



COMO ENSINAR O CONCEITO DE FUNÇÃO?

Graça Luzia Dominguez Santos¹
Jonei Cerqueira Barbosa²

Resumo

Este texto não é propriamente um relatório de pesquisa, trata-se de um diálogo com os colegas professores e futuros professores sobre formas de comunicar o conceito de função no seu ensino, em consonância com o entendimento de que esse conceito é um conjunto constituído pelas diferentes formas possíveis de comunicá-lo. Neste artigo, identificam-se as seguintes formas: como tabela, como máquina de transformação, como diagrama, como expressão algébrica, como generalização, como gráfico e, por fim, como definição. A análise de cada uma dessas formas de comunicar o conceito de função evidencia especificidades e potencialidades em realizar e revelar características do conceito. Assim, o leitor pode encontrar, no presente texto, subsídios para reflexões sobre o seu ensino, em referência tanto à seleção e ao sequenciamento de formas de comunicar o conceito de função, quanto à escolha de estratégias pedagógicas para destacar noções que compõem esse conceito, a depender dos objetivos do ensino e do grau de escolaridade.

Palavras-chave: Função. Conceito Matemático. Comunicação. Ensino.

HOW TO TEACH THE CONCEPT OF FUNCTION?

Abstract

This text is not really a research report; it is a dialogue with fellow in-service and pre-service teachers about ways of communicating the concept of function in the teaching. Here we understand a mathematical concept as a set consisting by the different possible ways of communicating it. In this article, the concept of function was identified as following: table, transformation machine, diagram, algebraic expression, generalization, graph, and lastly definition. The analysis of each of these ways of communicating the concept of function uncovers specificities and potentialities in realizing the concept and its characteristics. So, in this paper, the reader can find elements for reflections on his/her teaching, both to select and sequence ways of communicating the concept of function, as well as to choose pedagogical strategies to highlight aspects of the concept.

Keywords: Function. Mathematical concept. Communication. Teaching.

Para início de conversa

¹ Doutora em Ensino, História e Filosofia das Ciências pela Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana (UFBA/UEFS). Docente do Departamento de Matemática da UFBA, Salvador, Bahia, Brasil. E-mail: gracadom@ufba.br.

² Doutor em Educação Matemática (UNESP, Campus de Rio Claro). Docente da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil. E-mail: jonei.cerqueira@ufba.br.

O conceito de função tornou-se uma das noções fundamentais da matemática contemporânea. Por esse motivo, ele tem um papel central na estruturação dos conteúdos da matemática escolar, perpassando vários níveis de ensino. No documento “Orientações Curriculares do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias”, o estudo de função é preconizado como presente em diversas situações, tanto internas à Matemática, quanto em outras áreas (BRASIL, 2006). Para os Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental do 6^o ao 9^o anos, a noção de função deve ser desenvolvida como uma das dimensões do estudo da Álgebra (BRASIL, 1998).

Apesar da sua importância na matemática escolar, o conceito de função ainda é considerado um desafio do ponto de vista do seu ensino e aprendizagem, em virtude tanto da variabilidade de formas de comunicá-lo, quanto do estabelecimento de relações entre elas (TABACH, NATCHIELI, 2015). Nesse sentido, nas aulas de matemática, nos livros didáticos e em trabalhos com professores, podemos identificar uma diversidade de configurações comunicativas, que dizem respeito a comunicar o conceito de função, tais como: tabela, máquina de transformação (metáfora), diagrama, expressão algébrica, generalização, gráfico e definição (SANTOS; BARBOSA, 2016; SANTOS, 2017).

Cada uma dessas formas de comunicar o conceito de função evidencia aspectos e propicia interpretações particulares desse conceito, que são mais apropriadas e/ou eficazes a depender do contexto funcional sob análise e do nível de ensino no qual está sendo abordado. Assim, o caráter indagativo do título do presente artigo tem o propósito de convidar o leitor a refletir sobre a organização do ensino desse tema, a partir da análise que realizamos dessas possíveis configurações, com a apresentação de suas potencialidades e limitações comunicativas e, por conseguinte, interpretativas. Portanto, esse artigo não pretende ter caráter prescritivo; ao contrário, ele objetiva constituir-se em um diálogo com os colegas professores, futuros professores e autores de livros didáticos no que concerne à tarefa do professor ao realizar o ensino desse conceito, principalmente no que diz respeito à variabilidade de formas de comunicá-lo.

Ressaltamos que, apesar do presente artigo não ser relatório de uma pesquisa, as ideias aqui desenvolvidas têm seus fundamentos em pesquisas realizadas pelos autores, como, por exemplo, em Santos e Barbosa (2016), no qual conceptualizamos e construímos um modelo teórico de Matemática para o Ensino do conceito de função, a partir de um estudo empírico implementado com um grupo de professores em exercício na Educação Básica.

Formas de comunicar o conceito de função

A variabilidade de formas de se comunicar o conceito de função, como indicamos na seção anterior, não se restringe a sua definição, sendo bem mais ampla. Podemos, inclusive, comunicar o conceito de função por intermédio de uma generalização, por exemplo, sem nem mesmo mencionar a palavra “função”, como ocorre nos anos iniciais do Ensino Fundamental, quando se busca identificar regras de formação em uma sequência. Com essa perspectiva, entendemos o conceito de função como um conjunto constituído pelas diferentes formas de comunicá-lo. Passamos a apresentar as formas de comunicar o conceito de função, que identificamos e que foram citadas anteriormente.

Função como tabela

A comunicação do conceito de função pode ser realizada por intermédio de uma *tabela*, que organiza os dados de uma relação funcional em linhas ou colunas, de forma que os dados de entrada e os seus correspondentes dados de saída estejam na mesma coluna ou linha. Como exemplo, podemos construir uma tabela que associa a todo aluno de uma sala a sua nota em um teste. Trata-se de uma relação funcional, considerando que a cada aluno corresponde uma única nota e nenhum aluno ficará sem nota (ao aluno que não fizer o teste, poderá ser associada a nota zero). Esta tabela pode ser utilizada no tratamento de informações para construir um gráfico de barras de frequência com faixas de notas. É uma oportunidade de iniciar o processo de caracterização de uma relação funcional e de vincular as noções de associação e correspondência como constituintes do conceito de função.

Na Figura 1, apresentamos a tabela da relação funcional (a todo n está associado um único P) que descreve a variação de P (preço em reais de n DVD's) em função de n (número de DVD's), considerando que um DVD custa R\$ 9,50.

Tabela 1 – Variação de preços de um DVD

O preço de um DVD é R\$ 9,50, se n é o número de DVD's adquiridos e P é o preço correspondente. Complete a tabela que descreve a variação de P em decorrência da variação de n .	n (número de DVD's)	1	2	3	4	5
	P (preço em R\$)	9,50	19,00	...		

Fonte: elaborado pelos autores.

Essa situação funcional pode ser utilizada em vários momentos no ensino, como, por exemplo, quando estamos trabalhando com a operação multiplicação, que é uma relação funcional. Já é razoável, nessa circunstância, destacar as noções de variação e de dependência, que obedecem ao padrão (multiplicar n por 9,50). Posteriormente esse padrão ou lei pode estar relacionado com a proporcionalidade direta e, futuramente, pode ser comunicado pela expressão algébrica ($P = 9,50n$), uma relação funcional linear, o que possibilita vincular a proporcionalidade direta como o seu modelo matemático.

Assim, quando introduzirmos “oficialmente” o conceito de função no ensino, podemos apresentar situações funcionais análogas, resgatando as noções analisadas e estudadas anteriormente. Isto é, estabeleceremos relações com assuntos anteriores, que, apesar de tradicionalmente parecerem ser temas distintos, constituem o amplo conceito de função, segundo nossa perspectiva.

Função como máquina de transformação

A comunicação do conceito de função como a metáfora de uma *máquina de transformação* se configura também como uma forma de introduzir esse conceito no ensino, por utilizar uma linguagem supostamente mais próxima do cotidiano dos alunos.

Na Figura 2, apresentamos um exemplo de uma “função máquina” que tem o propósito de comunicar que todo elemento que entra na máquina é processado/transformado/modificado (de acordo com a regra dada) gerando um único elemento de saída.

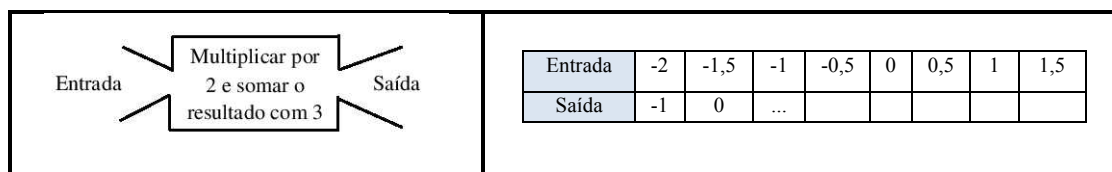


Figura 2 – Máquina de transformação
Fonte: elaborado pelos autores.

A comunicação como máquina de transformação propicia uma visão dinâmica do conceito de função, por intermédio das noções processo, transformação e mudança. É possível também, com base nessa forma de comunicação, introduzir as definições dos conjuntos domínio (entrada) e imagem (saída), que são elementos fundamentais na caracterização de uma relação funcional.

Função como diagrama

A comunicação do conceito de função como *diagrama* de setas caracteriza/define uma relação funcional como uma correspondência entre dois conjuntos não vazios quaisquer (dispostos em diagramas), desde que a todo elemento do conjunto A (denominado de domínio) corresponda (por uma seta) um único elemento do conjunto B (denominado de contradomínio). Na Figura 3, por meio de um diagrama de setas, comunicamos uma relação funcional do conjunto $A = \{-1, -3, 5, 7\}$ (domínio) no conjunto $B = \{-5, 0, 2, 8, 11\}$ (contradomínio), a partir do qual é factível identificar o conjunto imagem ($\text{Im} = \{-5, 0, 2, 11\}$) como um subconjunto do contradomínio B.

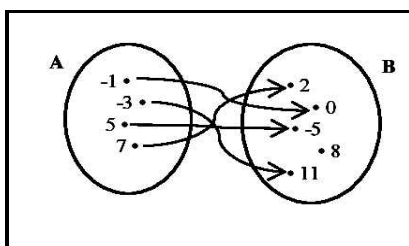


Figura 3 – Diagrama de setas: relação funcional

Fonte: elaborado pelos autores.

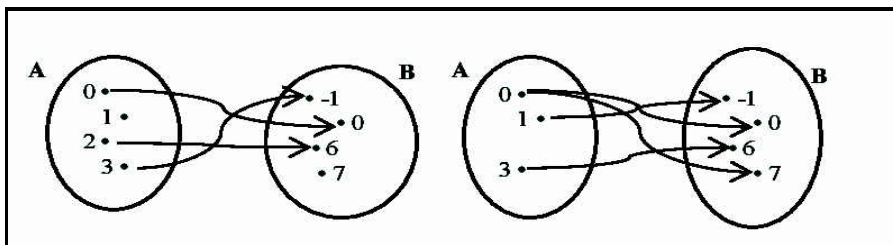


Figura 4 – Diagrama de setas: relação não funcional

Fonte: elaborado pelos autores.

Tal caracterização/definição torna possível identificar se uma dada relação é ou não funcional. Na Figura 4, as relações não são funcionais, tendo em vista que, na primeira, o elemento 1 do conjunto A não possui correspondente (imagem) em B e, na segunda, o elemento 0 do conjunto A possui duas imagens em B.

A comunicação do conceito de função como diagrama dá visibilidade às definições de relações funcionais injetoras (uma relação funcional é injetora se, e só se, elementos distintos possuem imagens distintas), sobrejetoras (uma relação funcional é sobrejetora se, e só se, o conjunto imagem for igual ao contradomínio) e bijetoras (uma relação funcional é bijetora se,

e só se, é injetora e sobrejetora). Por exemplo, a relação funcional da Figura 3 é injetora, não é sobrejetora, pois a sua imagem é o conjunto $\{-5,0,2,11\}$, diferente do contradomínio B, logo não é bijetora.

Função como expressão algébrica

A comunicação do conceito de função como uma *expressão algébrica* caracteriza-se por expressar a relação entre as variáveis independentes e dependentes de uma relação funcional (cujos domínio e o contradomínio são subconjuntos dos números reais) como uma fórmula ou lei algébrica (usando letras e símbolos). Na Figura 5, a comunicação da relação funcional como expressão algébrica ($D = kv^2$) descreve (de maneira única, exceto por equivalências algébricas) a relação de dependência entre as variáveis independente (v) e dependente (D), traduzindo de modo conciso o comportamento do fenômeno.

Para determinar o valor da constante k , utilizamos quaisquer dos pares (v , D) fornecidos pela tabela da relação funcional (outra forma de comunicação), obtendo $k = 1/200$, e conseqüentemente $D = (1/200)v^2$. A partir dessa forma de comunicação da relação funcional, é possível determinar a distância (D) para qualquer velocidade (v) imprimida pelo automóvel, demonstrando sua potencialidade para tratar de dimensões quantitativas de situações funcionais. Observe que um exemplo desse tipo pode ser utilizado mesmo que o tema função ainda não tenha sido abordado, propiciando uma exposição anterior com a noção de relação de dependência entre variáveis, por intermédio de uma regra, que pode posteriormente ser vinculada, de modo mais natural, ao conceito de função.

<p>Quando um automóvel está em movimento e é freado, a distância (D) que percorre até parar depende da sua velocidade (v). Essa relação de dependência é descrita pela expressão $D = kv^2$.</p>	<p>A tabela a seguir refere-se as relações entre D e v para um determinado modelo de automóvel. Usando esses dados determine o valor da constante k para esse automóvel.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>v</td> <td>40</td> <td>60</td> <td>80</td> </tr> <tr> <td>D (m)</td> <td>8</td> <td>18</td> <td>32</td> </tr> </table>	v	40	60	80	D (m)	8	18	32
v	40	60	80						
D (m)	8	18	32						

Figura 5 – Expressão algébrica
Fonte: Adaptado de Brasil (2004).

Com base na comunicação do conceito de função como expressão algébrica, é possível identificar, e assim definir, tipos específicos de relações funcionais, tais como a função constante, a afim, a quadrática, a exponencial, a logarítmica e as trigonométricas. Por

exemplo, podemos definir uma *função quadrática* como toda função $f : R \rightarrow R$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Outro atributo da comunicação do conceito de função como expressão algébrica é simplificar a execução de operações, tais como somar, subtrair, multiplicar, dividir e compor relações funcionais, quando for possível.

Função como generalização

Comunicar o conceito de função como uma *generalização* é expressar em linguagem corrente ou usando símbolos algébricos uma afirmação geral que explicita a dependência entre variáveis de uma relação funcional, tomando como base alguns dados dessa relação. Exemplos de relações funcionais que podem ser comunicadas por generalização são seqüências numéricas ou de formas geométricas e fenômenos funcionais passíveis de serem comunicados algebricamente. Na Figura 6, apresentamos uma seqüência de ilustrações composta de quadrados com formação em L.

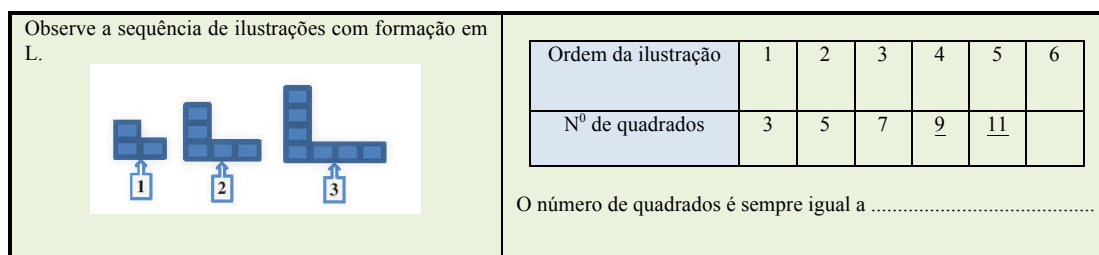


Figura 6 – Generalização
Fonte: elaborado pelos autores.

Comunicar a generalização dessa relação funcional implica expressar uma afirmação (padrão/regra) que possibilite obter o número de quadrados para qualquer ordem. A organização dos dados da seqüência em uma tabela auxilia no processo de generalização. Isto posto, é possível inferir, na situação da Figura 6, que: o número de quadrados em cada ordem (posição) é igual a duas vezes o número da posição adicionado de uma unidade, ou seja, $L = 2n + 1$, $n \geq 1$, com n indicando a ordem da ilustração e L o número de quadrados.

A exploração da comunicação do conceito de função por generalização pode ser utilizada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como base para o estudo posterior de funções, por propiciar o reconhecimento da relação de dependência entre quantidades e variáveis, que nos anos iniciais são descritos por palavras e números, e nos anos finais usando a notação simbólica. Assim, a fórmula $L = 2n + 1$ com n natural e $n \geq 1$, construída

anteriormente, pode ser estendida para domínios mais amplos, mesmo que de modo intuitivo, para uma função afim $f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$, que é definida no conjunto dos números reais.

Função como gráfico

A comunicação do conceito de uma função f (cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais) como um *gráfico* consiste em apresentar no plano cartesiano o subconjunto de pontos (x, y) , em que x pertence ao domínio da função f e y é a imagem de x por f , ou seja, $y = f(x)$, sendo geralmente visualizado como uma linha no plano.

Na Figura 7, comunicamos como gráfico a relação funcional que descreve o desmatamento na Amazônia ao longo dos anos de 2004 até 2014, o qual fornece um quadro da natureza do fenômeno, tornando possível analisá-lo: anos de maior e menor desmatamento (extremos), períodos em que o desmatamento cresceu e diminuiu (crescimento e decrescimento). Observamos, desse modo, que as comunicações gráficas tornam visível inúmeras informações sobre uma relação funcional, tais como, imagem, sinal, intervalos de crescimento e decrescimento, injetividade, zero(s) e extremos, caso existam.



Figura 7 – desmatamento na Amazônia de 2004 a 2014
Fonte: <<http://pdrsxingu.org.br/noticia/224>>

Exemplos como o apresentado na Figura 7 podem ser abordados no tratamento de informações, antes que o tema função tenha sido introduzido no ensino, propiciando familiaridade com esse tipo de comunicação. Posteriormente eles podem ser retomados, destacando-se que se trata da comunicação gráfica de uma relação funcional, tendo em vista que, no exemplo, a todo elemento do domínio (o intervalo $[2004, 2014]$) corresponde um único valor da área desmatada. Outra característica para ressaltar, nesse caso, é que a comunicação algébrica dessa relação funcional não é conhecida, sendo uma oportunidade de

desvincular a subordinação do conceito de função a sua comunicação como expressão algébrica.

À medida que os tipos de relações funcionais usualmente estudadas vão sendo inseridos, podem ser estabelecidas pontes entre comunicação como gráfico e comunicação algébrica, de forma que a construção dos gráficos segue procedimento conforme o tipo da relação funcional. Por exemplo, se f é uma função afim ($f(x) = ax + b, a \neq 0, x \in R$), então o seu gráfico é uma reta, logo para construí-lo, basta considerar no plano cartesiano dois pontos da forma $(x, f(x))$.

Função como definição

Comunicar o conceito de função como uma *definição* é indicar, em linguagem matemática precisa, critérios que possibilitem estabelecer se uma determinada relação, comunicada por qualquer uma das formas especificadas anteriormente, é ou não uma relação funcional. Como exemplo, podemos definir: *Uma função é uma relação entre dois conjuntos não vazios A e B, que a todo elemento de A, associa-se um único elemento de B.*

Dois critérios são fundantes na comunicação de função como uma definição, os quais são subjacentes a todas as formas de comunicar este conceito e dizem respeito ao caráter arbitrário e univalente de uma relação funcional. O caráter arbitrário comunica que os conjuntos A (domínio) e B (contradomínio) são quaisquer, isto é, não precisam ser numéricos, bem como a configuração da associação entre os elementos desses conjuntos não necessariamente deve obedecer a uma regra ou fórmula (expressão algébrica). Como exemplo, temos a relação funcional mencionada na comunicação de função como tabela, que associa a todo aluno de uma sala a sua nota em um teste.

O caráter univalente comunica que a *todo* elemento do domínio deve estar associado um *único* elemento do contradomínio, e foi explicitamente destacado nas várias formas de comunicar o conceito de função. Por exemplo, na comunicação por diagramas – Figura 4 –, o caráter univalente foi utilizado como critério para a identificação de relações que não eram funcionais.

Apesar da precisão da comunicação de função como definição, a sua natureza formal omite as noções de dependência, variação e regularidade presentes em várias formas de comunicar o conceito de função. Tanto que alguns estudos sugerem que sua apresentação

deve ser postergada no ensino, e que a sua introdução seja realizada conjuntamente com outras formas de comunicar o conceito de função (TABACH, NATCHIELI, 2015).

Para finalizar a conversa

Nesse artigo, o nosso objetivo foi sistematizar e analisar a variabilidade de formas de comunicar o conceito de função com suas especificidades e diversidade de configurações, conforme ilustramos na Figura 8.

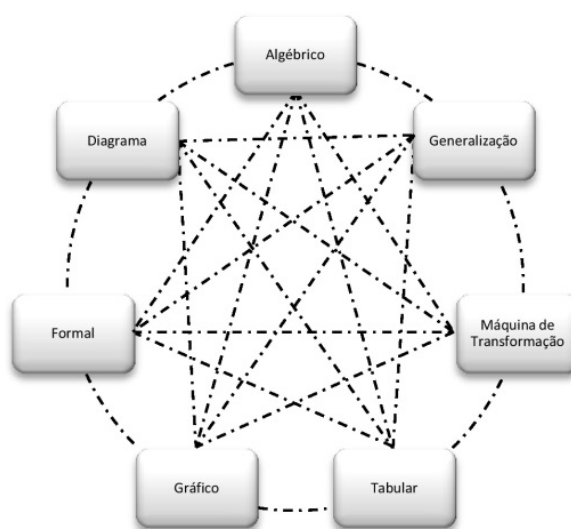


Figura 8 – Conceito de função
Fonte: elaborado pelos autores.

A caracterização do conceito de função como um conjunto de formas de comunicá-lo viabiliza o reconhecimento da perspectiva ampla e multifacetada de configurações comunicativas que podem ser veiculadas e produzidas no ensino do conceito de função, no transcorrer da Educação Básica. E isso independe do fato de que o tema função ainda não tenha sido explicitamente introduzido no ensino.

Cada uma das formas de comunicar o conceito de função revela aspectos singulares do conceito que são pertinentes e, às vezes, específicos para certas situações funcionais. Isso torna visível, como assinalamos na seção anterior, a importância do estabelecimento de relações/pontes (ilustradas como as linhas tracejadas na Figura 8) entre as diferentes configurações comunicativas que compõem este conceito, de modo a evitar que se tenha uma visão compartimentalizada dele, que pode ocorrer quando uma determinada (ou

determinadas) forma(s) de comunicação tem (têm) predominância no ensino (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013).

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais PCN – 3 e 4 ciclos - Matemática**. Brasília: MEC /SEF, 1998.148 p.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Coleção Explorando o Ensino – Matemática: Ensino Médio**. Brasília. Vol.3, 2004, 246 p.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, volume 2**, 2006, 135 p.

SANTOS, G. L. D. **Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função**. 2017. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. 2017.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C., Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo com professores. **UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educacion Matemática**. n. 48, p. 143 – 167, Diciembre 2016.

STEELE, M.; HILLEN, A. F.; SMITH, M. S. Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 16, I. 6, p. 451 – 483, 2013.

TABACH, M.; NACHLIELI, T. Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. **Educational Studies in Mathematics**, n. 90, p. 163 -187, 2015.

Recebido em: 13 de julho de 2016.

Aprovado em: 28 de março de 2017.