EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
em Revista

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

DIVISÃO DE FRAÇÕES: EXPLORANDO ALGORITMOS NÃO USUAIS

Rafael Filipe Novoa Vaz[1]

RESUMO

Este artigo fornece reflexões sobre a prática pedagógica comum do professor de Matemática que supervaloriza a memorização de regras e procedimentos operatórios com o fazer matemática em sala de aula e, por outro lado, parece alocar em segundo plano a compreensão dos conceitos, dos significados e das relações entre as grandezas. No ensino de frações, a ênfase na memorização de procedimentos contribui para que a divisão de frações perca significado, o conceito relacionado à divisão é confundido com o algoritmo utilizado nesta operação. Esta pesquisa apresenta diferentes abordagens do tema, fornecendo ao professor os subsídios necessários para ensinar divisão de frações de forma mais conceitual, não se limitando ao algoritmo na qual a divisão se transforma na multiplicação de frações sem nenhum significado.

Palavras-chave:

Prática pedagógica. Ensino de matemática. Divisão de frações.

Introdução

Os professores do século XXI ainda trazem consigo concepções antigas, transmitidas através das gerações. “Ensinar como aprendi” é uma prática pedagógica comum. Para tornar a situação mais complexa, os alunos de hoje em dia possuem muitos motivos para estarem desatentos ou desinteressados; afinal, os *smartphones*, a internet e as redes sociais são muito mais atraentes que as aulas que ainda são ministradas neste século XIX.

> O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, “carroções”, cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar ideias fortes da matemática. (LOPES, 2008, p.20-21)

Nas escolas básicas, é possível constatar uma estrutura padronizada e engessada, na qual grande parte do ensino de Matemática está inserida. Há uma tendência por parte de professores, principalmente os de Matemática, a considerar que a aprendizagem é exclusivamente e diretamente proporcional a quantidade de exercícios resolvidos pelo estudante (D’AMBRÓSIO,

[1]IFRJ – CPAR. E-mail: rafael.vaz@ifrj.edu.br

1989). Essa ideia, ainda hoje, parece estar inserida na prática pedagógica do professor, na qual os procedimentos operatórios e a memorização de regras são supervalorizados (PONTE, 1992), em detrimento da compreensão dos conceitos pertinentes, mesmo que diversas pesquisas apontem para uma falência desse modelo.

A divisão de frações

Para Wu (1999, p.2), existem problemas que persistem no ensino de frações, como, por exemplo, as regras das quatro operações aritméticas em frações, que parecem ser feitas exclusivamente para explicar o fenômeno que descrevem, sem relação com as quatro operações usuais em inteiros positivos com que os alunos estão familiarizados. O aluno aprende a somar frações com denominadores diferentes, a igualar denominadores usando o menor múltiplo comum, muitas vezes, sem compreender qual a relação entre as novas frações que serão somadas e as frações anteriores. Na divisão de frações, o estudante aprende que para dividir duas frações há uma espécie de "receita de bolo", que consiste em multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, mesmo que esse algoritmo não faça nenhum sentido.

Segundo Lopes (2008), a prescrição de regras e macetes para realizar operações é um problema grave no ensino de frações. Para Rojas et al (2015), o conhecimento dos professores de Matemática está centralizado nos procedimentos operatórios de frações, principalmente na multiplicação e na divisão: "Nas operações de multiplicação e divisão de frações, o professor se limita a ensinar os procedimentos simbólicos mediante a algoritmos convencionais, promove a automatização dos algoritmos para efetuar as operações" (ROJAS et. al., 2015, p. 163).

Em consonância com Rojas et. al. (2015), Wu (1999) e Ma (1999), Fazio e Siegler (2011) defendem que o professor atue mais significativamente na compreensão dos conceitos relacionados às frações e recomendam que os professores promovam estratégias de ensino que privilegiem, no ensino de frações, o "conhecimento conceitual" e não o "conhecimento processual", termos adotados por esses pesquisadores.

O conhecimento conceitual de frações é definido como o conhecimento do significado das frações, de suas magnitudes e relações com grandezas físicas. Trata-se de uma compreensão de como os procedimentos aritméticos com frações são matematicamente justificados. Por outro lado, o conhecimento processual é a habilidade de percorrer uma série de etapas para resolver um problema (FAZIO; SIEGLER, 2011).

Em uma pesquisa, Ma (1999) constatou uma grande lacuna nos conhecimentos dos professores de Matemática relacionados à divisão de frações. O trabalho envolveu 23 professores norte-americanos;

destes, 21 se propuseram a resolver $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, no entanto, apenas 43% conseguiram resolver corretamente. A pesquisadora relata que 24% dos professores ficaram inseguros sobre quais seriam os procedimentos algorítmicos que deveriam ser adotados e apenas um destes professores foi capaz de criar uma representação conceitualmente correta para este caso.

> A deficiência dos professores no entendimento do significado da divisão por frações determinou a sua incapacidade de criar uma representação apropriada. Mesmo o seu conhecimento pedagógico não pode compensar a ignorância do conceito. (MA,1999, p.60)

Em contrapartida, Ma (1999) observou que todos professores chineses foram capazes de resolver a mesma questão. Segundo a autora, eles descreveram o procedimento com a seguinte frase "dividir por um número é equivalente a multiplicar pelo recíproco" e não "inverter e multiplicar" como os professores americanos. Segundo a autora, durante as entrevistas, os professores chineses foram mais além, apresentaram três alternativas para a resolução da questão. Uma delas poderia ajudar na introdução do algoritmo usual da divisão:

$$\begin{aligned} 1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} &= \left(1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1}\right) \div \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1}\right) \\ &= \left(1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1}\right) \div 1 \\ &= 1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Figura 1 - Justificativa do algoritmo apresentada por um professor chinês
Fonte: Ma (1999)

A seguir, serão apresentadas três abordagens que podem ser utilizadas para o estudo da divisão de frações no ensino fundamental. A sequência foi idealizada pelo autor e elaborada a partir dos trabalhos de Ma (1999) e Wu (1999): divisão com auxílio de representações, divisão através de um algoritmo não usual e divisão através da multiplicação.

Divisão com auxílio de representações gráficas

Em um momento inicial, as divisões de frações poderiam ser exploradas de modo mais construtivo, por meio de conceitos adquiridos durante a aprendizagem dos números naturais e das frações, sem a utilização de qualquer algoritmo novo. Ao ensinar divisão de números naturais, o professor utiliza comumente a ideia de "quantos cabem?" Por exemplo, na divisão de 100 por 20 é possível pensar que 100 ÷ 20 = 5, pois "cabem cinco números 20 em 100". Trata-se de uma forma de pensar natural para professores e estudantes que, geralmente, não é utilizada no ensino de frações e que poderia contribuir para a aprendizagem desse conteúdo.

Para tanto, o auxílio de figuras seria muito eficiente. Para dividir 1/2 por 1/8, o estudante poderia observar, na figura 2, que cabem quatro pedaços correspondentes a 1/8 em um pedaço correspondente a 1/2. Logo, ${}^{1}/_{2} \div {}^{1}/_{8} = 4$.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em Revista

1							
1/2				1/2			
1/4		1/4		1/4		1/4	
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Figura 2 - Tabela de frações
Fonte: elaborado pelo autor.

Outra exploração interessante está associada à ideia da repartição. Na divisão de 30 por 2, o modo mais eficiente provavelmente não seria em pensar quantos "2" cabem em "30", e sim, repartir o 30 em duas partes. Um modo análogo pode ser utilizado na divisão de 3/4 por 2. Ao repartir cada 1/4 da fração em dois pedaços iguais, obtém-se 3 pedaços destacados em oito o que corresponde a 3/8.

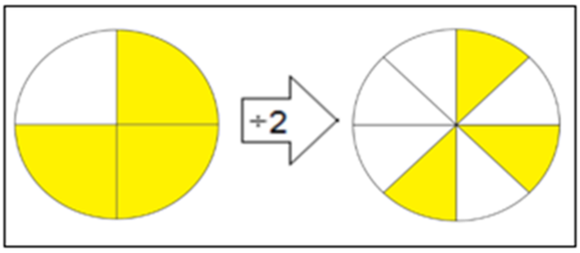

Figura 3 – Divisão de 3/4 por 2
Fonte: elaborado pelo autor.

Divisão através de um algoritmo não usual

Em uma segunda etapa, há a divisão de frações através da divisão de numerador por numerador e denominador por denominador. Este algoritmo foi apresentado por alguns professores chineses (Ma, 1999), provavelmente seja desconhecido pelos professores.

Para a construção desse algoritmo, inicialmente, poderia ser trabalhada a divisão de frações com denominadores iguais. Por exemplo, a divisão de 9/10 por 3/10. Neste caso, o conceito de quantos 3/10 cabem em 9/10 poderia ser facilmente compreendido, até mesmo em frações representadas em conjuntos. A figura 4, a seguir, mostra dois conjuntos de quadrados coloridos, nos quais há 10 quadrados, sendo 9 vermelhos e 1 azul. A figura 5 ilustra os quadrados vermelhos agrupados em três subconjuntos. Como em cada há 3 destes subconjuntos, conclui-se que 9/10: 3/10 = 3.

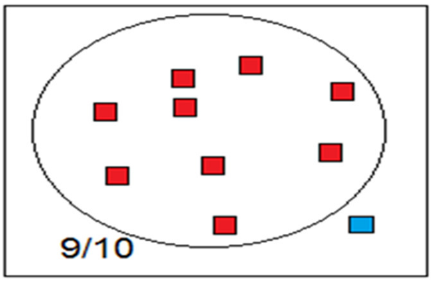

Figura 4 - 9/10 de um conjunto
Fonte: elaborado pelo autor.

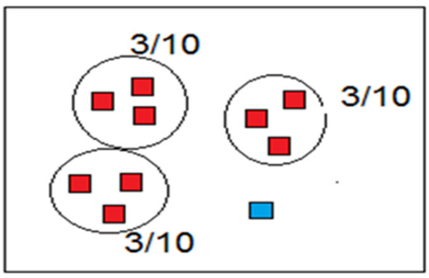

Figura 5 - 9/10 dividido por 3/10
Fonte: elaborado pelo autor.

Após a resolução desta operação com o auxílio dos diagramas, o professor poderia explorar outros modos de se obter a resposta, conduzindo os estudantes a possibilidade de encontrar o mesmo resultado dividindo-se os numeradores e os denominadores.

$$\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{9 \div 3}{10 \div 10} = \frac{3}{1} = 3$$

Em seguida, poderia ser explorada a divisão com numeradores iguais, por exemplo: 1/4 dividido por 1/2. Com o auxílio da tabela apresentada na figura 1, o aluno poderia observar que em 1/4 é a metade de 1/2. Logo, em 1/4 cabe a metade de 1/2, ou seja, 1/4 : 1/2 = 1/2.

1							
1/2				1/2			
1/4		1/4		1/4		1/4	
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Figura 6 - Tabela de frações
Fonte: elaborado pelo autor.

Neste ponto, alguns alunos poderiam observar que a fração 1/2 pode ser obtida realizando uma operação análoga ao exemplo anterior, ou seja, dividindo numerador por numerador e denominador por denominador. A próxima etapa seria dividir frações com denominadores e numeradores distintos, em que os termos da primeira fração fossem múltiplos dos termos da segunda.

$$\frac{9}{10} \div \frac{3}{5} = \frac{9 \div 3}{10 \div 5} = \frac{3}{2}$$

Normalmente, os estudantes aprendem divisão de frações após a multiplicação. Consequentemente, a utilização de um procedimento similar a multiplicação, no qual se operam numerador com numerador e denominador com denominador, pode fazer mais sentido ao aluno.

Divisão através da multiplicação: o algoritmo conhecido

A última etapa seria a construção do algoritmo mais eficiente em termos operacionais, que é encontrado em todos os livros didáticos. Para se dividir duas frações, multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda. E como chegar a este algoritmo?

O professor poderia propor a turma que refletisse sobre uma divisão entre frações em que o denominador da primeira não fosse múltiplo do denominador da segunda, por exemplo, 6/7 dividido por 3/5. Um bom caminho seria aquele que contempla a utilização de outro conceito que frequentemente é abandonado: o de fração equivalente.

O conceito de fração equivalente é essencial para a comparação entre frações e para a compreensão da adição e da subtração de frações. Porém, sua aplicabilidade pode ser estendida a outras operações. Como 7 não é múltiplo de 5, a divisão de 6/7 por 3/5, usando o procedimento anterior, não é possível. Entretanto, a fração 6/7 é equivalente a 30/35, e 35 é um múltiplo de 5. Fazendo esta substituição, a divisão se torna fácil.

$$\frac{6}{7} \div \frac{3}{5} = \frac{30}{35} \div \frac{3}{5} = \frac{30 \div 3}{35 \div 5} = \frac{10}{7}$$

A construção de um conhecimento conceitual fornece inúmeras possibilidades. Para dividir frações com denominadores diferentes, um procedimento análogo à adição/subtração poderia ser adotado ao se obter duas frações equivalentes que possuíssem denominadores iguais, como mostra o exemplo a seguir:

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{20} \div \frac{15}{20} = \frac{8 \div 15}{20 \div 20} = \frac{8 \div 15}{1} = \frac{8}{15}$$

Neste caso, entretanto, para que a última parte do processo fosse facilmente compreendida pelo estudante seria necessário que ele já estivesse habituado a interpretar a fração como um quociente entre dois inteiros. O exemplo anterior poderia ser utilizado para introduzir o algoritmo da divisão. Como o denominador da primeira fração $\frac{2}{5}$ não é divisível pelo denominador da segunda $\frac{3}{4}$ (5 não é divisível por 4), obtêm-se uma fração equivalente a 2/5, multiplicando numerador e denominador por 4.

$$= \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$$

Como o novo numerador (8) também não divide o numerador de $\frac{3}{4}$ (8 não é divisível por 3), obtém-se outra fração equivalente a $\frac{8}{20}$, multiplicando numerador e denominador por 3.

$$= \frac{8 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{24}{60}$$

Em seguida, substituímos 2/5 por 24/60, e realizamos a operação.

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{24}{60} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$$

Para finalizar a sequência didática, o professor poderia realizar o mesmo procedimento sem indicar os resultados das multiplicações:

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} \div \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} \div \frac{3}{4}$$

Na sequência, dividimos 3 por 3, no numerador, e 4 por 4 no denominador.

$$= \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$$

Então, sendo conveniente, dependendo da turma e da necessidade, o professor poderia desenvolver a generalização deste algoritmo:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \div \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{a \cdot c \cdot d}{b \cdot c \cdot d} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}$$

Considerações finais

Por que se multiplica a primeira pelo inverso da segunda? Este é, sem dúvida, o questionamento – vindo de um aluno do sexto ano do ensino fundamental - que motivou a escrita deste artigo. A melhor forma de ensinar divisão é, unicamente, a transmissão de um algoritmo, exercitado em dezenas de exemplos? Será que um aluno que simplesmente memoriza a regra e aplica eficientemente realmente aprendeu divisão?

As pesquisas, referenciadas neste trabalho, apontam que ambas as respostas são negativas. A ênfase na memorização de procedimentos pode contribuir para que a divisão de frações não tenha significado, pois o conceito relacionado a dividir é confundido com o próprio algoritmo da divisão de frações.

O ensino de frações precisa ser repensado e reformulado, porque ele ainda está embasado em concepções ultrapassadas, como aquela na qual a aprendizagem matemática está relacionada, quase exclusivamente, à repetição e à memorização (D'AMBRÓSIO, 1989; LOPES, 2008). O ensino de matemática deveria, sim, estar e ser fundamentado na melhor compreensão dos conceitos e dos significados, na valorização do raciocínio e do pensamento matemático. No caso específico de frações, esse ensino deve estar voltado para o desenvolvimento do que Fazio e Siegler (2011) denominaram de "conhecimento conceitual de frações".

Referências

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates.** São Paulo. v. 2, n. 2, p. 15 – 19, 1989.

FAZIO, L.; SIEGLER, R. S. Teaching fractions. **Educational Practices Series.** Geneva. International Academy of Education - International Bureau of Education. v. 22, 2011.

LOPES, Antônio J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema.** Rio Claro. v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics:** Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

PONTE, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: PONTE, J.P. et al. **Educação matemática.** Lisboa. Instituto de Inovação Educacional, 1992. p.187-239.

ROJAS, N.; FLORES, P.; CARRILLO, J. Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *em Revista*

los Números Racionales. **Bolema.** Rio Claro. v. 29, n. 51, p. 143-167, 2015.

WU, H. **Some remarks on the teaching of fractions in elementar school**. [1999]. Disponível em: http://math. berkeley. edu/~ wu/fractions2. pdf . Acesso em: 05 Mai. 2013.

VAZ, R. F. N. **Metodologia Didática de Análise de Soluções Aplicada no Ensino de Frações**. 2013. 81f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), UFRJ, Rio de Janeiro, 2013.