Relato de Experiência

A Prática como Componente Curricular em uma Disciplina de Análise Real

Cristina Cerri[1]
David Pires Dias[2]

Resumo
O objetivo principal deste artigo é apresentar relatos de experiências sobre a prática como componente curricular introduzida na disciplina *Introdução à Análise* do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP (IME/USP), bem como algumas reflexões sobre o ensino de Análise Real nos cursos de formação inicial de professores. Este texto apresenta também um breve histórico sobre a introdução e dissociação das disciplinas de Análise e de Cálculo Diferencial e Integral em cursos de Matemática, em particular nos cursos do mesmo Instituto. Os resultados apresentados são frutos das experiências dos autores como coordenadores do curso de Licenciatura e também como ministrantes de tal disciplina.

Palavras-chave: Prática como Componente Curricular. Ensino de Análise Real. Formação Inicial de Professor de Matemática.

Introdução

A resolução CNE2/2002 estabelece que os cursos de licenciatura devam garantir quatro componentes comuns: prática como componente curricular; estágio curricular supervisionado; conteúdos curriculares de natureza científico-cultural e atividades acadêmico-científico-culturais. Com a finalidade de adequar seus cursos de formação de professores às novas legislações, a Universidade de São Paulo (USP), estabeleceu, em 2004, o Programa de Formação de Professores da USP (PFPUSP), que trata da organização das disciplinas e atividades curriculares das Licenciaturas da USP.

Em 2006 o currículo do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da USP foi reformulado para atender ao PFPUSP e, consequentemente, às devidas legislações, estando previsto o cumprimento obrigatório de pelo menos 420 horas de Práticas como Componente Curricular (PCoC), das quais 180

[1]Doutora em Ciências pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP (IME-USP); Docente do IME-USP, São Paulo, SP – Brasil. cerri@ime.usp.br
Doutor em Ciências pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP (IME-USP); Docente do IME-USP, São Paulo, SP – Brasil. dpdias@ime.usp.br

horas estão inseridas, na forma de *créditos trabalho*, em seis disciplinas obrigatórias do Instituto, sendo uma delas a disciplina *Introdução à Análise*. Para completar as horas restantes de PCoC o licenciando deve cursar pelo menos um bloco de disciplinas optativas eletivas de aprofundamento, a disciplina Projetos de Estágio e disciplinas oferecidas pela Faculdade de Educação da Universidade.

O projeto pedagógico do curso prevê que conteúdos específicos e práticos sejam relacionados e articulados, possibilitando que o futuro professor tenha, ao longo do curso, uma visão integrada da profissão, contribuindo assim para uma formação sólida.

O primeiro oferecimento da disciplina *Introdução a Análise* com PCoC foi em 2008, e a partir de então abriu-se a possibilidade de uma reflexão sobre os temas presentes na disciplina e a prática docente, bem como a importância de tais conteúdos na formação do professor. Possibilitou-se também um aprofundamento de discussões sobre o ensino de certos conteúdos na Educação Básica, sua adequação e pertinência. Pretende-se, neste artigo, apresentar algumas reflexões sobre a importância da Análise Real e a PCoC no curso de Licenciatura em Matemática, com base na experiência acumulada dos autores.

O ensino de Análise: um panorama do desenvolvimento da disciplina

Os conceitos fundamentais, os métodos e as técnicas que hoje fazem parte das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral foram desenvolvidos, segundo Ávila (2002), em grande parte no século XVII e até o início do século XIX suas principais ideias ainda não tinham uma clara fundamentação. As várias críticas a essa postura mais intuitiva levaram matemáticos à procura de um tratamento rigoroso dos conceitos do Cálculo e, em meados do século XVIII, problemas envolvendo séries infinitas dão impulso ao desenvolvimento da procurada fundamentação.

> No século XIX, a imanente necessidade de consolidação e o desejo de maior segurança na extensão de conhecimento mais avançados que foi desencadeado pela Revolução Francesa, inevitavelmente reconduziu a uma revisão dos fundamentos da nova matemática, em particular do Cálculo Diferencial e Integral e o conceito subjacente de limite. (COURANT e ROBBINS, 2000, p. s/n.)

Carl F. Gauss (1777-1855), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831-1916) e George Cantor (1845-1918) contribuíram de forma decisiva para a formalização do Cálculo (EVES, 2002). Pode-se dizer que a partir da contribuição destes surge a grande área da matemática que hoje conhecemos como Análise.

Dada a sua importância e aplicações, os conceitos fundamentais do Cálculo, devidamente formalizados, passaram a ser tratados e ensinados em vários cursos na Europa e universidades brasileiras, seguindo a tendência europeia, também incorporaram disciplinas de *Análise Matemática*, que apresentavam os conceitos e resultados próprios do Cálculo com bastante rigor e formalismo. Segundo Ávila (2002) até 1960 o ensino de Cálculo seguia o modelo dos *Cours d'Analyse* das escolas francesas.

Ao traçar uma trajetória da disciplina de Análise nos cursos de Licenciatura em Matemática da USP e da UNESP-Rio Claro, Baroni e Otero-Garcia (2011) constatam que antes da reforma universitária em 1968 estes cursos não tinham disciplinas separadas de Cálculo e Análise. É na década de 1970 que se cristaliza a separação dessas disciplinas. Contudo, nas disciplinas de Cálculo, os conteúdos ainda são apresentados como nos antigos cursos de Análise, de maneira formal e rigorosa. As mudanças foram graduais e as disciplinas iniciais de Cálculo passam a dar mais ênfase às técnicas de derivação e integração, principalmente em cursos de outras carreiras, que não matemática. A partir de meados da década de 1990 há um crescimento na oferta de cursos superiores e, consequentemente, de Licenciatura. Disciplinas de Análise, bem como as de Cálculo, aparecem nas estruturas curriculares dos cursos de formação de professores, uma vez que as Diretrizes Curriculares Nacionais indicavam a necessidade de se incluir conteúdos de Fundamentos de Análise nos cursos de Licenciatura, o que ainda é exigido (Resolução CNE 2/2002). Segundo Baroni e Otero-Garcia (2011) houve pouca alteração nos conteúdos trabalhados nas disciplinas de Análise desde a década de 1970 e, como no passado, a maioria dos alunos apresenta grandes dificuldades em assimilar os conceitos tratados.

A separação entre Cálculo e Análise

Com a criação do IME/USP, em 1970, as estruturas curriculares do Bacharelado e da Licenciatura em Matemática já apresentam disciplinas distintas de Cálculo e Análise. Observa-se, na década seguinte, uma mudança na abordagem nos cursos de Cálculo: aos poucos a apresentação dos conteúdos vai se tornando menos rigorosa, valorizando-se a intuição e prática. Nos cursos de Matemática do IME esta mudança de enfoque fez com que as disciplinas de Análise passassem a ter também o objetivo de introduzir o formalismo e o rigor próprios da área. Já na década de 1990, o curso de Licenciatura do IME sofreu alterações significativas em seu projeto pedagógico e consequentemente em sua estrutura curricular, fruto de discussões sobre a formação de professores ocorridas na USP. Na seriação de Cálculo-Análise percebemos claramente a tendência de fazer apresentações mais intuitivas nas disciplinas de Cálculo, deixando para a disciplina de Análise o tratamento formal dos conteúdos. Este não é um fenômeno isolado, que é explicitado por Ávila (2006) no prefácio de seu livro.

> Numa primeira disciplina de Cálculo, as apresentações costumam ser feitas de maneira intuitiva e informal, com pouca ou nenhuma demonstração rigorosa. Esse procedimento é seguido em parte por razões didática; mas também por razões ligadas a própria natureza dos temas tratados, cujo desenvolvimento histórico ocorreu primeiro de maneira intuitiva e informal, desde o século XVII até aproximadamente 1820. a partir de então, os avanços da teoria exigiam conceituações precisas das ideias de função, continuidade, derivada, convergência, integral, etc. É precisamente uma apresentação logicamente bem organizada de todos esses tópicos do Cálculo que constitui uma primeira disciplina de Análise. (ÁVILA, 2006, p. 1)

Na estrutura curricular atual do curso, reformulada em 2006, além da inclusão da PCoC, a seriação Cálculo-Análise não sofreu grandes modificações e compõe a grande área de Análise Matemática, descrita no projeto pedagógico do curso como a seguir.

> **Análise Matemática –** Na abordagem do Cálculo Diferencial e Integral, a ênfase é a atribuição de significados aos conceitos e propriedades, salientando os aspectos geométricos envolvidos e problemas geradores, de modo a favorecer que os alunos e alunas se tornem capazes de resolver problemas de forma reflexiva e não automática. Posteriormente é importante que sejam expostos a um tratamento mais formal e rigoroso dos conteúdos por meio de uma disciplina de Introdução à Análise Matemática. Essa é uma área em que se pode propiciar ao licenciando a visão dos processos históricos de busca de rigor em Matemática, além de ser rica em interfaces com conteúdos matemáticos trabalhados na escola básica, notadamente as noções fundamentais delicadas envolvendo os números reais e o infinito. Possibilitamos ainda, como enriquecimento curricular, introduções aos estudos de Análise Complexa e das Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações.
> (https://www.ime.usp.br/images/arquivos/grad/mat/licenciatura/projeto_pedagogico_lic2013.pdf, acessado em 11 de setembro de 2015)

A importância da área na formação do futuro professor fica explicitada. Assim como no modelo multidimensional descrito em Ball et alli (2008), busca-se integrar o conhecimento amplo e profundo do conteúdo com os conhecimentos especializados necessários ao professor, visando uma articulação efetiva entre os saberes acadêmicos e aqueles que emergem da prática da sala de aula da escola básica. Por exemplo, sabe-se que a questão da incomensurabilidade de segmentos foi tratada pelos antigos matemáticos gregos e que algumas das ideias que constituem as gêneses dos conceitos de limite e de integral contemporâneos também estavam presentes quando se utilizava o princípio da exaustão para cálculo de área. Contudo, mais de vinte séculos separam esses estudos da construção formal do conjunto dos números reais e da definição de limite e integral, que hoje é ensinada. O conhecimento sobre as dificuldades, os obstáculos, os problemas geradores e as soluções encontradas pela humanidade ao longo da história pode contribuir com o fortalecimento da segurança do professor em relação aos conteúdos tratados em sala de aula.

Prática como Componente Curricular e a disciplina de Análise

Na disciplina *Introdução à Análise*, como em outras, deve-se dar a devida importância à construção do conhecimento da área. Nesse aspecto, Courant e Robbins (2000) na introdução de seu livro *O que é a Matemática?* ressaltam que

> Uma grave ameaça à própria vida da Ciência está implícita na asserção de que a matemática é nada mais do que um sistema de conclusões extraídas de definições e postulados que devem ser considerados, mas que sob outros aspectos podem ser criados pela livre vontade dos matemáticos. (COURANT e ROBBINS, 2000, p. s.n)

É nesta disciplina que são discutidos o problema da incomensurabilidade de segmentos (ou, de forma mais geral, grandezas) e a necessidade de ampliação do conjunto de números racionais. A construção dos números reais pode ser abordada de diversas formas, sendo mais importante discutir a completude e suas consequências. O conceito de limite, tanto de sequências e séries numéricas como de funções, é tratado com mais profundidade, devendo-se priorizar a relação com a completude dos reais.

Conceitos e tópicos tratados nesta disciplina estão presentes na Matemática trabalhada na Educação Básica. A noção de limite, por exemplo, está no centro da discussão das representações decimais de números racionais, como também está presente quando se trata da área do círculo. Os números irracionais e suas representações são assuntos introduzidos no final do Ensino Fundamental. O Teorema de Tales e outros resultados em Geometria são assuntos importantes e tratam de razão entre comprimentos de segmentos, que está relacionada com comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos. No Ensino Médio sequências numéricas são abordadas, assim como a soma infinita de progressões geométricas.

Os licenciandos, durante a disciplina, são provocados a fazer reflexões sobre o ensino e aprendizagem desses e de outros assuntos. São propostos, durante o semestre, de dois a três trabalhos por grupo de alunos, que mesclam entre trabalhos escritos, apresentações orais ou na forma de pôster. Cada trabalho tem como principais objetivos destacar a articulação entre o conhecimento de conteúdo específico, adquirido no curso, e os conhecimentos profissionais, relacionados com a prática de sala de aula, considerando a diversidade e a complexidade dos conhecimentos necessários para ensino, como apontam Ball et alli (2008). Propõe-se que os alunos discutam as dificuldades e as formas de abordagem dos assuntos, bem como façam uma análise crítica de como tais temas são tratados em livros e materiais didáticos.

Um tema recorrente, por exemplo, é o do conjunto dos números reais com o objetivo principal de refletir sobre como estes são introduzidos e tratados na Educação Básica. Para orientar e subsidiar a discussão e os trabalhos algumas perguntas são colocadas: *Por que e para que ensinar números irracionais ou reais? Qual a melhor forma de introduzir números irracionais no Ensino Fundamental ou mesmo no Médio? Como tratar a representação decimal dos números racionais e irracionais? Como justificar que certos números não são racionais para estudantes da Educação Básica?* Disponibilizam-se ainda trechos de livros e artigos sobre o tema, como, por exemplo, Caraça (1998), Niven (1984), **Courant e Robins (2000),** bem como artigos da Revista do Professor de Matemática, como Carneiro (2003), Domingues (2003), Lima (1991), dentre outros.

Outro tema que merece destaque dentre os propostos em trabalhos de PCoC é o de sequências numéricas. O principal objetivo é refletir e discutir como são introduzidas e tratadas as sequências numéricas nos ensinos fundamental e médio, como vem sendo desenvolvido o ensino desses temas e apresentar propostas de tratamento do assunto em sala de aula. Simultaneamente, discutem-se na disciplina limites e propriedades de sequências e séries numéricas. Novamente, durante a confecção do trabalho surgem inúmeras questões como: *Por que e para que tratar de sequências numéricas na Educação Básica? Por que as progressões aritméticas e geométricas são exemplos importantes e devem ser abordados? Quais outros tipos de sequências (Fibonacci, frações continuadas) poderiam ser tratados e de que forma? Por que e como abordar a soma infinita de P.G. no Ensino Médio, já que este tema envolve a ideia de limite de sequência (que muitas vezes não aparece nessa etapa da vida escolar)? Como relacionar a soma infinita da P.G. com a representação decimal dos números racionais?* Também são indicados para leitura trechos dos livros citados anteriormente, bem como artigos, como, por exemplo, Lima (1989), Silva (1984), Carvalho (1990), Ávila (1999).

No curso do IME são oferecidas anualmente três turmas da disciplina *Introdução a Análise*, sendo uma no período diurno e duas no período noturno, atendendo em média 150 matriculados por ano. Os autores ministraram a disciplina em várias oportunidades, antes e depois da introdução da PCoC, e puderam observar a importância dessa componente para a formação dos estudantes.

Na opinião dos autores, com esta prática, os alunos se apropriam melhor dos temas abordados na disciplina, já que percebem sua relevância e o porquê destes estarem presentes num curso de Licenciatura, isto é, sua relação com a Matemática ensinada nas escolas. Um exemplo disso está no fato de que em alguns trabalhos os estudantes apresentaram propostas de atividades voltadas para sala de aula da Educação Básica, que versavam sobre representações decimais dos números reais, números irracionais especiais, sequências de Fibonacci e número de ouro, frações contínuas dentre outros. Além disso, por meio de relatos orais, durante a apresentação dos trabalhos da disciplina, alunos externaram a percepção do quanto é mais simples justificar que 0,333... é uma representação de 1/3 do que convencer que 1 pode ser representado na forma de decimal infinita 0,999… , e também que é intuitivo que os valores da sequência de números da forma 1/n se aproximam de zero, quando n aumenta, mas está longe de ser intuitivo que a sequência dos números da forma $(1+1/n)^n$ é convergente para um número irracional, quando n vai para infinito.

Considerações finais

A reflexão de certos temas tratados no ensino superior e sua relação com temas tratados na escola básica tem vários objetivos e, talvez, o mais evidente seja o de preparar melhor o futuro professor para sua prática docente, discutindo a necessidade ou pertinência do tratamento de determinado conteúdo. Contudo, a discussão sobre as dificuldades e os obstáculos para o ensino e a aprendizagem de certos conceitos torna o próprio conceito mais claro para o professor em formação.

Com a PCoC o licenciando tem a oportunidade de refletir sobre o ensino de certos temas, que, por sua natureza, merecem uma abordagem cuidadosa e também sobre como tais assuntos aparecem em textos didáticos, o que contribui para a formação de um professor crítico e autônomo. Por exemplo, alunos podem constatar que abordagens de números irracionais, que envolvem apenas experimentação por meio de medições ou uso de calculadora, podem conduzir a uma ideia incorreta, já que não é possível dessa forma afirmar que um número é irracional.

A introdução da Prática como Componente Curricular na disciplina *Introdução à Análise* possibilita discutir o ensino e a aprendizagem de temas delicados, como, por exemplo, números irracionais e limite, o que contribui para a compreensão dos conceitos tratados na disciplina, bem como para dar significado a tais assuntos na formação do professor de Matemática.

Referências

ÁVILA, G.. O Ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 33, p. 83-95, 2002.

ÁVILA, G.. Os Paradoxos de Zenão. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 2, n. 39, p. 9-16, 1999.

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G.. Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special?. **Journal of Teacher Education,** Washington D.C., v.59, p. 389-407, 2008.

BARONI, R. L. S e OTERO-GARCIA, S. C.. Uma constatação e várias questões sóbre o ensino de análise. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, 2011, Recife. **Anais...**Recife, 2011.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática Bacharelado e Licenciatura**, Brasília: MEC/SEF, 2001 (PARECER CNE/CES 1.302/2001).

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior.** Brasília: MEC/SEF, 2002. (RESOLUÇÃO CNP/CP 2 2002).

CARAÇA, B.J.. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARNEIRO J. P. Q.. As dízimas periódicas e a calculadora. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, n.52, p. 3-7, 2003.

CARVALHO, J. P.. Um problema de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, v. 17, p. 4-9, 1990.

COURANT, R.; ROBBINS, H.. **O que é Matemática?** Trad.: Adalberto da S. Brito, Revisão Técnica: João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTD, 2000.

DIAS, J. R.. **Dízimas Periódicas... e a Calculadoras**. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, n.14, p. 37-39, 1989.

DOMINGUES, H. H.. O pequeno teorema de Fermat e as dízimas periódicas, **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 52, p. 8-16, 2003.

EVES, H.. **Introdução à História da Matemática**. Trad.: Hygino H. Rodrigues. Campinas: UNICAMP, 1995.

LIMA, E. B., & DIAS, A. L. M.. A Análise Matemática no Ensino Universitário Brasileiro: a Contribuição de Omar Catunda, **Bolema**, Rio Claro,, v. 23, n. 35, p. 453-476, 2010.

LIMA, E. L.. O que significa a igualdade 1/9 = 0,111...?. In: **Meu Professor de Matemática e outras histórias**, Rio de Janeiro: SBM, 1991. p. 158-162.

LIMA E. L.. Uma construção geométrica e a progressão geométrica, **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, v. 14, 1989.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? **Zetetiké,** Campinas, n. 23, p.11-42, 2005.

NIVEN, I. **Números racionais e irracionais**, Trad.: Renate Watanabe, Rio de Janeiro: SBM, 1984.

SILVA, Z. C.. A raiz n-ésima pelo Método das Aproximações Sucessivas. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, v. 4, p. 25-27, 1984.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, **Programa de Formação de Professores da USP**. São Paulo, 2004.