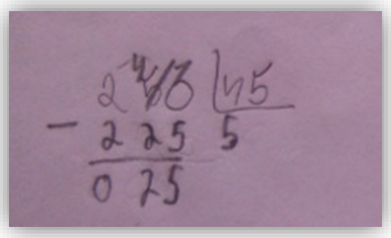


Figura 8 – Resolução do problema pela dupla D7.
Fonte: Acervo das autoras.

A resolução da dupla D7 apresentou o algoritmo da divisão induzida pela palavra "dividiu". No momento da entrevista, a dupla D8 disse que a resolução estava correta contemplando a proposta que era "dividir 250 por 45". Embora o problema contenha a palavra "dividiu", a pergunta do problema remetia a

[6] "Orlando comprou 250 carilhos e dividiu com seu irmão 45 carilhos. Quantos carilho Orlando ficou?"

uma operação de subtração. Parece que a ideia subjacente é repartir, comum entre as crianças como, por exemplo, repartir o lanche com o colega, sem ser em partes iguais e dizer que "dividiu" o lanche. Quanto a resposta ao problema, a dupla utilizou o resto da divisão como referência e não o quociente, mostrando que eles não dominam o significado dos elementos do algoritmo, dividendo, divisor, quociente e resto.

Após analisar todos os problemas, suas formas de elaboração e de resolução, verificou-se que a maioria recorreu à redução a unidade, possivelmente por se tratarem de problemas similares aos encontrados nos livros didáticos. Mostraram também semelhanças na resolução, ao efetuarem multiplicações auxiliares como uma forma de realizar a divisão por sua operação inversa.

Com a realização deste trabalho, pôde-se perceber que as crianças apresentam dificuldade em realizar a transformação do enunciado para o registro numérico, mostrando a importância de o professor explorar as possibilidades metodológicas para que a criança possa compreender a ideia operatória presente no enunciado.

O sentido das palavras utilizadas para a divisão referiu-se a divisão social, na qual todos deveriam receber a mesma quantidade para que não houvesse privilegiados ou prejudicados. Como visto em Correa e Spinillo (2004), este processo de divisão social se deve ao fato de a criança se embasar em suas experiências do cotidiano.

Para resolver um problema matemático escolar, é necessário que as crianças traduzam as palavras utilizadas no enunciado em operações numéricas, extraindo as informações necessárias e organizando-as na forma matemática para possibilitar resolução. Todas essas ações apresentam graus de dificuldade diferentes, pois envolvem conhecimento escrito da língua materna e seu equivalente em linguagem matemática. Para melhorar essa concepção, temos que entender a escola como o lugar no qual o aluno estará sujeito a conceitos novos e importantes, que precisam ser aprendidos.

Conclusão

A ideia inicial desta pesquisa era compreender por que as crianças apresentam dificuldades em utilizar o algoritmo da divisão. A literatura mostrou outras abordagens sobre a operação de divisão, o que provocou uma mudança do problema inicial. Olhar as ideias sobre divisão pelo ato da escrita de um problema por uma dupla de crianças e a resolução por outra dupla mostrou a manifestação das ideias operatórias dos alunos na elaboração e resolução de problemas. A maneira como entendiam a escrita de seus colegas para resolver os problemas, mesmo com um texto não claro, ressaltou a importância da presença numérica na formação do algoritmo da divisão, ignorando as informações sobre as ideias contidas no texto.

Esse estudo mostrou a importância de o professor trabalhar com as crianças a elaboração de enunciados e não apenas resolver os apresentados nos livros didáticos, incentivando os alunos a escrever sobre situações matemáticas. Isso pode ser realizado por meio da escrita de problemas ou de textos, de modo a contribuir para a melhoria de registros escritos e também para exercitar a manifestação do raciocínio matemático.

A diversificação das atividades trabalhadas em sala de aula e o pensar coletivamente, observado nos momentos dos trabalhos realizados em duplas, a interpretação de textos escritos, elaborados pelas próprias crianças, evidenciou que o incentivo, pelo professor, de atividades exploratórias sobre conteúdos matemáticos mostram as ideias matemáticas sobre divisão mais utilizadas pelos alunos, seja na elaboração do problema seja nas formas de resolução. Essas manifestações permitem ao professor preparar atividades que explorem ideias diferentes das apresentadas comumente pelos alunos.

Referências

CORREA, J.; SPINILLO, A.G. O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. In: PAVANELLO, R. M. **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental:** a pesquisa e a sala de aula. São Paulo: SBEM. 2004 p. 103 – 127.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

NEHRING, C.M. **Compreensão de texto**: enunciados de problemas multiplicativos elementares de combinatória. 2001. 210 p. Tese (Doutorado em Educação). Ensino de Ciências Naturais, UFSC.

NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação matemática:** Números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005. p. 83 – 114.

VERGNAUD, G.; **A Criança, a Matemática e a Realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba - PR: UFPR, 2009. C XI p. 243 – 268.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

APLICAÇÃO DO GEOGEBRA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Kelry Fernandes[1], Roney Braz Rodrigues[2], Alexandre Martins Dias[3], Celso de Ávila Ramos[4], Fausto Rogério Esteves[5], Patrícia Carolina de Souza Pereira[6]

RESUMO

A tecnologia se torna cada vez mais importante no processo ensino -aprendizagem em diversas áreas, sobretudo na Matemática que, por sua vez, tem suas dificuldades. Neste sentido, este trabalho pretende discutir a solução de um problema de geometria utilizando o *software* livre GeoGebra, muito conhecido no meio educacional. O problema proposto não tem solução direta implementada no *software*. Assim, pretende-se mostrar que, usando o raciocínio lógico, podemos ir mais além do que o *software* tem a nos oferecer, no caso dessa aplicação, construir um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio e centro dados a partir de estratégias ou procedimentos usando os recursos do *software*.

Palavras-chave:

GeoGebra. Formas geométricas. Raciocínio lógico.

Introdução

O GeoGebra é um software educativo livre que reúne ferramentas para aplicações em Geometria, Álgebra e Cálculo. Seu autor é o professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo na Áustria (GEOGEBRA, 2015).

O *software* consiste em um sistema de geometria dinâmica que permite realizar construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas e funções que podem ser modificadas dinamicamente. Esse *software* apresenta uma janela algébrica, que permite a inserção de equações e coordenadas para a construções de objetos diretamente. Assim, o GeoGebra tem um grande potencial para trabalhar com várias aplicações vinculadas a números, vetores e pontos (SOUZA JUNIOR, 2010)

Trata-se de um *software* livre e multiplataforma. Assim, pode ser instalado em computadores com sistema operacional Windows, Linux ou Mac OS. É possível obter o GeoGebra gratuitamente por meio do endereço https://www.geogebra.org/download.

Nas escolas brasileiras, de forma geral, metodologias específicas para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos

[1]Acadêmico do Curso Bacharelado em Ciência da Computação, UNIFENAS. E-mail: kelryfernandes@outlook.com
[2]Acadêmico do Curso Bacharelado em Ciência da Computação, UNIFENAS. E-mail: roneybraz10@gmail.com
[3]Docente do Curso Bacharelado em Ciência da Computação, UNIFENAS. E-mail: alexandre.dias@unifenas.br
[4]Docente do Curso Bacharelado em Ciência da Computação, UNIFENAS. E-mail: celso.ramos@unifenas.br
[5]Docente do Curso Bacharelado em Ciência da Computação, UNIFENAS. E-mail: fausto-rogerio@hotmail.com
[6]Docente do Curso Bacharelado em Ciência da Computação, UNIFENAS. E-mail: patricia.souza@unifenas.br

e o consequente desenvolvimento de suas habilidades para solucionar problemas, que requerem ligações de fatores e argumentos lógicos, são escassas (DIAS, 2012; RANGEL, 2015; LEIVAS, 2011; GUEDES, 2013, BARCELOS 2004). Considerando esse fato, este trabalho apresenta como seu principal objetivo inscrever um triângulo equilátero em uma circunferência, por meio de duas técnicas ou procedimentos que estimulem o raciocínio lógico, ao mesmo tempo em que orientem o estudante a fazer uso dos recursos das ferramentas computacionais do *software* GeoGebra para esse propósito.

Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência dada a partir de duas circunferências auxiliares

A partir de uma circunferência com raio e centro conhecidos, apresenta-se uma estratégia para construir um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência. Para isso, são utilizadas três circunferências, estrategicamente construídas de forma que suas interseções forneçam os pontos para formar o triângulo equilátero proposto. A figura 1 apresenta, como exemplo, uma circunferência 1 de raio igual a r = 3, com o centro posicionado no ponto A(0,0).

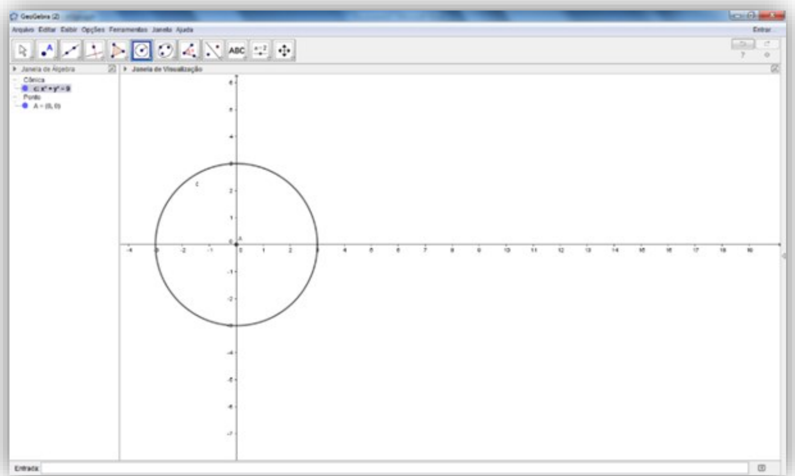


Figura 1 – Circunferência original com raio r= 3 no ponto A(0,0).
Fonte: elaborado pelos autores.

A estratégia sugerida é construir duas circunferências auxiliares, de mesmo raio, mas com centros deslocados em relação ao centro da circunferência original. Assim, propôs-se adicionar um ponto B(0,3) e um ponto C(0,-3), que serão os centros das outras duas circunferências auxiliares a serem construídos, com o mesmo raio da circunferência original dada. Essa construção produz quatro pontos de interseção com a circunferência original que, associados aos centros das circunferências auxiliares B e C, dividem a circunferência original em seis arcos ou partes iguais. A figura 2 mostra a nossa proposição desta estratégia.

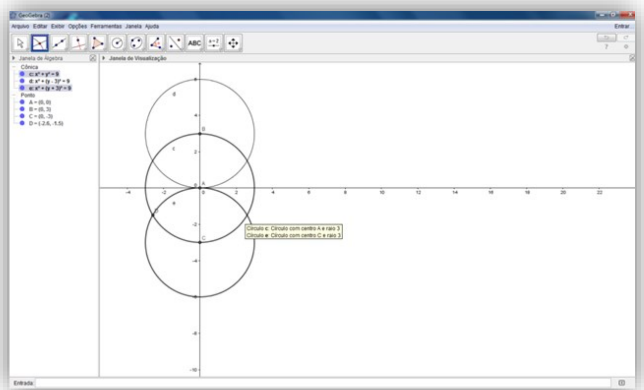


Figura 2 – Interseções das duas circunferências auxiliares com a original.
Fonte: elaborado pelos autores.

Finalmente, interligando 3 pontos quaisquer, não consecutivos entre aqueles que dividem a circunferência original, podemos obter triângulos equiláteros inscritos. A figura 3 mostra a posição final de um dos triângulos possíveis obtidos com esse procedimento ou estratégia.

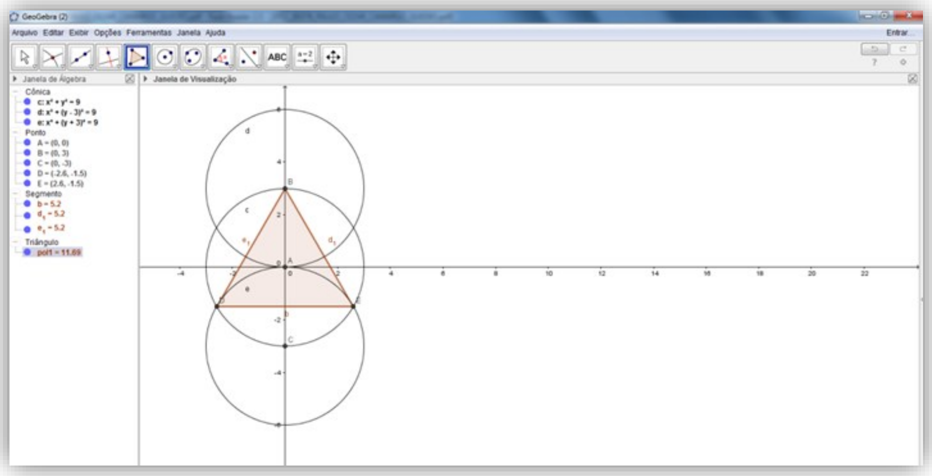


Figura 3 – Pontos interligados, formando o triângulo equilátero proposto.
Fonte: elaborado pelos autores.

Justificativa do procedimento ou estratégia proposta

Nesta seção, será apresentada, em detalhes, uma explicação sobre a inscrição do triângulo equilátero na circunferência dada, tomando-se como base a figura 4.

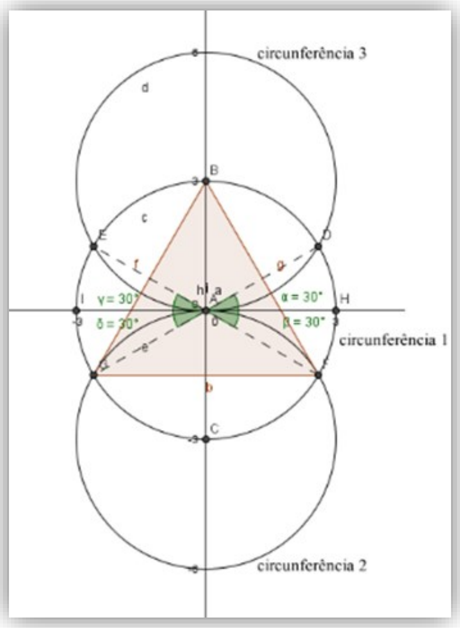


Figura 4 – Triângulo equilátero inscrito na circunferência dada.
Fonte: elaborado pelos autores.

A circunferência 3 intercepta a circunferência 1 nos pontos D e E. As equações dessas circunferências são:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema, encontram-se os pontos comuns, ou as interseções. Multiplicando a equação 1 por (-1) e somando com a equação 2, vem que:

$$(y-r)^2 - y^2 = 0 \rightarrow -2yr + r^2 = 0 \rightarrow y = \frac{r}{2} \quad (3)$$

Substituindo em equação 1, obtém-se, finalmente:

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}r \quad (4)$$

Logo os pontos $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{r}{2}\right)$ e $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}r, \frac{r}{2}\right)$ são os pontos de interseção D e E entre elas.

Para o ponto D $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r, \frac{r}{2}\right)$ é fácil ver que $\frac{r}{2} = rsen\ \alpha$. Logo, $\alpha = 30° = \delta$. O mesmo pode ser mostrado para as interseções F e G das circunferências 2 e 1.

Assim, pode-se concluir que as interseções dividem a circunferência 1 em seis arcos iguais. Por fim, unindo 3 pontos não consecutivos, como BFG ou CDE conseguimos o triângulo equilátero inscrito na circunferência 1.

Variação da estratégia ou do procedimento proposto

Para explicitar as potencialidades do GeoGebra e mostrar as possibilidades de solução, procurou-se apresentar outra forma de resolver o problema em questão, a fim de estimular a criatividade e o raciocínio lógico do aluno.

Para o novo procedimento, a mesma circunferência inicial foi utilizada, com os mesmos parâmetros para o raio e para o centro. No entanto, o novo procedimento proposto sugeriu o uso de um recurso do *software* denominado *Segmento com Comprimento Fixo.* Trata-se de uma ferramenta que permite criar um segmento a partir de um ponto, com um determinado tamanho.

Usando essa ferramenta do *software*, foi criado um segmento horizontal de tamanho 3, igual ao raio da circunferência dada e outro segmento horizontal de tamanho -3 a partir do ponto **C(0,-3).** Em seguida, usou-se a ferramenta do *software, Semicírculo Definido por Dois Pontos*, para formar uma semicircunferência, gerando duas interseções, F e G que, junto ao ponto **B(0,3)** formam a solução. A figura 4 mostra a disposição final dos elementos criados para a mesma solução do problema já apresentada.

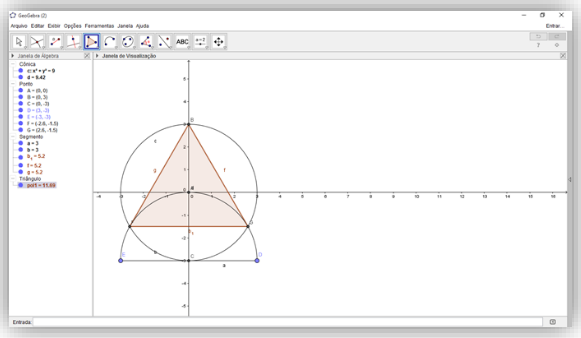


Figura 4 – Triângulo equilátero inserido sob a nova estratégia.
Fonte: elaborado pelos autores.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

Conclusão

Observou-se que o uso do GeoGebra para inscrever um triângulo equilátero em uma circunferência de raio e centro dados, pode ser estimulante para os alunos e mostra diferentes possibilidades de estratégias que podem ser utilizadas na solução do problema. Assim, é possível realizar aplicações que em sua origem o *software* não oferece diretamente. Evidencia-se, portanto, que a tecnologia auxilia bastante o professor na demonstração de qualquer tipo de problema para seus alunos, o que permite desenvolver soluções em conjunto, estimulando o estudo.

O GeoGebra demonstrou ser uma poderosa ferramenta para validar a formação de conceitos matemáticos. Além disso, demonstrou ser também uma ferramenta que possibilita transformar a solução de problemas em uma atividade criativa de exploração dos recursos ou ferramentas do *software* e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Referências

BARCELOS, G. T., et al. Avaliar é Preciso: o caso de softwares educacionais para Matemática no Ensino Médio. In: I WORKCOMP-SUL, **Anais...** UNISUL, Florianópolis, 2004.

DIAS, M.S.S. Resolução de problemas geométricos com GeoGebra. 1ª. CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, **Anais...** São Paulo, p. 100-114, 2012.

GEOGEBRA, **Software de Matemática Dinâmica**. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em 16 nov. 2015.

GUEDES, Paulo Cézar Camargo. **Algumas Aplicações do Software GeoGebra ao ensino da Geometria Analítica**. 2013. 69f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

LEIVAS, J.C.P; BRINET, A.R; LEYSER, M; FRANKE, R.F. Uso do ambient4e computacional para o ensino de Cálculo e Análise com Geometria. **In:** XIII CIAEM, Anais... Recife, 2011.

RANGEL, W.S.A. Interpretação Geométrica da Solução de Sistema de Equação Linear com uso do GeoGebra. In: EMEM. **Anais...** UFJF, 2015.

SOUZA JUNIOR , José C. **Introdução ao GeoGebra**. Universidade Federal de Alfenas; Unifal – MG. Agosto, 2010.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

O MÉTODO DA EXAUSTÃO E O CÁLCULO DE ÁREAS: PROPOSTA E UMA TAREFA COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA[1]

André Luis Trevisan[2]
Higgor Henrique Dias Goes[3]

RESUMO

Este texto apresenta uma proposta de tarefa que tem como objetivo o estudo do cálculo integral, com foco na introdução ao conceito de integral definida, por meio da exploração, com auxílio do Geogebra, do método de exaustão. Uma possibilidade que surge em meio à tecnologia, e de melhor compreensão do método, é seu estudo com o auxílio de *softwares.* Inspirados nas ideias de Freudenthal, defende-se a premissa de que o ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) deveria ser precedido pela exploração qualitativa, intuitiva e informal de ideias como taxa de variação e áreas sob curvas, por meio de abordagens gráficas e numéricas, que seriam gradativamente refinadas.

Palavras-chave:

Ensino de matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas matemáticas. Recurso computacional.

Introdução

Nos primórdios, muitas civilizações tinham o conhecimento de como calcular a área de regiões delimitadas por segmentos de reta, porém não possuíam a habilidade em lidar com regiões planas delimitadas por contornos curvilíneos. Segundo Apostol (2009), para conseguirem lidar com os problemas do cálculo de áreas, os gregos elaboraram um método que ficou conhecido como Método de Exaustão. Essa técnica determina a área de uma região, inscrevendo nela outra região poligonal com inúmeros lados, resultando em uma melhor aproximação e de cálculo fácil. Segundo o autor, Arquimedes (287-212 a. C.) utilizou esse método para estabelecer, com precisão, áreas do círculo e de outras figuras planas. Esse método pode ser considerado um dos precursores do que hoje conhecemos como Cálculo Integral, tema com uma ampla variedade de aplicações em vários ramos da ciência.

Neste artigo, apresentamos uma proposta de tarefa[4] que toma o método da exaustão como contexto para a definição do conceito de integral definida de uma função potência. Inspirados nas ideias de Freudenthal (1973, 1991), defendemos a premissa de que o ensino dessa disciplina deveria ser precedido pela exploração

[1]Os autores agradecem à Fundação Araucária e ao CNPq (Processo 457765/2014-3) pelo auxílio à realização do projeto da qual resulta este artigo.
[2]Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Professor do Departamento de Matemática e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UTFPR – Londrina/PR. E-mail: andrelt@utfpr.edu.br.
[3]Graduando de Engenharia e bolsista do projeto. E-mail: higgorhenrique05@gmail.com.
[4]Por tarefa estamos entendendo "o amplo espectro composto por 'coisas a fazer' pelos estudantes em sala de aula, o que inclui desde a execução de exercícios algorítmicos até a realização de investigações ou construção de modelos matemáticos" (TREVISAN; BORSSOI; ELIAS, 2015).

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

qualitativa, intuitiva e informal de ideias como taxa de variação e áreas sob curvas, por meio de abordagens gráficas e numéricas, que seriam gradativamente refinadas.

Gafanhoto e Canavarro (2014, p. 115) lembram que a seleção de tarefas adequadas para as aulas de matemática "é um aspeto decisivo da prática do professor". As autoras lembram que atrelar a uma tarefa o uso de um *software* "desafia não só a abordagem matemática aos conhecimentos, mas também a dinâmica com que podem ser abordados, permitindo aos alunos uma grande autonomia na aprendizagem".

Nessa mesma direção, Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 52) realizam a proposição de uma tarefa com base na noção de "experimentação com tecnologias", o que possibilita que a elaboração do conhecimento matemático assuma uma dimensão heurística de descoberta. Os autores apontam ainda que a "descoberta de padrões ou singularidades entre representações de objetos matemáticos (ou componentes dessas representações) propulsiona a produção de sentidos matemáticos".

Acerca do ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Silva (2012, p. 13) sustenta a tese de que esse assunto possa ser incluído novamente nos programas do ensino médio. Segundo ele, "alguns temas abordados no Ensino Médio somente por intermédio de casos particulares, fazendo com que as generalizações se tornem inacessíveis aos estudantes". Cabe aqui o problema do cálculo de áreas, restrito a regiões planas delimitadas por segmentos de reta, ou o círculo (ou partes dele). Machado (2011, p.155 apud SILVA, 2012, p. 5) defende que, por meio do recurso à língua materna, "é possível compreender-se perfeitamente o significado tanto da derivada como da integral mesmo sem a disponibilidade de múltiplas técnicas operatórias ou sem contar com um arsenal de definições precisas".

Entendemos, portanto, que por meio da organização de tarefas, como a que aqui será apresentada, é possível explorar ideias como o cálculo de áreas sob curvas ainda no ensino médio, ou mesmo no início da disciplina de CDI (sem que uma definição precisa de limite tenha sido apresentada, ou mesmo o conceito de derivada), possibilitando que os estudantes os compreendam e interpretem, oferecendo a oportunidade de reinventarem conceitos, ao invés de apenas reproduzir algoritmos.

Trata-se de um recorte de um projeto de pesquisa que procura investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de um ambiente educacional para o CDI em condições reais de ensino. O modelo de ensino subjacente a esses *ambientes de aprendizagem orientados para a resolução de problemas* (tradução que estamos adotando para *shift problem lessons* (PALHA, 2013; PALHA; DEKKER; GRAVEMEIJER, 2015)) consiste em sequências de tarefas matemáticas, adaptadas de livros didáticos, a serem resolvidas por estudantes em grupos heterogêneos, de forma colaborativa. Ao invés de "apresentar" ao estudante um novo conteúdo, são propostas aos estudantes sequências de tarefas com elementos que estimulem sua reflexão e a elaboração de um raciocínio conceitual; o professor, ao invés de fornecer explicações, torna-se um mediador das apresentações e explicações dos alunos na resolução.

O que apresentamos aqui é um exemplo de tarefa, integrante de sequência de tarefas, inspirada nas

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

ideias da Educação Matemática Realística (RME)[5], que começa a partir de uma situação particular, remetendo ao uso de estratégias e representações informais e, progressivamente, leva à formalização e generalização de um conceito (no caso, a integral definida). Trata-se do "desenho final" de um processo de pesquisa na qual essas tarefas foram testadas em sala de aula e redesenhadas com base em análises de experiências reais de aprendizagem[6].

Compreensão histórica

A seguir, faremos uma análise do método de exaustão do modo como realizado por Arquimedes (utilizando uma simbologia atual), relatado por Apostol (2009). A Figura 1, denominada **segmento parabólico** pode ser descrita da seguinte maneira: a região do plano delimitada pelo o gráfico da função $y = x^2$, pelo eixo das abscissas e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = b$.

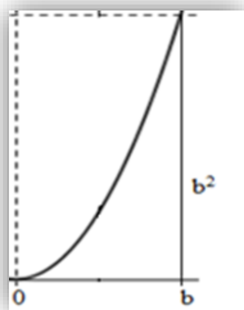


Figura 1 – Segmento parabólico
Fonte: elaborado pelos autores.

Como podemos observar na figura 1, a área do segmento parabólico é menor que a metade da área do retângulo de dimensões b e b^2 . Mais especificamente, Arquimedes fez a descoberta surpreendente de que a área do segmento é exatamente $\frac{1}{3}$ da área desse retângulo, ou seja, $A=\frac{b^3}{3}$.

O método que nos leva a essa conclusão consiste em dividir a região cuja área se quer determinar em retângulos. Isso pode ser feito de duas maneiras, uma por falta e outra por excesso, representados, para o caso da função $y = x^2$, pelas Figuras 2 e 3, respectivamente. Nesse caso, temos que a área do segmento parabólico é maior que a soma das áreas dos retângulos inferiores e menor que a soma das áreas dos retângulos superiores.

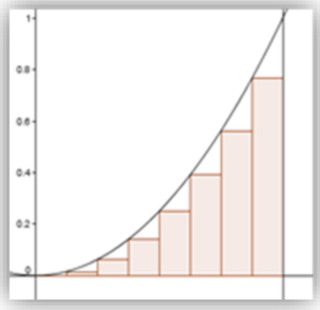


Figura 2 – Aproximação por Falta.
Fonte: autores.

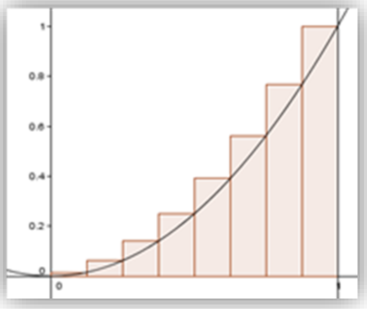


Figura 3 – Aproximação por excesso
Fonte: autores.

[5]Essa abordagem tem origem na Holanda no final da década de 1960 e é inspirado pelas ideias do matemático Hans Freudenthal. Opondo-se ao formalismo da Matemática Moderna, Freudenthal entende matemática como uma atividade natural e social cuja evolução acompanha a do indivíduo e a das necessidades de um mundo em expansão, uma atividade de organização (ou matematização). Para maiores detalhes ver Trevisan e Buriasco (2015).
[6]Para maiores detalhes, consultar Goes e Trevisan (2015) e Trevisan, Borssoi e Elias (2015).

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

Tarefa proposta

Apoiados nas ideias de Gafanhoto e Canavarro (2014, p. 116), organizamos uma tarefa que intenta "criar oportunidades de os alunos contatarem com diversas formas de representação das ideias matemáticas, de passarem informação de uma forma de representação para outra e de estabelecerem relações entre diferentes ideias matemáticas". Segundo essas autoras, em uma tarefa na qual se apresenta uma situação-problema, há um incentivo ao uso de múltiplas representações (verbal, numérica, gráfica e algébrica), por meio da apresentação de questões que os guiem em sua investigação. Entendemos também que o uso da tecnologia (no caso aqui, o Geogebra) pode potencializar o caráter de "experimentação" da tarefa, favorecendo a articulação entre essas múltiplas representações.

A tarefa que aqui propormos tem como propósito explorar, com auxílio do Geogebra, o método da exaustão como ferramenta para aproximar a área do segmento parabólico e, posteriormente, generalizar o resultado para o conceito de integral definida de uma função potência. É composta por três questões. A primeira e o segunda procuram resgatar o conceito de área, podendo inclusive ser propostas como tarefa extraclasse, como "preparação" para a questão 3. O mesmo vale para o item (i) da questão 3.

Tarefa proposta

Muitas civilizações primitivas conheciam fórmulas para a área de regiões delimitadas por segmentos de reta; contudo, elas deparavam com dificuldades para encontrar fórmulas para a área de regiões com contornos curvilíneos. Afinal, o que significa calcular a área de uma região? Como se define a área de uma região retangular? Que outras regiões com "lados retos" você conhece e como são calculadas suas áreas?

Construa uma fórmula que represente a área da região delimitada pela função $y = cx$ no intervalo $[a, b]$, com a e b positivos. Represente graficamente para valores de a, b e c de sua escolha.

Vamos explorar um método para aproximar a área da região delimitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x no intervalo $[0, b]$. O método consiste em dividir a figura em certo número de retângulos e obterem-se duas aproximações da área da região, uma por falta e outra por excesso, usando dois conjuntos de retângulos (Figuras 2 e 3)

Como "preparação", encontre uma fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos.

Inicialmente considere o intervalo de $x = 0$ a $x = 1$. Utilizando áreas de retângulos, obtenha uma aproximação por falta e outra por excesso dividindo esse intervalo em oito partes iguais. Trabalhe com frações e organize sua resolução de modo que a fórmula do item (i) seja utilizada.

Repita o item anterior, agora com auxílio do Geogebra, considerando o intervalo dividido em outras quantidades de partes conforme sua escolha. As sequências de estimativas por falta e por excesso parecem estar convergindo para qual valor?

Suponha agora uma divisão do intervalo genérico de $[0, b]$ em n partes. Explore essa situação com auxílio do Geogebra e procure "estimar" alguns resultados.

Encontre uma fórmula para aproximação por falta, e outra para aproximação por excesso, considerando agora um intervalo qualquer $[0, b]$ dividido em n partes.

Apresente argumentos que justifiquem a descoberta realizada por Arquimedes de que essa área é exatamente $A = b^3/3$.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

Na questão 2, pode-se reconhecer a região como um trapézio, e sua área pode ser expressa por meio de fórmula específica para esse quadrilátero. É desejável, entretanto, que o professor instigue a pensar em outras representações possíveis, por exemplo, decompondo a região em um retângulo e um triângulo, ou utilizando a diferença de área de dois triângulos. Nesse último, obtemos a expressão $\frac{c(b^2-a^2)}{2}$ como resposta.

A questão 3 é mais complexa e aberta para o uso de diferentes tipos de representação. No item (ii), espera-se que os estudantes percebam que: (1) ao dividir o intervalo [0,1] em oito partes, obtemos subintervalos de tamanho $1/8$; (2) o número de retângulos é diferente para o caso de aproximação por falta e por excesso (8 e 7, respectivamente); (3) a altura do primeiro retângulo é $f(0)=0$ no primeiro caso, e $f(1/8)=(1/8)^2$ no segundo. Obtemos então as seguintes aproximações por falta e por excesso, respectivamente:

$\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^2+\cdots+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^2$ e $\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^2+\cdots+\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{8}\right)^2$. O uso de evidência para o fator $\frac{1}{8^3}$ e o recurso à fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais, $S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, solicitada no item (i), leva ao valores (com aproximações de duas casas decimais) de 0,2734 e 0,3984 como aproximações por falta e por excesso, respectivamente.

A escolha do número 8, nesse caso, foi arbitrária. Porém, a utilização de um *controle deslizante* no Geogebra, que represente o número de partes, combinado com os comandos *SomaDeRiemannSuperior* e *SomaDeRiemannInferior*[7] permitem construir uma sequência de estimativas por falta e por excesso, o que permite, ao mesmo tempo estimá-las com qualquer grau de precisão desejado, bem como observar que convergem para um mesmo valor (no caso, para $\frac{1}{3}$).

Como generalização para essa ideia, no item (iv) o intervalo *[0,b]* é dividido em n partes iguais, cada uma com comprimento $\frac{b}{n}$. Os pontos de divisão correspondem aos seguintes valores de x: 0, $\frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \ldots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n}$.

A soma das áreas de n retângulos superiores será dada por $\sum_1^n A = \frac{b^3}{n^3}(1^2+2^{2+}3^2+\ldots+n^2)$ e a soma das áreas de n - 1 retângulos inferiores por $\sum_1^n A = \frac{b^3}{n^3}[1^2+2^{2+}3^2+\ldots+(n-1)^2]$. Por meio da fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais, $S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, chegamos (item (v)), no caso da soma das áreas de n retângulos superiores, que A = $\frac{b^3}{6}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(2n+1)}{n}$ ou ainda $A=\frac{b^3}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)$.

De modo similar, para a soma das áreas de n retângulos inferiores chega-se a $A=\frac{b^3}{n^3}\cdot\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n^2\right]$ ou ainda $A=\frac{b^3}{6}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{6}{n}\right]$.

Analisando o que acontece quando tomamos valor de n "muito grande" (item (vi) – o que pode ser feito de modo intuito[8], sem a necessidade de formalização do conceito de limite – ou ainda, com auxílio de controle deslizante do Geogebra que indique o número de retângulos da subdivisão), chegamos que, em ambos os casos, a área converge para $\frac{b^3}{3}$.

[7]SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>,<Número de Retângulos>] e SomaDeRiemannInferior[<Função>, <Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>,<Número de Retângulos>];
[8]Respaldamo-nos aqui nas ideias de Weigand (2014), que defende abordagem discreta inicial para os conceitos de derivada (por meio do estudo dos quocientes de diferenças) e integral definida, sem que o conceito de limite seja apresentado formalmente nesse momento. Pode-se aqui destacar a proposta de Spivak (1975), na qual uma "definição provisória" (no caso aqui, para o conceito de convergência) é apresentada, e em outro momento, detalhadamente discutida, criticada e substituída por uma definição matemática formal (Para maiores detalhes, ver Silva e Lima (2015)).

Com os cálculos realizados até esse momento, podemos ver algumas ideias (apresentadas em notação atual) que motivaram Arquimedes a obter a área de um segmento parabólico. Podemos extrapolar esse resultado e, dispondo de fórmulas para a soma dos cubos dos n primeiros números naturais, concluir que a área de região delimitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo $y = x$ e pelas retas $x = 0$ e $x = b$ será $A = \frac{b^4}{4}$. Mais ainda, os resultados anteriores sugerem que, para uma curva do tipo $y = x^n$, n natural, teremos que $A = \frac{b^{n+1}}{n+1}$.

Os estudos de Arquimedes ajudaram a definir o conceito de área, e de maneira geral o de integral definida. Relacionando a ideia de soma integral com o problema do segmento parabólico, podemos concluir que "A integral de x^2 de 0 a b é $\frac{b^3}{3}$; simbolicamente, $\int_0^b x^2dx = \frac{b^3}{3}$. O símbolo $\int (s\ alongado)$ é chamado de sinal de integral, uma extensão do sinal da somatória de grandezas infinitamente pequenas.

O cálculo de integrais definidas não se aplica apenas às áreas. Essa ferramenta, que expressa a ideia de uma soma generalizada, permite calcular também o comprimento de arco de uma curva, o trabalho realizado por uma força variável, o volume de sólidos de revolução. Segundo Freudenthal (1973), volumes e áreas podem ser calculados de forma intuitiva sem que definições mais gerais tenham sido apresentadas. O mesmo vale para densidades, velocidades e outros conceitos físicos e cinemáticos.

Considerações finais

Para Freudenthal (1973, p. 512), "repetidamente teoremas são enunciados e provas são dadas acerca de noções que são definidas para elas mesmas". A proposta de tarefa aqui apresentada procurou ilustrar uma proposta de trabalho factível tanto para o ensino médio quanto para o início da disciplina de CDI.

Entendemos a tarefa possibilita, ao mesmo tempo, o incentivo ao uso de múltiplas representações (verbal, numérica, gráfica e algébrica), como sugerem Gafanhoto e Canavarro (2014), bem como a experimentação com tecnologias. Reforça que, no primeiro contato com conceitos do CDI, o estudante deve ser estimulado a refletir e elaborar conjecturas e testá-las, criando e conectando diferentes representações de objetos matemáticos. Assim, entendemos ser "mais importante explorar geométrica e numericamente conceitos de derivada e integral, ao invés de se propor uma definição que esteja acima de qualquer suspeita" (FREUDENTHAL, 1973, p. 579).

Referências

APOSTOL, T. M. **Cálculo I**: Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução de Álgebra Linear. São Paulo: Editorial Reverté, 2009.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** Sala de aula e internet em movimento. Autência: Coleção Tendências em Educação Matemática, 2014.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task.** Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GAFANHOTO, A. P.; CANAVARRO, A. P. A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações. In: PONTE, J. P. (Ed.). **Práticas profissionais dos professores de Matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 115-137.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

GOES, H. H. D.; TREVISAN, A. L. Física no ensino de Cálculo de uma variável real: introdução ao teorema do valor médio. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 43., 2015, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Editora da UFABC, 2015. p. 1-8.

PALHA, S. A. G. **Shift-Problem Lessons**: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms. Amsterdam: Research Institute of Child Development and Education; University of Amsterdam, 2013.

PALHA, S. A. G.; DEKKER, R.; GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the Mathematics classroom. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 13, p. 1589 – 1623, 2015.

SILVA, B. A.; LIMA, G. L. Os cursos de Cálculo difundidos pela USP e as preocupações didáticas presentes em livros adotados e em práticas docentes. **Unión** (San Cristobal de La Laguna), v. 43, p. 88-111, 2015.

SILVA, M. A. Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: um ensaio teórico. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. **Anais…** Petrópolis: SBEM, 2012. p. 1-18.

TREVISAN, A. L.; BORSSOI, A. H.; ELIAS, H. R. Delineamento de uma Sequência de Tarefas para um Ambiente Educacional de Cálculo. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirinópolis/GO. **Anais...** Brasília: SBEM, 2015. p. 1-12.

TREVISAN, A. L.; BURIASCO, R. L. C. Educação Matemática Realística: uma abordagem para o ensino e a avaliação em Matemática. **Revemat – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 10, p. 167-184, 2015.

WEIGAND, H. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM Mathematics Education**, n. 46, p. 603 – 619, 2014.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

NARRATIVAS: VERSOS, A(N)VERSOS E SUAS AFETAÇÕES EM/NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Diego de Matos Gondim[1]

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo discutir possibilidades das narrativas sob a perspectiva de dois autores-pesquisadores, a saber: Suely Rolnik e Jerome Bruner. A tentativa, aqui, é amarrar alguns fios e desamarrar outros que possibilitem a compreensão do que pode a narrativa na pesquisa em Educação Matemática. Em outras palavras, pretende-se atravessar o modo como estes dois autores concebem as narrativas e o que podem estes modos fazer pensar na Educação Matemática. Ou seja, que possibilidades, junto a estes referenciais teóricos, possuem as narrativas? O que elas fazem pensar em se tratando da Educação Matemática? Que desdobramentos elas têm na formação de professores de Matemática? Cabe ressaltar que, sendo este um ensaio teórico, não há a vaidade de estar respondendo aos questionamentos levantados, mas de, apenas, estar abrindo possibilidades de atravessá-los no texto, para a discussão do tema e de sua relevância para a escrita em/na Educação Matemática.

Palavras-chave:

Política de narratividade. Desejos. Imaginário. Escrita. Educação Matemática.

Introdução

[...] meio [...]

> É que o meio não é uma média; ao contrário, é o lugar onde as coisas adquirem velocidade. *Entre* as coisas não designa uma correlação localizável que vai de uma para outra e reciprocamente, mas uma direção perpendicular, um movimento transversal que as carrega uma *e* outra, riacho sem início nem fim, que rói suas duas margens e adquire velocidade no meio. (DELEUZE; GUATTARI, 2014, p. 49).

Meio. Riacho sem início. Sem fim. *Entre* duas margens. Margens ruídas. Meio que, como realça Deleuze e Guattari (2014, p. 49), "[...] não designa uma correlação localizável que vai de uma para outra e reciprocamente [...]", mas de *movimento*. Meio que movimenta. Meio que é movimento. Um movimento movendo. Um movimento parado. Meio. Sem início. Sem fim. Assim o é este trabalho. Sem início, sem fim. Um meio. Um movimento movente, que move, que gira, que muda, que acontece. Um movimento reflexivo sob(re) narrativas. Sobre narrativas, isto é, uma conversa a respeito de narrativas. Sob narrativas, ou seja, uma conversa que se abriga em algumas posições teóricas de narrativas. Apenas uma conversa – que, de agora em diante, chamarei de *trama* – que compõe versos, aversos e anversos.

[1]Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho", campus de Rio Claro (UNESP/RC). Endereço eletrônico: gondiminit@hotmail.com.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

Tramando no meio

Uma trama no movimento. Uma trama no meio. De fios. É como o trabalho do tecelão. Entrelaçando fios. Fios transversais, fios horizontais. Fios que dobram e compõem colchas. Desdobram. Tecido sem começo, sem fim.

O tecelão, com suas agulhas (navetes), fibras fiadas e seu tear, produz a sua arte. Uma arte composta por fios. Fios contínuos, conhecidos como tramas e urdiduras. Fibras fiadas azuis, brancas, pretas, amarelas,..., fibras coloridas. Diversas. Grossas. Finas. No entrelaçamento, não se faz juízo de qual é mais bonita, mais grossa. O tecelão quer compor sua colcha. Sua arte. Por isso chamo esse trabalho de trama. Não irei compor colcha, apenas entrelaçarei alguns fios. Horizontais. Verticais. Vermelhos. Azuis. Coloridos. Versos e a(n)versos. Fios. Tramas e urdiduras sendo entrelaçadas, dobradas, desdobradas. Uma reflexão sob (re) narrativas.

Versos e a(n)versos

Versos?! Verso é aquilo que faz o poeta? Linhas que compõe um poema? Palavras ritmadas? Metrificadas? É isso que estou a compor? Um poema? Um conjunto de palavras ritmadas? Não sei dizer. Mas com meus navetes, amarro tramas. Puxo fios. Entrelaço urdiduras. Faço nós. No entanto, além de um conjunto ritmado de palavras que compõe um poema, *versos* podem ser o reverso, as costas. Costas de uma folha. De um pensamento. O que se vê quando a folha é virada. Rotacionada.

Sendo assim, temos [linhas de um poema; que não precisa sempre ser ritmado; um verso solto, livre, errado, branco; versos], mas, também [linhas das costas de uma opinião, isto é, algumas perspectivas da narrativa como procedimento metodológico]. São versos, aversos e anversos. Anverso = parte da frente, face. Frente, costas. Anversos com versos. Versos no verso. Fios, linhas e palavras sem início, sem fim. Uma reflexão dos versos, aversos e anversos da narrativa. Seus aversos, divergências, posições, oposições. Não comporei uma colcha. Poucas linhas eu possuo. Mais alguns fios eu amarro. Outros serão amarrados. Serão puxados. Não tem início. Não tem fim. Assim componho esse trabalho. Sob(re) *narrativas: versos e a(n) versos*. Versos e a(n)versos das narrativas como procedimento metodológico. Versos, aversos e anversos de Rolnik (1998, 2014), Kastrup et al. (2010) e Bruner (2014).

No meio, uma trama que se amarra, desamarra

Com meus navetes, puxo fios. Fibras fiadas. Coloridas. Linhas de versos. Linhas de verso, aversos e anversos. Num verso, Rolnik (2014) compõe narrativas de acontecimentos de uma época. Faz versos de noivinhas[2]. Faz cartografia. Assim é chamada a metodologia assumida por Suely Rolnik, isto é:

> [...] um desenho que acompanha e se faz ao mesmo tempo que os movimentos de transformação da paisagem [...]. [A cartografia] acompanha e se faz ao mesmo tempo que o desmanchamento de certos mundos – sua perda de sentido – e a formação de outros: mundos que se criam para expressar afetos contemporâneos [...]. (ROLNIK, 2014, p. 23, acréscimo meu).

[2] É desse modo que Suely Rolnik chama as(os) sujeitas(os) de seu livro "Cartografia sentimental: transformações contemporâneas do desejo". Essas "noivinhas" enredam acontecimentos do século XX, perpassando movimentos feministas bem como movimentos de subjetivação que resistiam à sociedade disciplinar até a transição do regime político no final do século XX.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

Sendo assim, o cartógrafo laça mão de uma atenção sensível aos acontecimentos. A uma partilha sensível dos desmanchamentos de mundos e criação de outros. Ele nega o ponto e assume a linha. Ele nega as formas e assume as forças. Ou seja, ele procura, nas palavras de Rolnik (2014), criar pontes de linguagem para que os afetos passem. Aqui, o plano das formas perde força e o plano das forças ganha força. Desse modo, a narrativa se apresenta como uma possibilidade de compor junto a esses desmanchamentos de mundos e criação de outros. Não como um dispositivo de representação para como potência de produção. Ou seja, na cartografia a narrativa é entendida, segundo Kastrup (2010), como uma posição assumida pelo cartógrafo para expressar o que se passa e o que acontece no campo de pesquisa, ou melhor, como possibilidade compor sensações que estão presentes em nosso corpo. Em outras palavras, a narrativa é assumida em virtude do desejo de dar "língua para os afetos que pedem passagem". Isso é um pouco do que deseja o cartógrafo, conforme destaca Rolnik (2014). Deseja contar. Narrar o que acontece. As transformações. O desmanchamento de mundos. A criação de outros. Uma expressão de afetos. Uma expressão do mergulho no plano de imanência. Dos acontecimentos.

Segundo Rolnik (1998), atentar por essas formas de expressão, isto é, de subjetivação, requer sintonizar todo seu corpo com o plano de consistência[3], ou seja, ao cartografar – contornar junto aos acontecimentos – é preciso desenvolver um corpo. Um corpo vibrátil. Desse modo, desenvolver um olho vibrátil, um ouvido vibrátil, ... um corpo vibrátil. Vibrátil? Sim. Que vibra. Vibra junto às vibrações dos acontecimentos. Que sente. Experimenta. Bebe. Mergulha. Um corpo que vibra. A narrativa – na cartografia – é, então, uma posição assumida pelo cartógrafo que busca dar língua, expressar, falar dessas vibrações que, na constituição do *Corpo Sem Órgãos* (CsO) ou *plano de consistência*, faz vibrar os ouvidos, os olhos, o corpo. Com isso, fundamentada em Oswald de Andrade, Suely Rolnik compara a ação do cartógrafo com uma ação antropofágica, isto é, um meio de "[...] engolir o outro, sobretudo o outro admirado [...]" (ROLNIK, 1998, p. 02). Narrar o que engoliu do outro. Do outro admirado. O outro engolido. Compor narrativas do engolido, do admirado. Compor narrativas para produzir desejos. Operar junto aos desejos. Intensidades que compõe o CsO. Que vibra o corpo vibrátil. A narrativa como produção de intensidades, de experimentações. O engolido experimentado.

Cabe ressaltar que, Rolnik e Kastrup et al. (2010) não consideram a narrativa como uma imagem feita dos dados experienciados. Quer dizer, não é uma representação do acontecido ou uma significação do experimentado, mas uma apresentação de um "pedaço da imanência". Uma produção cartográfica. Um "operar" *junto a*. Um encontro de corpos (ou desencontro deles). Ou seja, não é eu narrando sobre ele, mas eu narrando sobre nós. Um encontro do corpo vibrátil do pesquisador com os corpos que se constituem no plano de consistência. Com a constituição do plano de imanência. Por isso, cartografar é fazer junto, compor junto, desenhar, acompanhar os movimentos de transformações e criações dos mundos que se (des)fazem. É, sobretudo, segundo Kastrup et al. (2010), acompanhar processos. Processos de subjetivação.

[3]O plano de consistência, para Deleuze e Guattari (2014), é o lugar onde se constitui o CsO. Ele é o próprio CsO. Cabe ressaltar que o Corpo sem órgãos (CsO) é um "lugar", um "plano" e um "coletivo" que agencia intensidades, desejos, animais, plantas, um lugar de acontecimentos, um plano de imanência, um coletivo de agenciamentos.

Com meus navetes amarro nós, puxo fios, tramas e urdiduras. Nesse processo, uma dúvida pode aparecer. Por que ao falar de narrativas junto aos livros de Kastrup et al. (2010) e Rolnik (2014) preciso falar da cartografia? Seria a narrativa o mesmo que cartografar? Para esta última, não. Cartografar é, além de compor narrativas, experimentar, acompanhar os processos de criação e invenção, o constituir dos corpos. É uma sensibilidade de perceber o desmanchamento e a invenção de mundos (ROLNIK, 2014). No entanto, o cartógrafo quer – além de mergulhar ou estar imerso nestes afetos – "[...] inventar pontes para fazer sua travessia: *pontes de linguagem*." (ROLNIK, 2014, p. 66, grifo meu). É nesse "querer inventar pontes de linguagem" que a narrativa entra como posição assumida pelo cartógrafo. Uma posição que procura criar pontes de travessia, isto é, uma ponte onde os afetos terão "língua". Afetos que afetam, me afeta, te afeta, nos afetam.

Narrar para contar das marcas que os afetos produziram em nosso corpo. Marcas de uma experiência, como disse Larrosa (2002). Uma experiência do tipo: experimentada. Do tipo: sentida. Do tipo: mergulhada. Do tipo: engolida. Mas, também, que te engole, te afoga, te experimenta. Corpos que se (re) encontram, (re)criam, (re)constroem.

De outro modo, Bruner (2014, p. 76) – ao falar da constituição do eu – assegura que "[...] o eu também é um outro." Criar narrativas de "mim" é contar do outro. Do outro engolido. Do outro que me engoliu. Bruner (2014) ainda acrescenta que a narrativa do eu, do seu e do nosso é: agenciadora, repleta de desejos, intenções, aspirações, sensível "às companhias", isto é, aos outros corpos que, também, se (re) criam e, além disso, é capaz de abandonar, perder a continuidade, a linearidade. Com isso, "construir-se através do narrar-se é um processo incessante e eterno, talvez mais do que nunca. É um processo dialético, é um número de *equilibrista*" (BRUNER, 2014, p. 95, grifo meu). Narrar é, então, constituir o eu, o outro, o nós. Uma arte. Uma vida junto à arte.

Narrar acontecimentos e/ou experiências, para Bruner (2014), é fabricar histórias. Criar histórias. Assim o fez Rolnik (2014) ao narrar os movimentos feministas das décadas de 60, 80 e o início da década de 90. Como destaca a autora, seu trabalho era uma busca por mapear, cartografar, mergulhar e imergir na *memória* das "sensações" vividas nos momentos históricos destes períodos. Narrar esses acontecimentos, para Bruner (2014), amalgama memória e imaginação, pois para o autor "memória e imaginação são fornecedoras e consumidoras uma da outra" (BRUNER, 2014, p. 103) e assim criamos mundos em quem ficção e realidade se confunde e se unem.

No entanto, cabe ressaltar que, ao passo que Bruner (2014) infere essa ideia, Rolnik (2014) ressalta que seu trabalho visava àquela imersão na memória das sensações e não representações do imaginário. Imaginário este que – para a autora – estabeleciam representações da história. Uma história fictícia, uma história que, de certo, poderia desviar da realidade. Ao fazer uma prospecção cartográfica, Sueli Rolnik pretendia desviar deste imaginário para produzir uma narrativa desse momento histórico. Um produzir junto às sensações, com elas, como parte delas. Não era, portanto, uma tentativa de reconstruir uma história do que "poderia ter sido" ou do que "poderia ser", pois assim o é a fabricação de histórias em

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

Bruner (2014). Memória e imaginação amalgamando-se. Um constante equilíbrio entre o imaginário e o real.

Com isso, entendemos com Rolnik (2014) que narrativas podem dar língua aos desejos, ao desmanchamento de mundos e criação de outros. Que cartografar é criar pontes de linguagem. Narrar pode contar a realidade, o acontecido, a afetação dos afetos, a criação de nós, de "mim". O operar junto/ com os afetos, os desejos. Produzindo histórias juntos: afetando, se afetando, engolindo, se engolindo. Narrar o que captura a sensibilidade do olho vibrátil, do corpo vibrátil, ..., do corpo vibrátil. Mas aprendemos com Bruner (2014) que narrar pode ser, também, uma fábrica de histórias que estão constantemente equilibrando-se entre memória e imaginação. Uma arte que – mesmo ligada ao imaginário – não se desprende do familiar. Do real. Do vivido. Uma criação do eu que se preocupa com o outro. Que se prende ao outro. Que se confunde com outro. Mas que quando narrado amalgama memória e imaginação.

Narrativas ..., e, ..., Educação Matemática

Levando em consideração as possibilidades da narrativa em Rolnik (2014) e Bruner (2014), abro o questionamento: o que pode a narrativa na Educação Matemática? Uma questão de abertura e não de fechamento desta discursão. Uma abertura para outras tramas.

Como funciona a narrativa, como pontes de linguagem, na Educação Matemática? Narrando sensações, afetos, desejos, intensidades, pedaços do plano de imanência, acontecimentos. Ou, também, amalgamando imaginário e real. Como uma peça de equilibrista. É que:

> Muitas vezes, essas investigações têm sustentado a ideia de que é possível, por meio de uma leitura cuidadosa dessas narrativas, a determinação de quem é o professor de Matemática, de como atua esse professor, da Matemática por ele ensinada, das práticas pedagógicas que adota nessa ou naquela condição de trabalho. (FERNANDES, 2014, p. 905)

O que percebo, junto ao levantamento teórico dos autores que citei, são as narrativas como possibilidades de fabricar histórias de professores de matemática. De suas práticas pedagógicas. De como se constitui(u) professor de matemática. Como possibilidades de amalgamar imaginário e real. Mas, também, percebo as narrativas como possibilidades de criar, na língua de Blanchot, o *outro de todos os mundos*. (LELY, 2011). De fundar mundos na Educação Matemática. De ser afetado e de afetar. De estar junto à produção de mundos sem início, nem fim. Pois o imaginário é isso "[...] não é uma estranha região situada além do mundo, é próprio mundo, mas o mundo como um conjunto, como um todo" (LEVY, 2011, p. 29).

Cabe ressaltar que, apesar dos fios aqui amarrados, outros ficaram sem serem amarrados. O que quero dizer com isso? Que, apesar de Bruner (2014) tratar o imaginário amalgamado com o real sendo uma possibilidade na narrativa de fabricar histórias, Rolnik (2014) não pretende, com a produção de seu

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

trabalho, produzir significações através das narrativas, mas uma produção de acontecimentos. Em sua língua seria, então, pontes de linguagens para atravessar afetos, desejos, intensidades e ... Ou seja, trazendo para a discussão em voga, as possibilidades das narrativas, aqui, não são de representar, identificar ou significar coisas ou acontecimentos na formação de professores, mas de compor narrativas de vidas junto às sensações produzidas no plano de imanência. De acompanhar processos de subjetivação nos quais o professor, *sendo* professor, singulariza sua prática. Quer dizer, as narrativas se apresentam como uma ponte de linguagem em que processos de singularização são acompanhados. Aqui, as narrativas falam de uma experiência que nos passam, ou seja,

> as narrativas de vida sob essa perspectiva significa tomá-las junto àquilo que trazem de estranho, de marginal, de não regular; compreendê-las como não redutíveis a identidades ou, quando reduzidas, assumidas como identidades efêmeras, de personagens provisórios. (FERNANDES, 2014, p. 30)

Junto à Rolnik (2014), entendo as narrativas como possibilidades de experimentar, mergulhar, afogar, ou seja, ser engolido e engolir o outro de todos os mundos. Isto é, estar junto à constituição do *sendo* professor de matemática, do *acontecendo* na sala de aula, do *fazendo* matemática, do *praticando* matemática. E não de um *eu* ouvinte significando um *eu* depoente, pois – em Rolnik (2014) – não percebo um *eu*, mas um *ele* se constituindo junto aos acontecimentos. Aos movimentos que atravessam as pontes de linguagem. Nas palavras de Kastrup et al. (2010), o que estou a dizer é de uma escrita narrativa que se revela como *posição política* do pesquisador e, aqui neste trabalho, do pesquisador em Educação Matemática, ou seja,

> Não uma escrita presa a uma imagem-memória do vivido em sala de aula de formação de professores que ensinam matemática, que pretende reproduzir o passado, o vivido em sua pureza, mas uma escrita que se faz junto a uma imagem-fábula, que é uma imagem constituída por uma dobra da ficção. (CLARETO; ROTONDO, 2014, p. 986)

Desse modo, alguns questionamentos tomam força neste trabalho, quais sejam: como funciona o outro de todos os mundos na Educação Matemática? O que pode uma escrita que amalgama imaginário e real? O que pode esta mesma escrita para além das representações, das significações? O que pode o educador matemático em uma posição política de narratividade? Produzir afetos? Desejos? Pontes de linguagens? Fabricar histórias? Abrir-se para o outro de todos os mundos e operar junto a ele? Produzir uma escrita sendo professor de matemática? Fazendo Matemática? Vivendo, na imanência, do acontecendo matemática?

Em se tratando do plano das forças e não no plano das formas, aquele que identifica o professor, o fazer matemática, mas o dos afetos, o das forças que atravessam e nos passam, questiono: que mundos se pode inaugurar junto à narrativas de vidas na Educação Matemática? Que modos de resistência, de afirmação de vida, acontecem no sendo professor de matemática, no praticando matemática na sala de aula? Que pode as narrativas compor?

Fios – versos e a(n)versos –, um meio, sem início, sem fim

Assim o são alguns fios de Rolnik (2014) e Bruner (2014) e outros. Coloridos. Vermelhos, azuis, brancos. Alguns fios que com meus navetes puxei. Mas fios são assim. Sem início, sem fim. Como no trabalho do tecelão, (des)amarrei fios. Tramas e urdiduras. Versos, anversos e aversos sob(re) narrativas. Um verso ritmado? Sem ritmo? Continuo sem saber dizer. São apenas frente. Costas. Versos e a(n)versos sob (re) narrativas em Rolnik (2014) e Bruner (2014). Mas cabe-me voltar a dizer que poucas me são as linhas, então fios ficaram sem serem amarrados e, claro, fios sempre ficarão sem serem amarrados. É apenas um meio. Sem início, nem fim. Com seus navetes mais fios poderão ser puxados. Fios sempre existirão...

Quem comigo fez versos, amarrou nós?

Referências

BRUNER, Jerome. **Fabricando histórias:** Direito, literatura, vida. Tradução Fernando Cássio. São Paulo: Letra e Voz, 2014.

CLARETO, Sônia Maria; ROTONDO, Margareth A. Sacramento. Como seria um mundo sem Matemática? Hein?! Na tensão narrativa-verdade. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 49, p. 974-989, ago.2014.

DELEUZE, Gilles; GUATTARI, Félix. **Mil Platôs:** Capitalismo e Esquizofrenia. v. 1. Tradução de Ana Lúcia de Oliveira, Aurélio Guerra Neto e Célia Pinto Costa. São Paulo: Editora 34, 2014.

DELEUZE, Gilles; GUATTARI, Félix.**Mil Platôs:** Capitalismo e Esquizofrenia. v. 3. Tradução de Ana Lúcia de Oliveira, Aurélio Guerra Neto e Célia Pinto Costa. São Paulo: Editora 34, 2014.

FERNANDES, Felipe Santos. Biografia do Orvalho: considerações sobre narrativa, vida e pesquisa em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 49, p. 896-909, ago. 2014.

FERNANDES, Felipe Santos.**A quinta história:** composições da educação matemática como área de pesquisa. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2014.

LARROSA, Jorge. Notas sobre a experiência e o saber da experiência. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 19, p. 20-28, jan/fev/mar/abr. 2002.

LEVY, Tatiana Salem. **A experiência do fora:** Blanchot, Foucault e Deleuze. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2011.

PASSOS, Eduardo; KASTRUP, Virgínia; ESCÓSSIA, Lílian da. (Orgs). **Pistas do método da cartografia:** pesquisa-intervenção e produção de subjetividade. Porto Alegre: Sulina, 2009.

ROLNIK, Suely. **Cartografia sentimental:** transformações contemporâneas do desejo. 2 ed., Porto Alegre: Sulina, 2014.

ROLNIK, Suely. **Esquizoanálize e Antropofagia**. França, 1998. Disponível em < http://www.pucsp.br/nucleodesubjetividade/suely%20rolnik.htm>. Acesso em: 26 mai. 2015.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Denise Souza Queiroz[1]

ESCOLA E DEMOCRACIA

Resenha

O autor do livro *Escola e Democracia*, Dermeval Saviani, nasceu em Santo Antônio de Posse, no estado de São Paulo, em 25 de dezembro de 1943. De 1967 a 1969, lecionou filosofia, história e história da arte no Colégio Estadual Professor Ataliba de Oliveira, no bairro de São João Clímaco na periferia de São Paulo. Entre agosto de 1975 e março de 1978, atuou como professor titular da UFSCAR, quando presidiu a comissão que planejou o Programa de Pós-Graduação em Educação, instalado em março de 1976, sob sua coordenação.

De acordo com estimativas relativas a 1970, "cerca de 50% dos alunos das escolas primárias desertavam em condições de semi -analfabetismo ou de analfabetismo potencial na maioria dos países da América Latina" (TEDESCO, 1981, p. 67). Isto sem levar em conta o contingente de crianças em idade escolar que sequer têm acesso à escola e que, portanto, já se encontram a priori marginalizadas dela, segundo Dermeval.

Existem dois grupos de teorias: teorias não críticas e teorias crítico-reprodutivistas. As teorias não críticas são entendidas como um instrumento de equalização social, portanto, de superação da marginalidade. As teorias crítico-reprodutivistas entendem a educação como um instrumento de discriminação social, logo, um fator de marginalização. As teorias não críticas são: a Pedagogia Tradicional, a Pedagogia Nova e a Pedagogia Tecnicista. As teorias crítico-reprodutivistas são: "teoria do sistema de ensino como violência simbólica"; "teoria da escola como aparelho ideológico de Estado(AIE)"; e "teoria da escola dualista".

No grupo das teorias não críticas, a sociedade é concebida como essencialmente harmoniosa, tendendo à integração de seus membros. A marginalidade é, pois, um fenômeno acidental que afeta individualmente um número maior ou menor de seus membros, o que, no entanto, constitui um desvio, uma distorção

[1] med2425deni@hotmail.com

que não só pode como deve ser corrigida. A educação emerge, nesse contexto, como um instrumento de correção dessas distorções. Constitui, pois, uma força homogeneizadora que tem por função reforçar os laços sociais, promover a coesão e garantir a integração de todos os indivíduos no corpo social.

No grupo das teorias crítico-reprodutivistas, a sociedade é concebida como sendo essencialmente marcada pela divisão entre grupos ou classes antagônicas que se relacionam à base da força, a qual se manifesta fundamentalmente nas condições de produção da vida material. Nesse quadro, a marginalidade é entendida como um fenômeno inerente à própria estrutura da sociedade. Isso porque o grupo ou classe que detém maior força se converte em dominante, se apropriando dos resultados da produção, tendendo, em consequência, a relegar os demais à condição de marginalizados.

À teoria pedagógica tradicional correspondia determinada maneira de organizar a escola. Como as iniciativas cabiam ao professor, o essencial era contar com um professor razoavelmente bem preparado. Assim, as escolas eram organizadas na forma de classes, cada uma contando com um professor que expunha as lições, que os alunos seguiam atentamente, e aplicava os exercícios, que os alunos deveriam realizar disciplinadamente. A Pedagogia Nova começa por efetuar a crítica da Pedagogia Tradicional, esboçando uma nova maneira de interpretar a educação, ensaiando implantá-la, primeiro, por intermédio de experiências restritas; depois, advogando sua generalização no âmbito dos sistemas escolares. Ainda segundo o autor Dermeval Saviani, a partir do pressuposto da neutralidade científica, inspirada nos princípios de racionalidade, eficiência e produtividade, a Pedagogia Tecnicista advoga a reordenação do processo educativo de maneira a torná-lo objetivo e operacional.

A teoria crítico-reprodutivista está desenvolvida na obra *A Reprodução: elementos para uma teoria do sistema de ensino*, de P. Bourdieu e J.C. Passeron (1975). A obra é constituída de dois livros. No livro I, "Fundamentos de uma teoria da violência simbólica", a teoria é sistematizada num corpo de proposições logicamente articuladas segundo um esquema analítico-dedutivo. O livro II expõe os resultados de uma pesquisa empírica levada a cabo pelos autores no sistema escolar francês em um de seus segmentos, qual seja, a Faculdade de Letras. A violência simbólica manifesta-se de múltiplas maneiras: formação da opinião pública pelos meios de comunicação de massa, jornais etc.; pregação religiosa; atividade artística e literária; propaganda e moda; educação familiar etc.

No entanto, na obra em questão, o objetivo de Bourdieu e Passeron é a ação pedagógica institucionalizada, isto é, o sistema escolar. O autor Dermeval Saviani afirma que os autores tomam como ponto de partida que toda e qualquer sociedade estrutura-se como um sistema de relações de força material entre grupos ou classes. Daí, o nome violência simbólica. Sobre a base da força material e sob sua determinação, erige-se um sistema de relações de força simbólica, cujo papel é reforçar, por dissimulação, as relações de força material. É essa a ideia central contida no axioma fundamental da teoria.

Na teoria da Escola como Aparelho Ideológico de Estado (AIE), o conceito "Aparelho Ideológico de Estado" deriva da tese segundo a qual "a ideologia tem uma existência material". Nesse contexto, o fenômeno da marginalidade inscreve-se no próprio seio das relações de produção capitalista que se funda na expropriação dos trabalhadores pelos capitalistas. A teoria da Escola Dualista foi elaborada por C. Baudelot e R. Establet e exposta no livro L'École Capitaliste em France (1971). O autor chama de "teoria da escola dualista", porque os autores se empenham em mostrar que a escola, em que pese sua aparência unitária e unificadora, é uma escola dividida em duas (e não mais do que duas) grandes redes, as quais correspondem à divisão da sociedade capitalista em duas classes fundamentais: a burguesia e o proletariado.

Baudelot e Establet, elaboradores da teoria, procedem de modo didático, enunciando preliminarmente as teses básicas que sucessivamente passam a demonstrar. Assim, na primeira parte, após dissipar "as ilusões da unidade da escola", eles formulam seis proposições fundamentais que passarão a demonstrar ao longo da obra: 1. "existe uma rede de escolarização que chamaremos rede secundária-superior (rede S.S.)"; 2. "existe uma rede de escolarização que chamaremos rede primária-profissional (rede P.P.)"; 3. não existe terceira rede;

4. estas duas redes constituem, pelas relações que as definem, o aparelho escolar capitalista, este aparelho é um aparelho ideológico do Estado capitalista; 5. enquanto tal, este aparelho contribui, pela parte que lhe cabe, a reproduzir as relações de produção capitalistas, quer dizer, em definitivo a divisão da sociedade em classes, em proveito da classe dominante; e 6. é a divisão da sociedade em classes antagonistas que explica, em última instância, não somente a existência das duas redes, mas ainda (o que as define como tal) os mecanismos de seu funcionamento, suas causas e seus efeitos.

Dermeval Saviani expõe a abordagem política do funcionamento interno da escola de 1° grau no capítulo 2 da sua obra. Ele aborda a questão da organização da escola de 1° grau e examina mais propriamente como se desenvolve o ensino. Nesse sentido, o autor faz uma exposição centrada em três teses: 1- tese filosófica-histórica: do caráter revolucionário da pedagogia da essência e do caráter reacionário da pedagogia da existência; 2- tese pedagógica-metodológica: do caráter científico do método tradicional e do caráter pseudocientífico dos métodos novos; e 3- tese política: de como, quando mais se falou em democracia no interior da escola, menos democrática ela foi; e de como, quando menos se falou em democracia, mais a escola esteve articulada com a construção de uma ordem democrática.

Quanto à primeira tese, "do caráter revolucionário da pedagogia da essência e do caráter reacionário da pedagogia da existência", o que Saviani quer dizer é, basicamente, o seguinte: "nós estamos hoje, no âmbito da política educacional e no âmbito do interior da escola, na verdade, nos digladiando com duas posições antitéticas que, geralmente, são traduzidas em termos do novo e do velho, da pedagogia nova e da pedagogia tradicional". Quanto à segunda tese, "do caráter científico do método tradicional, e do caráter pseudocientífico dos métodos novos", esse ensino tradicional, que predomina ainda hoje nas escolas, constituiu-se após a Revolução Industrial e, se implantou nos chamados sistemas nacionais de ensino, configurando amplas redes oficiais, criadas a partir de meados do século XIX, no momento em que, consolidado o poder burguês, acionou-se a escola redentora da humanidade, universal, gratuita e obrigatória como um instrumento de consolidação da ordem democrática. E, por último, o autor faz referência a um apêndice. Esse apêndice faz uma pequena consideração sobre "a teoria da curvatura da vara". O autor relata que, conforme Althusser (1977, p.136-138), ela foi enunciada por Lênin ao ser criticado por assumir posições extremistas e radicais "quando a vara está torta, ela fica curva de um lado e se você quiser endireitá-la, não basta colocá-la na posição correta. É preciso curvá-la para o lado oposto".

As teses funcionam como antíteses por referência às ideias dominantes nos meios educacionais. É este sentido de negação frontal das teses correntes que se traduz metaforicamente na expressão "teoria da curvatura da vara". Com efeito, assim como para se endireitar uma vara que se encontra torta não basta colocá-la na posição correta, mas é necessário curvá-la do lado oposto, assim, também, no embate ideológico, não basta enunciar a concepção correta para que os desvios sejam corrigidos, é necessário abalar as certezas.

Enfim, em sua existência histórica, nas condições atuais, educação e política devem ser entendidas como manifestações da prática social próprias da sociedade de classes. Trata-se de uma sociedade cindida entre interesses antagônicos.

Referências

SAVIANI, Dermeval. **Escola e Democracia**. 35. ed. rev., Campinas: Autores Associados, 2002.

A Educação Matemática em Revista – EMR tem como foco o trabalho do professor em sua prática de educador matemático. Em relação ao seu formato, a revista tem periodicidade quadrimestral e estrutura interna dividida em artigos e seções permanentes com temas específicos.

Os artigos são categorizados em artigos teóricos; atividades para a aula de matemática; pesquisa com implicação para a sala de aula; produções matemáticas de alunos; avaliação da aprendizagem matemática e relato de experiência. Já as seções permanentes são categorizadas da seguinte maneira: Recursos Eletrônicos na aula de matemática (dedicada a relatos de experiência e/ou artigos que discutam a presença desses recursos na escola e nas aulas); Lendo e Comentando (espaço dedicado a resenhas de livros); Para Ler com os Alunos (com intuito de estimular a leitura de textos em sala de aula); O Que Vem por Aí (espaço para a divulgação de eventos, concursos e notícias relacionadas a políticas públicas de educação); Auxílio para a Sala de Aula (a divulgação e comentários de artigos, sites e matérias) e Com a Palavra o Professor (destinada a socialização de cartas, manifestações, demandas e comentários ligados à pratica docente).

Instruções específicas sobre a submissão e formatação de artigos

1. Submissão

O original deve ser submetido em DUAS VERSÕES por meio da plataforma da revista. Uma versão do artigo deve conter a identificação completa dos autores: nome, titulação, instituição, endereço, telefone, e-mail e CPF. Esta versão deve ser salva nomeada de acordo com a categoria a qual o material se adequa, seguido do CPF do primeiro autor, por exemplo, (artigoteórico01234567898.docx). A outra versão do artigo deve ser “cega”, ou seja, sem qualquer identificação dos autores, para os trâmites de avaliação e deverá ser salva, como a versão anterior, de acordo com a categoria seguido do CPF do primeiro autor e da palavra cego (artigoteórico01234567898cego.docx).

Depois de ter os dois arquivos preparados, os interessados devem fazer a transferência dos dados na plataforma.

2. Formatação

O texto deve ser elaborado em Word for Windows (extensão.doc ou .docx), OpenOffice ou RTF atendendo as especificações que se seguem:

- Tamanho do texto

O texto deve apresentar layout da página em papel A4, margens superior e esquerda: 3 cm; margens inferior e direita: 2,5 cm, não ultrapassando o número de páginas indicado para cada categoria:

Artigos teóricos; Atividades para a aula de matemática; Pesquisa com implicação para a sala de aula; Produções matemáticas de alunos; Avaliação da aprendizagem matemática e Relato de experiência	De 3 a 8 páginas
Materiais para a seção Recursos eletrônicos na aula de matemática	De 3 a 8 páginas
Materiais para as seções: Lendo e comentando; Para ler com os alunos; O que vem por aí; Auxílio para a sala de aula; Com a palavra o professor	De 1 a 3 páginas

O original submetido deve seguir a estrutura abaixo especificada, atendendo inclusive a ordem desta apresentação:

Título

Fonte Times New Roman, tamanho 14, em negrito, espaçamento 1,5 linha, centralizado. As iniciais das palavras do título devem ser escritas em letra maiúscula (exceto as preposições, advérbios, conjunções, etc.), sendo que as palavras após o uso de dois pontos (:) devem ser iniciadas com letra minúscula (exceto para nomes próprios).

Nome(s) do(s) autor(es)

O(s) nome(s) do(s) autor(es) deve(m) ser colocado(s) apenas em um dos arquivos. No arquivo nomeado com o código "cego", como descrito anteriormente, não deve(m) ser colocado(s) o(s) nome(s) do(s) autor(es), a fim de garantir seu anonimato para os pareceristas. Utilizar fonte Times New Roman, tamanho 12, espaçamento 1,5 linha, alinhado à direita, não negritado. É necessário utilizar letras maiúsculas/minúsculas e inserir nota de rodapé, para cada autor, constando os seguintes dados: titulação; instituição a que está vinculado/sigla, cidade, estado e país e endereço eletrônico para contato (a ser disponibilizado publicamente).

Resumo

A palavra Resumo deve ser escrita em fonte Times New Roman, tamanho 12, em negrito, usando letras maiúsculas/minúsculas (conforme escrito nessa sentença), espaçamento simples e toque duplo, centralizado. O resumo do texto deve ser escrito em fonte Times New Roman, tamanho 10, espaçamento simples, justificado, sem recuo de parágrafo, contendo de 100 a 150 palavras. O resumo deve enunciar claramente, mas de forma sintética, o problema de pesquisa, a abordagem metodológica empreendida, resultados e conclusões.

Os materiais submetidos as seções permanentes não devem apresentar resumo.

Palavras-chave

Podem ser usadas até cinco palavras-chave que, segundo o(s) autor(es), sintetizem claramente o tema, o conteúdo e a metodologia do artigo. As palavras-chave devem ser apresentadas em fonte Times New Roman, tamanho 10, espaçamento simples, justificado. As iniciais das palavras devem ser escritas em letra maiúscula (exceto as preposições, advérbios, conjunções, etc.) e separadas por ponto final.

Corpo do texto

A fonte do corpo do artigo deve ser Times New Roman, tamanho 12, espaçamento entre linhas 1,5 e justificado. Para o destaque de palavras/frases no texto utilizar o recurso itálico. As páginas devem ser numeradas a partir da segunda

As citações devem seguir as normas da ABNT. Nas citações feitas no corpo do texto, o(s) sobrenome(s) do(s) autor(es) deve(m) aparecer em letras maiúsculas e minúsculas e, quando estiverem entre parênteses, devem ser em letras maiúsculas.

As citações diretas, no texto, com mais de três linhas, devem ser destacadas com recuo de 4 cm da margem esquerda, espaço entre linhas simples e sem aspas, em fonte Times New Roman, tamanho 10. As citações diretas, no texto, de até três linhas, devem ser contidas entre "aspas" duplas e incorporadas ao texto. Nas citações diretas, especificar no texto o ano de publicação e a(s) página(s) da fonte consultada. Estes dados devem ser colocados entre parênteses e separados por vírgula. Nas citações indiretas, a indicação da(s) página (s) consultada(s) é opcional, mas o ano de publicação da obra é obrigatório e deve estar entre parênteses.

As notas de rodapé inseridas no texto devem ser sintéticas e reduzidas ao máximo. Podem vir ao final da página, numeradas em sequência, em fonte Times New Roman, tamanho 10, alinhamento justificado e espaçamento entre linhas simples.

As ilustrações (quadros, fotografias, gráficos, esquemas, tabelas, desenhos e outros) devem ser inseridas o mais próximo possível do trecho a que se refere. Inserir legenda em fonte Times New Roman, tamanho 10, espaçamento entre linhas simples, orientando-se pelos seguintes exemplos: (a) Figura 1 – Título/ legenda da figura 1; (b) Quadro 3 – Título/legenda do quadro 3) e (c) Tabela 2 – Título da tabela 2). Abaixo da legenda de cada uma das ilustrações deve ser incluída a fonte de origem ou consulta.

Referências:

Devem seguir as normas da ABNT e ate-se apenas as obras citadas no trabalho. Devem ser apresentadas, por ordem alfabética de sobrenome do(s) autor(es), alinhadas a esquerda, fonte Times New Roman, tamanho 11, espaçamento simples e separadas entre si por espaço duplo. Utilizar o recurso negrito para destacar o elemento título de cada publicação referenciada.

Seguem, abaixo, exemplos-base:

Livro

SOBRENOME, Nome abreviado; SOBRENOME, nome abreviado. **Título do livro:** subtítulo. Edição. Cidade de publicação: Editora, ano. Descrição física. (série ou Coleção). Notas.

Capítulo de Livro

SOBRENOME, Nome abreviado. Título do Artigo. In: SOBRENOME DO ORGANIZADOR, Nome abreviado (Org.). **Título do livro**: subtítulo. Edição. Cidade de publicação: Editora, ano. p. XX–XX (página: inicial e final separadas por hífen).

Artigos em periódicos

SOBRENOME, Nome abreviado. Título do artigo. **Título do periódico (abreviado ou não)**, Cidade de publicação, v. seguido do número do volume, n. seguido do número do fascículo, p. seguido dos números da página inicial e final (separados entre si por hífen), mês abreviado (se houver). Ano.

Trabalhos publicados em eventos

SOBRENOME, Nome abreviado. Título do trabalho. In: NOME DO EVENTO, x. (número do evento em algarismo arábico), ano, Cidade onde se realizou o evento. **Título da publicação do evento...**Cidade de publicação: editora, ano de publicação. p. XX–XX . Descrição física. Notas.

Dissertações e teses

SOBRENOME, Nome abreviado. **Título:** subtítulo. Ano de depósito. Número de volumes ou folhas (X v. ou X f.). Dissertação (Mestrado em ...) (ou) Tese (Doutorado em ...) – Faculdade de... (ou) Instituto de..., Universidade, Cidade da defesa, ano da defesa.

Homepages

SOBRENOME, Nome abreviado. **Título:** subtítulo. Dados complementares (Responsável pela produção, coordenação, desenvolvimento, apresentação, etc., quando houver). Disponível em: ... . Acesso em: dia mês abreviado. Ano.

Para a Seção "Lendo e Comentando"

O texto das resenhas deve seguir as indicações apresentadas sob o item **corpo do texto** das normas de elaboração e submissão para artigos. Tal texto deve vir em seguida a um cabeçalho inicial com espaçamento 1,5 entre linhas, pautado no seguinte modelo:

Para o caso de resenhas de livros:

SOBRENOME DO AUTOR (em maiúsculas), Inicial(is) do(s) nome(s) do autor da obra resenhada. **Título da obra resenhada** (em negrito, à exceção do subtítulo, se houver). Edição, Cidade da editora: editora, ano.

Por (Autor da Resenha)

Para o caso de resenhas de relatórios de pesquisa (dissertações ou teses):

SOBRENOME DO AUTOR (em maiúsculas), Inicial(is) do(s) nome(s) do autor da obra resenhada.**Título da Dissertação/Tese** (em negrito, à exceção do subtítulo, se houver). Ano de depósito. Número de volumes ou folhas (Xv. ou Xf.). Dissertação/Tese (Mestrado/Doutorado em ...) – Faculdade de... (ou) Instituto de..., Universidade/SIGLA, Cidade da defesa, ano da defesa. (Dissertação/Tese orientada por ... (nome do(a) orientador(a)).

3. Informações aos autores

Os trabalhos submetidos à publicação passarão pela análise de componentes da Comissão de revisores da revista. Essa Comissão é composta pelos membros do Conselho Editorial e pelos Pareceristas *ad hoc*, que atuam como assessores do editor. Os textos enviados ao editor são por ele encaminhados a dois revisores para apreciação. Em caso de divergência entre os pareceres, o textos é encaminhado a um terceiro avaliador. A distribuição dos textos para avaliação pelos revisores é prerrogativa do editor, considerando o tema e a abordagem do trabalho submetido à apreciação, a competência técnica específica dos membros consultores e a ausência de conflito de interesses.

A avaliação por pares, em duplo cego, pode resultar em três situações: i) Aceito sem ressalvas (publicação conforme apresentado), ii) Aceito com modificações, iii) Recusado (reprovação para publicação). O (s) autor(es) recebe(m) comunicação relativa aos pareceres emitidos. A comissão editorial reserva-se o direito de recusar o texto sobre o qual foram solicitadas ressalvas, caso essas não atendam ás solicitações feitas pelos revisores. Todos os autores são comunicados sobre a decisão final referente ao texto submetido.

A EMR reitera que o conteúdo dos textos publicados é de inteira responsabilidade de seus autores não refletindo necessariamente a opinião do Conselho Editorial.

Sandra Malta Barbosa

Rosilângela Lucena

Maria Madalena Dullius

Mauricio Rosa

Daise Souto

William Beline

Verônica Gittirana

Rony Freitas

Maria R Miotto

Vinicius Pazuc

Sueli L. Javaroni

Rubia Amaral

Marcelo Bairral

Nilce Scheffer

Juliana Andrade Araripe

Tanise Novello

Roberto Mariano

Rosana Nogueira

Wagner Marques

Junte-se a nós!

Filie-se já!

Diretoria Regional do Acre
Diretor Regional: Regina Célia da Costa Amaral
reginaccamaral@hotmail.com

Diretoria Regional do Alagoas
Diretor Regional: Lucia Cristina S. Monteiro
contato@sbem-al.org.br
www.sbem-al.org.br

Diretoria Regional do Amazonas
Diretor Regional: Maria Auxiliadora. B. Moreira
E-mail: auxiliadora@esbam.edu.br

Diretoria Regional da Bahia
Diretor Regional: Ana Virginia de Almeida luna
andrluna@uol.com.br
http://www.sbemba.com.br

Diretoria Regional do Ceará
Diretor Regional: Cleiton Batista Vasconcelos
Ceara.sbem@gmail.com
http://sbemce.blogspot.com.br

Diretoria Regional do Distrito Federal
Diretor Regional: Mauro Luiz Rabelo
sbemdf@gmail.com
http://www.sbemdf.com/

Diretoria Regional do Espírito Santo
Diretor Regional: Rony Cláudio de Oliveira Freitas
E-mail: es.sbem@gmail.com /
freitasrco@gmail.com
www.sbemcapixaba.wordpress.com

Diretoria Regional de Goiás
Diretor Regional: Wellington Lima Cedro
sbemgo@gmail.com
http://www.sbem-go.com.br

Diretoria Regional de Minas Gerais
Diretor Regional: Marco Aurélio Kisteman Junior
mathk@ig.com.br

Diretoria Regional do Mato Grosso
Diretor Regional: Josimar de Souza
E-mail: contato@irio.pro.br

Diretoria Regional do Mato Grosso do Sul
Diretor Regional: João Ricardo Viola dos Santos
Jr.violasantos@gmail.com
http://www.sbem-ms.com.br

Diretoria Regional do Pará
Diretor Regional: Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
mlcrocha@ibest.com.br
http://www.sbempa.mat.br

Diretoria Regional da Paraíba
Diretor Regional: Abigail Fregni Lins
sbempb@sbempb.com.br
http://www.sbempb.com.br

Diretoria Regional do Paraná
Diretor Regional: Rodolfo Eduardo Vertuan
rodolfovertuan@yahoo.com.br
http://sites.unicentro.br/sbempr

Diretoria Regional de Pernambuco
Diretor Regional: José Carlos Alves de Souza
jcadesouza@ig.com.br
http://www.sbempe.com.br

Diretoria Regional do Rio de Janeiro
Diretor Regional: Flávia dos Santos Soares
sbem@sbemrj.com.br
http://www.sbemrj.com.br

Diretoria Regional do Rio Grande do Norte
Diretor Regional: Mércia de Oliveira Pontes
sbemregionalrn@gmail.com.br
http://www.sbemrn.com.br

Diretoria Regional do Rio Grande do Sul
Diretor Regional: Maurício Rosa
sbemrs@gmail.com
http://www.sbemrs.org

Diretoria Regional de Rondônia
Diretor Regional: Marlos G. Albuquerque
professormarlos@hotmail.com
http://www.unir.br/~unirjiparana

Diretoria Regional de Santa Catarina
Diretor Regional: Vilmar José Zermiani
sbemsc@gmail.com

Diretoria Regional de São Paulo
Diretor Regional: Douglas Tinti
E-mail: sbem@sbempaulista.org.br

Diretoria Regional de Sergipe
Diretor Regional: Ivanete Batista dos Santos
sbemse@ufs.br

Diretoria Regional do Tocantins
Diretor Regional: Willian Vieira de Oliveira
w.vieira.oliveira@bol.com.br