SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO E O TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN: UMA EXPERIÊNCIA EM UMA TURMA DE CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Eberson Paulo Trevisan[1]

Resumo

Este trabalho apresenta um relato de experiência, realizada em uma turma do curso de Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática, na disciplina de Cálculo de várias variáveis. Na experiência, buscou-se uma aproximação com o cotidiano de alguns conteúdos da matemática e da física via um trabalho experimental, envolvendo o chamado Teorema de Pappus-Guldin; e um trabalho computacional a partir da modelagem de área e volume de sólidos de revolução, com auxílio de *softwares* matemáticos. A parte computacional tinha como objetivo validar o Teorema de Pappus-Guldin. Os alunos seguiram um roteiro previamente definido em que foi possível coletar dados numéricos que puderam ser comparados, o que lhes permitiu chegar à conclusão da validade do teorema. Ganha destaque também o empenho dos alunos ao perceberem que podiam utilizar os elementos matemáticos teóricos, estudados na disciplina, para modelar e obter várias informações de objetos presentes em seu cotidiano.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Teorema de Pappus-Guldin. Sólidos de Revolução. Softwares.

SOLIDS OF REVOLUTION AND THE PAPPUS-GULDIN THEOREM: AN EXPERIMENT IN A CLASS OF MULTIVARIABLE CALCULUS

Abstract

This work consists of an experience report carried out in a class of the course of Natural Sciences and Mathematics in the discipline of Multivariable Calculus. In it we seek an approximation with the daily life of some contents of mathematics and physics via an experimental work involving the called Pappus-Guldin's Theorem and a computational work from the modeling of area and volume of solids of revolution, with the help of mathematical software. The computational part had as objective to validate the Pappus-Guldin's Theorem. The students followed a previously defined script in which it was possible to collect numerical data that could be compared which allowed them to reach the conclusion of the validity of the theorem. The students' commitment was also noticed when they realized that they could use the theoretical mathematical elements studied in the discipline to model and obtain various information of objects present in their daily life.

Keywords: Mathematics Teaching. Pappus-Guldin's theorem. Solids of Revolution. Software.

Introdução

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemática; Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT, campus universitário de Sinop, Mato Grosso, Brasil. E-mail: eberson76@gmail.com.

Ensinar matemática é uma tarefa complexa e que exige muita dedicação profissional por parte do professor, porque é uma atividade que vai além de apenas ensinar fórmulas e propriedades. Como destaca Dante (2009, p.18), "o maior desafio da educação contemporânea é um ensino que prepare o ser humano para a vida e a diversidade que nela se apresenta"; assim, não estando o ensino da matemática isento deste desafio, ele necessita sempre, neste contexto, buscar elementos para despertar o interesse dos estudantes para essa área.

Vemos como essencial que o professor busque caminhos que façam com que o aprendiz se identifique, cada vez mais, com essa ciência, a partir das atividades propostas em sala de aula. Um dos caminhos que tem ganhado destaque para que esse interesse ocorra é aproximar a matemática da realidade cotidiana, processo que pode se tornar ainda mais significativo quando articulado com elementos tecnológicos, como o computador, tão presente neste contexto contemporâneo.

Dessa forma, levamos em consideração o que destacam Borba e Penteado (2001) e Machado (2006) a respeito da presença dos computadores nos mais variados setores das atividades cotidianas, principalmente nos setores educacionais. Além disso, destaca-se também o potencial relacionado à motivação e à aprendizagem proporcionadas por estes, pois, conforme Almeida et al (2016, p. 31) destacam, um "aspecto importante para a aprendizagem em matemática e que pode motivar os estudantes diz respeito à incorporação do uso do computador nas aulas". Dessa forma, desponta-nos como fato que o uso do computador em sala de aula deve ganhar destaque na tarefa de aproximar a matemática do cotidiano dos alunos.

A tese de que o uso de tecnologias digitais pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem dos alunos vem se confirmando ao longo de várias pesquisas no campo educacional, como é exposto no relato de Coscarelli (1998, p. 40): "Explorar bem o imenso potencial das novas tecnologias nas situações de ensino-aprendizagem pode trazer contribuições tanto para os estudantes quanto para os professores". A autora destaca algumas das possíveis contribuições do uso de tecnologias em sala de aula para a aprendizagem:

> Esses recursos estimulam os estudantes a desenvolverem habilidades intelectuais; muitos estudantes mostram interesse em aprender e se concentram mais; as novas tecnologias estimulam a busca de mais informações sobre um assunto estudado; o uso de novas tecnologias promove cooperação entre estudantes. (COSCARELLI, 1998, p. 40)

O uso do computador em sala, durante as aulas de matemática, pode alterar até mesmo a forma como a concebemos, conforme destaca Borba (1999, p. 293): "É possível afirmar que a disponibilidade dessas novas mídias pode alterar o pensamento matemático". De maneira geral, essa ferramenta contribui para o aluno conjecturar e testar hipóteses e avançar no processo de aprendizagem. Além disso, como destacam Almeida et al (2016, p. 31):

> A dinamicidade de inúmeros *softwares* livres, hoje disponíveis no mercado, pode auxiliar alunos e professores na construção de gráficos e na observação da influência dos parâmetros, bem como na realização dos cálculos. Nesse sentido, a possibilidade de experimentar, de visualizar e de coordenar de forma dinâmica as representações algébricas, gráficas e tabulares são vantagens da interação de atividades de modelagem com as mídias informáticas.

Mesmo que os apontamentos da citação anterior sejam relativos ao contexto da modelagem matemática, a nosso ver, eles também se aplicam a outros contextos da utilização de *softwares* no ensino de matemática, porque possibilitam, de forma diferente da habitual, mais agilidade e mais flexibilidade ao aprendiz, proporcionando, assim, uma assimilação diferenciada do objeto estudado.

A partir do exposto, visando ao melhor envolvimento dos alunos nas atividades de aplicação de integrais na disciplina de Cálculo de várias variáveis, do curso de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso, *campus* universitário de Sinop, que, por suas particularidades, tem esta disciplina comum às habilitações em Física e Matemática, nos anos de 2014 e 2015, trabalhamos com uma atividade experimental. Tal atividade possibilita a abordagem de conceitos físicos envolvendo centroide, juntamente a um trabalho computacional a partir da modelagem de área e volume de sólidos de revolução com uso dos *softwares* matemáticos[2], visando validar o Teorema de Pappus-Guldin.

Desenvolvimento da atividade e metodologia utilizada

O chamado Teorema de Pappus-Guldin trata, na verdade, de dois teoremas úteis para calcular áreas e volumes de uma classe específica[3] de sólidos de revolução (RAUTENBERG, 2013). Esses teoremas teriam sido descobertos por Pappus de Alexandria, que viveu em torno do ano 300 D.C., considerado um dos grandes geômetras gregos existentes na história (EVES, 2004). Nos relatos históricos, não existe uma prova formal dos teoremas atribuídos a Pappus,

---

[2] Os alunos foram apresentados aos *softwares* Maxima e Winplot, mas eram livres para trabalhar com outros *softwares*.
[3] Os teoremas só são aplicáveis quando a curva geratriz não corta o eixo de rotação.

os quais foram retomados pelo matemático suíço Paul Guldin (1577-1642), por volta de 1600, por isso o nome de Teorema de Pappus-Guldin.

Na íntegra, os teoremas estabelecem que (GUIDORIZZI, 2001; RAUTEMBERG, 2013):

- *PRIMEIRO TEOREMA: Girando-se uma região R em torno de um eixo de seu plano, eixo este que não corte a região, o volume do sólido de revolução assim formado é igual ao produto da área da região R pelo comprimento da trajetória descrita pelo centroide da região.*
- *SEGUNDO TEOREMA: Girando-se uma curva C em torno de um eixo de seu plano, eixo este que não corte a curva, a área da superfície assim formada é igual ao produto do comprimento da curva C pelo comprimento da trajetória descrito pelo centroide da curva.*

Como vemos, os teoremas preocupam-se com a obtenção do volume e da área da superfície de sólidos de revolução, porém estes elementos são também passíveis de determinação via aplicação de integrais, objeto de estudo dos cursos de Cálculo. Os teoremas, por sua vez, trabalham em torno do movimento descrito pelo centroide durante uma rotação. O centroide, no entanto, é um elemento significativo em atividades relacionadas a física, o que permite inferir discussões relativas ao assunto.

Assim, pensar uma atividade que explore tais teoremas permite uma aproximação entre elementos matemáticos e físicos, o que se torna importante pensando na particularidade de trabalharmos com alunos das habilitações em Física e Matemática na disciplina em que as atividades foram aplicadas. Este também foi um dos motivos que nos levaram a escolha, elaboração e aplicação da proposta de trabalho a partir destes teoremas, em que objetivamos, então, além de aproximar parte da matemática trabalhada na disciplina com elementos cotidianos dos alunos a partir da exploração de recursos computacionais, possibilitar também a aproximação de elementos físicos e matemáticos para as discussões nas aulas.

Para alcançar nossos objetivos, foram necessários o planejamento e a definição clara das atividades a serem realizadas pelos acadêmicos. Assim, dividimos o trabalho a ser realizado em duas partes: experimental e computacional. Os alunos, em pares, receberam um roteiro contendo a descrição de cada parte. O roteiro da parte experimental era composto por seis itens, os quais basicamente solicitavam que os alunos:

- Escolhessem um objeto que pudesse ser descrito como um sólido de revolução e representassem a região plana geradora do sólido de revolução (região A) em um papel quadriculado e obtivessem a área por estimativa.

- Moldassem a lateral desse objeto com um arame (curva C) e, a partir desse molde, estabelecessem o comprimento da curva C.
- Localizassem experimentalmente o centro de massa da região A e o centro de massa da curva C.
- Aplicassem o Teorema de Pappus-Guldin para obter o volume do sólido de revolução.
- Aplicassem o Teorema de Pappus-Guldin para obter a área da superfície do sólido de revolução.
- Construíssem uma tabela resumo com todos os dados obtidos nesta fase.

Na parte computacional, o roteiro continha quatro itens, que solicitavam basicamente que os alunos:

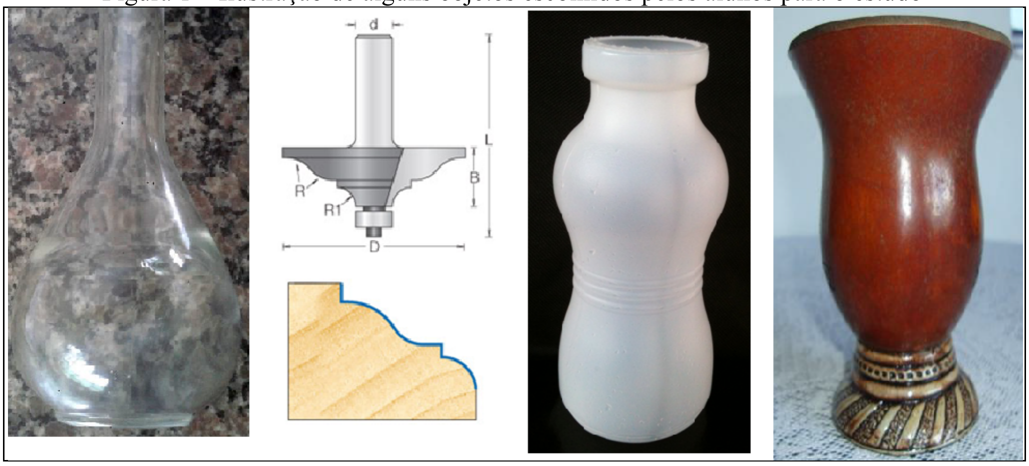
- Descrevessem a curva C por funções, fazendo uso de um *software* matemático (indicamos e apresentamos os comandos do Maxima), e descrevessem a área dessa região usando integrais duplas com as funções obtidas, podendo utilizar o *software* para realizar os cálculos.
- Calculassem o centro de massa por integração (poderiam usar algum *software*).
- Representassem o sólido de revolução a partir das funções em um *software* de plotagem (sólido de revolução a partir da rotação da região plana – indicamos o uso do Winplot para tal).
- Calculassem o volume do sólido usando integração e comparassem esses dados obtidos com os obtidos na fase anterior.

Para finalizar o trabalho, cada dupla preparou uma pequena apresentação oral com os resultados obtidos, além de uma versão impressa, mostrando os procedimentos utilizados para seguir os roteiros e a comparação dos dados obtidos via métodos experimental e computacional.

Discussões e conclusões

Na parte experimental, os alunos eram livres para escolher os objetos a serem trabalhados, desde que se caracterizassem como sólidos de revolução e satisfizessem as condições dos teoremas de Pappus-Guldin. Essa liberdade proporcionou aos estudantes a escolha de diferentes objetos próximos ao seu cotidiano, como garrafas, vasos, pote de iogurte, uma fresa para moldura de madeira (objeto de trabalho de um aluno, que não tinha o objeto propriamente dito, pois ficava instalado em uma máquina, mas tinha a representação em um manual e sabia se tratar de um sólido de revolução). Entre outros objetos escolhidos, a Figura 1 ilustra alguns. Ao todo, foram escolhidos pelos alunos 10 objetos diferentes. Essa diversidade proporcionou aos trabalhos diferentes níveis de complexidade, tanto na parte experimental quanto na computacional.

Figura 1 – Ilustração de alguns objetos escolhidos pelos alunos para o estudo



Fonte: Trabalho escrito entregue pelos alunos.

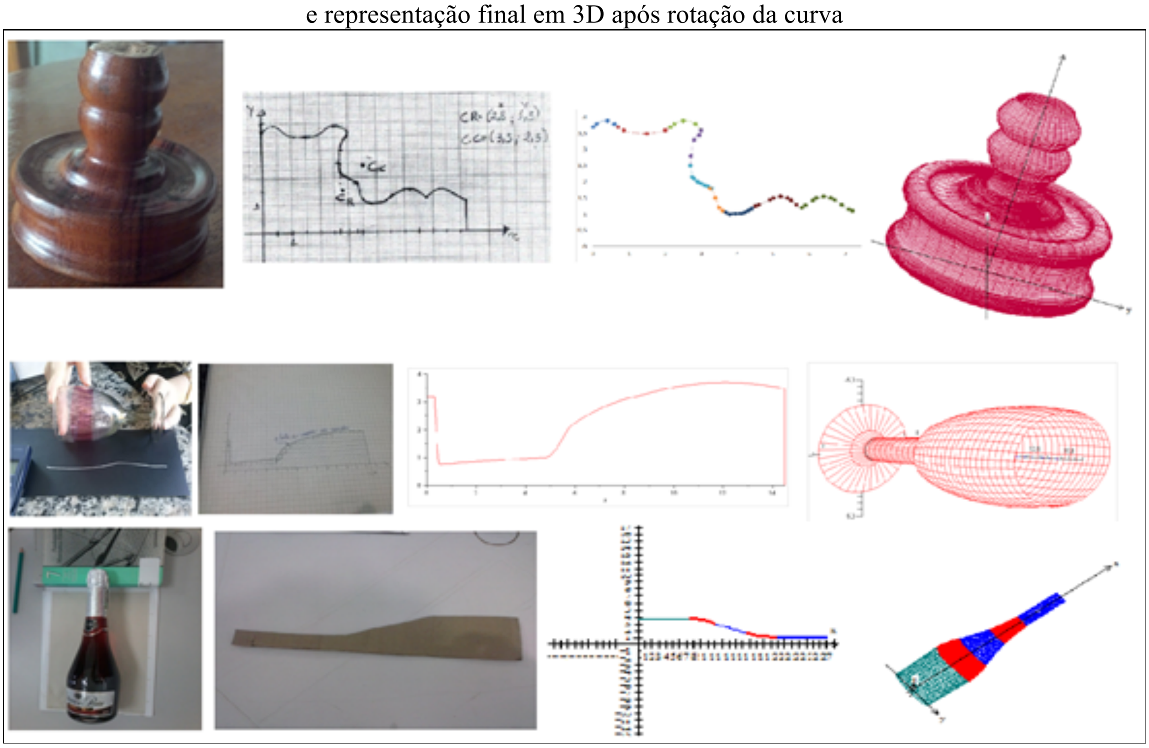
Na parte experimental, também foi deixada de forma livre a utilização do método que os alunos achassem melhor para realizar cada passo solicitado. Isso proporcionou discussões entre eles sobre as formas de trabalho empregadas. Métodos diferentes foram utilizados para estabelecer o centro de massa do arame e da região A. Para o arame, por exemplo, grupos se utilizaram de uma régua, tentando equilibrá-lo em pontos diferentes; outros preferiram utilizar um barbante, pendurando o arame por pontos diferentes. Para investigar o centro de massa da região plana, uma dupla também empregou a ideia do barbante, porém a maioria tentou achar o ponto de equilíbrio com o dedo e depois, especificando a região, com uso de um lápis ou caneta.

Para obtenção da área de forma experimental, muitos recorreram a uma aproximação a partir da contagem das unidades de área do papel quadriculado, em que também já identificavam o centro de massa da região para posterior aplicação do teorema Pappus-Guldin. Com a representação da região sobre o papel quadriculado, utilizando-se de um sistema de coordenadas retangulares, ficou relativamente fácil identificar alguns pontos necessários na próxima etapa, na parte computacional, que consistia em determinar um conjunto de funções que descrevesse a curva C.

Na parte computacional, especialmente para determinar as funções que descreviam a curva C, foi necessária uma intervenção maior por parte do professor como, por exemplo, para apresentar a ideia de utilizar-se da solução de sistemas lineares a partir de pontos retirados da parte experimental para obter funções polinomiais, cujo grau poderia ser definido a partir da particularidade da curva que se desejava representar. Como seria inviável utilizar-se de apenas uma função para representar a curva, havia a necessidade de que as curvas se encontrassem da forma mais perfeita possível, sem formarem bicos ou saltos; assim quando esta união não se dava de forma harmoniosa, foi sugerido que, na obtenção das funções, obrigassem que a primeira derivada destas coincidisse. Isso resolveu o problema para os que optaram pela aplicação.

Para representar o sólido no Winplot, *software* utilizado por 9 dos 10 grupos que realizaram a atividade, de maneira direta, foi sugerido pelo professor o uso de matrizes de rotação nas funções previamente determinadas. Porém, para tal procedimento, tornava-se necessária a parametrização destas funções, o que levou à possibilidade de discutir dois assuntos não diretamente relacionados com a disciplina. Exemplos da representação dada pelos alunos em diferentes estágios das atividades são apresentados na Figura 2.

Figura 2 – Exemplo de sólidos escolhidos, representação no papel quadriculado, plotagem da curva no *software* e representação final em 3D após rotação da curva



Fonte: Material entregue pelos alunos.

O trabalho demandado acabou por exigir dos alunos, em cada etapa do projeto, um trabalho de modelagem que, por sua vez, “exige um aluno ativo para analisar, explicar um problema e tomar decisões sobre o mesmo, coletar informações, formular hipóteses e testá-las, obter modelos e validá-los (ou não) para determinada situação” (GARCIA, 2012, p. 18). Este trabalho torna-se muito importante, pois passa o aluno para uma posição ativa frente à aprendizagem.

Essa situação de aprendizagem é ainda mais favorecida pela relação que a atividade proporciona com elementos reais do dia a dia dos alunos, pois, concordando com Piva et al (2010, p. 141), o que se observa é que “a aplicação de um conteúdo matemático numa situação real apresenta maior credibilidade para os alunos, se puder ser validada confrontando o resultado obtido através do cálculo com a medida real”. Esta possibilidade de confronto foi explorada pelos alunos em algumas situações, enchendo com água os recipientes modelados e confrontando com os valores obtidos, tanto na parte experimental, via aplicação do teorema de Pappus-Guldin, quanto na computacional, com os valores obtidos via cálculo das integrais realizadas no *software*.

Estes elementos foram destacados ao longo do trabalho e na apresentação, em que o grupo de alunos pode significar alguns elementos matemáticos na representação de objetos do seu cotidiano e usar a matemática para investigar particularidades destes, como área e volume. Também na socialização, após apresentarem as metodologias utilizadas para chegar aos resultados, as duplas apresentaram um quadro (Figura 3) comparando os resultados obtidos na parte experimental e na computacional.

Figura 3 – Tabela comparativa entre a parte experimental e a computacional de uma dupla de alunos

	Dados Experimentais	**Dados Computacionais**	**Variação percentual**
Comprimento da curva	17.10 cm	17.60 cm	2.93%
Centro de massa da curva	(6.30 ; 2.40)	(6.31 ; 2.44)	0.16% ; 1.67%
Área da região	35,62 cm²	35.41 cm²	0.59%
Centro de massa da região	(9.15 ; 1.49) cm	(9.02 ; 1.51)	1.44% ; 1.34%
Volume do sólido de revolução	333.47 cm³	335.23 cm³	0.53%
Área da superfície do sólido de revolução	257.86 cm²	261.24 cm²	1.31%

Fonte: Trabalho entregue pelos alunos.

A parte computacional foi trabalhada utilizando em boa parte o instrumental formal das integrais estudadas (teoremas e definições) em sala de aula, chegando-se a resultados próximos dos obtidos experimentalmente com a utilização do teorema de Pappus-Guldin, o que, de certo modo, possibilitou uma validação para os teoremas. As diferenças obtidas levaram os alunos a discutir o que poderia ter influenciado tal resultado, ocasião em que levantaram várias possibilidades, tais como imprecisão nas medidas, causada pelo material utilizado que não era adequado para realizar as medições; arredondamentos e outros fatores relatados.

Esta atividade proporcionou aos alunos um momento para discussão de vários conceitos de outras áreas e da própria matemática, como centro de massa, área, volume e comprimento, função, matriz de rotação, parametrização, entre outros. Pensando que o curso se trata do ensino de ciências e matemática, e que a disciplina é comum às habilitações em Física e Matemática, cremos que a atividade realizada contribuiu para a formação dos acadêmicos, possibilitando realmente aproximar os elementos teóricos discutidos com os elementos cotidianos.

Referências

ALMEIDA, L. W. et al. **Modelagem matemática na educação básica.** 1ª ed. São Paulo: Contexto, 2016.

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 285-296.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** 2ª ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001.

COSCARELLI, C. V. O uso da informática como instrumento de ensino-aprendizagem. **Revista Presença Pedagógica**. Belo Horizonte/MG. v. 04, nº 20, mar./abr. p. 37-45, 1998.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** teoria e prática. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

GARCIA, V. C. V. Formação de Professores de Matemática e Mudanças Curriculares na escola. In: BÚRIGO, Elisabete Zardo [et al] (org.). **A Matemática na escola:** novos conteúdos, novas abordagens**.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012. p. 11-24.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo.** v. 01. 5ª ed. Rio de Janeiro: Editora S.A, Livros técnicos e científicos, 2001.

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação:** alegorias, tecnologias e temas afins**.** 5ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 2006.

PIVA, C. *et al.* Cálculo do volume de um sólido de revolução: uma atividade usando o software Graph e WxMaxima. In: 33º CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL. **Anais do CNMAC v. 3**. Águas de Lindóia/SP, de 20 a 23 de setembro de 2010, Publicação da SBMAC, p. 137-143, 2010.

RAUTENBERG, R. R. **Os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução**. 2013, (57 f.). Dissertação (Mestrado em Matemática). Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Recebido em: 13 de junho de 2016.

Aprovado em: 08 de junho de 2017.