Atividade para Sala de Aula

# Isometrias, Caleidoscópios e Tecnologia em Aulas de Desenho Geométrico do Ensino Superior

*Bruno Sérgio de Andrade*[1]
*Hévilla Nobre Cézar*[2]
*Eliane Matesco Cristovão*[3]

**Resumo**
Este texto apresenta uma sequência de atividades sobre isometrias e relata seu processo de desenvolvimento, no contexto das aulas de Desenho Geométrico (DG), para alunos dos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI). O objetivo foi propiciar um ambiente de exploração com tecnologias, e investigar se esta experiência com o *software* GeoGebra (GGb) motivaria os alunos a utilizarem este recurso na resolução de problemas típicos da disciplina. Constatou-se que a utilização do GGb durante as aulas de DG propiciou uma visão dinâmica, gerando instigantes discussões, além de aguçar a curiosidade e criatividade dos alunos. Embora os alunos não tenham incorporado a utilização do *software* como recurso para buscar a solução dos problemas propostos no livro adotado, as discussões geradas, no momento em que entraram em contato com resoluções feitas no GGb pela professora, deixou-os motivados com a possibilidade de utilizá-lo.

**Palavras-chave:** Geogebra. Isometrias. Desenho Geométrico. Caleidoscópio. Visualização.

## Introdução

Interessada em elaborar uma sequência de atividades apoiada no uso de recursos tecnológicos para o estudo de isometrias, nas aulas de DG[4], a terceira autora procurou a parceria dos demais autores por estarem envolvidos com o projeto de pesquisa intitulado: O Uso do Software GeoGebra no Ensino e Aprendizagem de Geometria Euclidiana. O referido projeto é realizado no âmbito do programa PET Licenciaturas em Ciências Exatas, cujo objetivo era a construção de um material de apoio com atividades exemplificadas de Geometria Euclidiana Plana no ambiente do GGb.

Nenhuma das atividades confeccionadas no âmbito do projeto havia sido desenvolvida em sala de aula. Assim, a parceria com a terceira autora configurou-se em uma

[1]Licenciando, Universidade Federal de Itajubá, MG, Brasil, bruno-sergio-andrade@hotmail.com
[2]Mestre, Universidade Federal de Itajubá, MG, Brasil, hevilla@unifei.edu.br
[3]Doutora, Universidade Federal de Itajubá, MG, Brasil, limatesco@unifei.edu.br
[4]Aulas ministradas para alunos dos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática na Universidade Federal de Itajubá.

oportunidade de realizar uma experiência que pudesse mostrar os percalços, dificuldades e potencialidades de uma proposta para o ensino de Desenho Geométrico.

Lorenzato (1995, p. 5) enfatiza que "talvez um dos maiores méritos da geometria seja o fato de exigir do aluno uma maneira especifica de raciocinar: isso quer dizer que ser bom conhecedor da Aritmética ou de Álgebra não é o suficiente para resolver problemas de Geometria". Dessa forma, é importante encontrar métodos que auxiliem no processo de ensino e aprendizagem de Geometria ou Desenho Geométrico, principalmente para aqueles que não trazem consigo a visão apontada pelo autor. Motivados pelas ideias de Lorenzato e pelas potencialidades já conhecidas do GGb, os três autores elaboraram a sequência apresentada a seguir. Para a criação da atividade inicial, levou-se em conta a ludicidade, a factibilidade e sua potencialidade de motivar os alunos a desenvolverem sua criatividade.

Inicialmente, surgiu a ideia de apenas criar imagens de caleidoscópios, como retratos, mas aproveitando a dinamicidade do *software*, decidimos explicar passo a passo como os alunos fariam também para movimentá-lo. Esperava-se que eles se sentissem empolgados ao construírem um caleidoscópio móvel, vivenciando o prazer em aprender por meio dessa atividade. Somente depois desta etapa, eles passaram a estudar os conceitos propostos pelo livro texto, utilizando os recursos de visualização do *software* para analisar diversas questões que foram adaptadas para essa finalidade. As questões trabalhadas, após esta construção, exploravam os conceitos de isometria de reflexão, rotação e translação, finalizando com questões de cunho mais reflexivo que retomavam o caleidoscópio construído inicialmente.

## Investigando Isometrias com o GeoGebra

i) Para construir um caleidoscópio com 6 imagens refletidas temos que dividir o plano em seis partes iguais. Para isso construímos um hexágono selecionando a ferramenta polígono regular, clicando em dois pontos e selecionando, na janela que irá aparecer, seis vértices.

ii) Com a ferramenta "Reta definida por Dois Pontos" clicar em dois pontos opostos em relação ao centro, fazer isso três vezes, assim dividindo o plano em seis partes iguais.

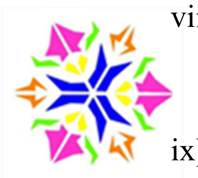
iii) *Com a ferramenta "Polígono", construa, em uma das seis partes em* que você dividiu o plano, vários polígonos bem pequenos e próximos, que não toquem nas retas. Quanto mais irregulares, melhor!

iv) Em seguida, em propriedades, escolha uma cor para cada polígono que você criou e, na janela de álgebra, clicando sobre as bolinhas verdes, apague todos os pontos que formam os vértices desses polígonos.

v) Com a ferramenta "Reflexão em Relação a uma Reta" selecione todos os polígonos irregulares criados e em seguida em uma das retas da direita ou da esquerda.

vi) Cliquem na reflexão encontrada e repitam o procedimento clicando novamente na reta à direita ou esquerda (siga a mesma escolha anterior) totalizando cinco reflexões.

vii) Agora é só esconder o hexágono, as retas e os pontos e movimentar os vértices da figura inicial para alterar o formato de seu caleidoscópio.



viii) Usem a criatividade e façam outro caleidoscópio ou modifiquem o atual com mais figuras e mais cores.

ix) Para movimentar as peças e obter o efeito do caleidoscópio real, criem dois seletores (controle deslizante) e na janela de entrada digitem: B= (letra do seletor 1, letra do seletor 2). Dessa forma vocês estarão trocando um ponto fixo por um ponto móvel, cujas coordenadas são os seletores que vocês criaram. Animem os seletores e em seguida escondam-nos. Agora é só observar! Se ficar muito grande, diminuam o zoom da tela.

I - REFLEXÕES EM RETAS

**Atividade 1** – Pontos e retas em relação a retas

a) No botão 12, desloque os eixos para o centro da janela gráfica. Com o botão direito do mouse, apague os eixos. Crie um ponto A qualquer. Na janela de entrada, crie a reta x=0. Sobre esta reta, crie um ponto B. Escolha, no botão 4, a opção "Reta perpendicular" e clique no ponto B.

b) Utilizando o botão 9, clique na opção “reflexão por uma reta” e em seguida selecione o ponto A e a reta x=0. Discuta as questões abaixo com seu colega:
   i) Ao movimentar o ponto A, o que vocês observam em relação às coordenadas da reflexão desse ponto?
   ii) Crie um ponto C sobre a reta perpendicular a reta x=0 e repita o procedimento de reflexão. O que vocês observam ao movimentá-lo (reflexão em relação a reta x = 0)?
   iii) Solicitem agora a reflexão do ponto B em relação à reta x=0. O que vocês observam?
   iv) Criem uma reta que passe por A e B. Solicitem a reflexão dessa reta em relação à reta x=0. O que acontece?
   v) Para finalizar, solicitem a reflexão da reta perpendicular em relação à reta x=0 e discutam o resultado obtido em comparação ao item anterior.

c) Escrevam suas conclusões sobre reflexões de pontos e retas em retas.

**Atividade 2** – Polígonos em relação a retas

a) No botão 12, desloque os eixos para o centro da janela gráfica. Com o botão direito do mouse, apague os eixos. Na janela de entrada, crie a reta x=0. Utilizando o botão 5, crie um polígono qualquer de um dos lados da reta.

b) Utilizando o botão 9, clique na opção “reflexão por uma reta” e em seguida clique no polígono e na reta. Movimente o polígono e discuta com seu colega as seguintes questões:
   i) Numa reflexão por uma reta, o que acontece com as coordenadas dos pontos do polígono?
   ii) E com as medidas dos segmentos?
   iii) O que mais vocês observaram?

c) Escrevam suas conclusões sobre as reflexões de polígonos em retas.

**Atividade 3** – Retas como eixos de simetria

a) No botão 12, desloque os eixos para o centro da janela gráfica. Com o botão direito do mouse, apague os eixos. Utilizando novamente a reta x=0 como suporte, vamos criar agora figuras que formam polígonos com sua própria reflexão. Vou ajuda-los a começar.

b) Após criar a reta x=0, crie sobre ela um ponto A. Em seguida crie uma perpendicular a x=0 passando por A. Utilizando as duas retas como suporte para os catetos, e com a ferramenta polígonos, crie um triângulo retângulo. Certifique-se de que os pontos criados estão sobre as retas para que fiquem condicionados a elas.

c) Utilizando o botão 9, clique na opção “reflexão por uma reta” e em seguida clique no triângulo retângulo e na reta x = 0. Movimente o polígono e discuta com seu colega as seguintes questões:

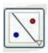
  i) O que você obteve?
  ii) Esse polígono tem quantos eixos de simetria?

d) Em duplas, agora vocês estão livres para criar figuras que contenham apenas:
  i) Um eixo de simetria
  ii) Dois eixos de simetria
  iii) Três eixos de simetria
  iv) Mais de três eixos de simetria

II - TRANSLAÇÃO

**Atividade**

Abra o programa Geogebra, crie um polígono 1; Clique em  . Com a ferramenta "vetor definido por dois pontos", crie um vetor exterior ao polígono 1. O vetor representa todos os segmentos orientados em: direção, sentido e módulo;

Clique em  . Com a ferramenta "transladar por um vetor", clique sobre o polígono 1 e em seguida sobre o vetor; Surgirá um novo polígono 2, obtido do polígono 1, pela translação através do vetor;

Modifique as cores dos polígonos, através da ferramenta "propriedades"; Clique em  . Movimente o ponto extremo final do vetor e observe o que ocorre com o polígono 2 em relação ao polígono 1;

**Responda:**

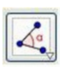
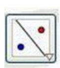
a. Qual é a distância entre os pontos correspondentes que formam os polígonos?
b. É possível colocar o polígono 2 sobre o polígono 1, ao mover o vetor? Justifique.
c. Clique sobre o vetor e movimente-o até interceptar cada vértice do polígono 1; Explique, baseado no que você observou, porque a translação é uma isometria.

III – ROTAÇÃO

As rotações são isometrias muito conhecidas e frequentes no dia-a-dia. É a única isometria no plano que possui um único ponto fixo, que é o centro de rotação. O giro ocorre em arcos de circunferência, que são as medidas do ângulo α.

**Atividade**

Abra o programa Geogebra, crie um polígono 1; Clique em  . Crie um ponto A, preferencialmente fora do polígono 1;

Clique em  ; Crie um ângulo α; Clique em  . Com a ferramenta "girar em torno de um ponto por um ângulo", clique sobre o polígono 1 e em seguida sobre o ponto A. Aparecerá uma janela na qual você deverá apagar a medida sugerida e digitar α. Outro polígono será obtido a partir do polígono 1 pela rotação do ângulo α, em torno do ponto A.

Modifique a cor dos polígonos com a ferramenta "propriedades"; Clique no ângulo e altere o valor. Note que o polígono 2 irá mudar de local, mas sempre será obtido do polígono 1 por rotação do ângulo α em relação ao ponto A;

**Responda:**

É possível colocar o polígono 2 sobre o polígono 1, ao alterar a medida do ângulo α?
Observando o desenho, justifique porque a Rotação é uma Isometria.

IV – VOLTANDO AO CALEIDOSCÓPIO

*Agora que vocês já exploraram algumas propriedades das reflexões, translações e rotações, vamos pensar um pouco mais no caleidoscópio.*

a) Seguindo um sentido, enumerem mentalmente as 6 partes do caleidoscópio. Agora respondam:
   i) O que vocês podem inferir sobre as partes ímpares? E sobre as pares?
   ii) Quais das isometrias estudadas ocorrem no caleidoscópio? Justifiquem cada uma delas.

b) Preparem uma apresentação de slides para socializar seu caleidoscópio, as descobertas sobre eixos de simetria, descrevendo inclusive os artifícios que usaram para construir tais eixos e as respostas relativas às questões sobre o caleidoscópio. Caso tenham ficado com alguma dúvida em relação às atividades sobre reflexão, translação e rotação, insiram na apresentação essas dúvidas.

## Narrando e analisando dois episódios

O espaço delimitado para essa publicação não permite relatar em detalhes todo o desenvolvimento dessa sequência. Assim, optamos por apresentar e analisar dois episódios marcantes, o primeiro relacionado à questão da visualização e sua potencialidade para instigar a criatividade dos alunos; o segundo relacionado à incorporação do uso do *software* pelos alunos.

O item IV, da sequência de atividades, solicitava que os alunos analisassem se os tipos das isometrias estudadas ocorriam nos caleidoscópios construídos. Um dos grupos, ao responder esta questão, abusou dos recursos visuais, impressionando os colegas.

Eles montaram uma sequência de slides que permitia visualizar cada uma das isometrias encontradas, mostrando que era possível conseguir duas delas - rotação e reflexão - e colocando seus colegas a pensar sobre a impossibilidade da translação nesse contexto. A apresentação deles gerou uma rica discussão sobre o fato de essa isometria manter a mesma posição, o que impede que um caleidoscópio apresente, ao mesmo, tempo uma rotação e uma translação.

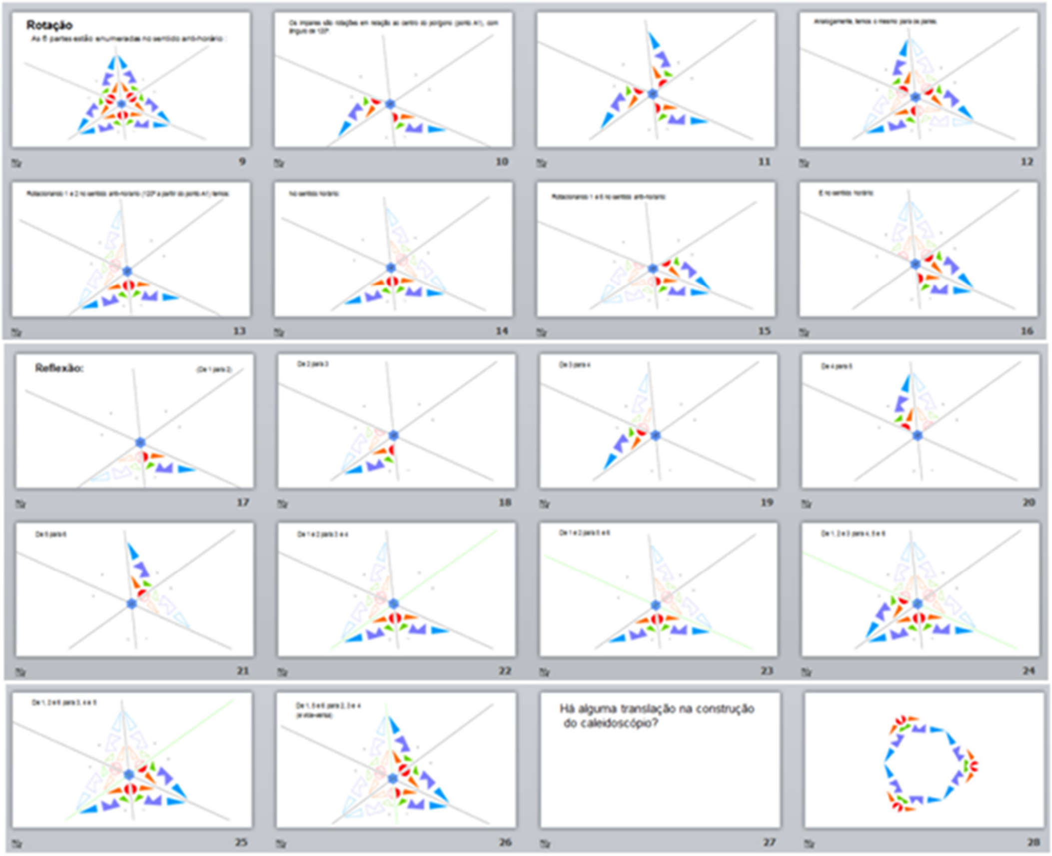



Figura 1 - Slides apresentados pelo grupo
Fonte: elaborado pelo grupo

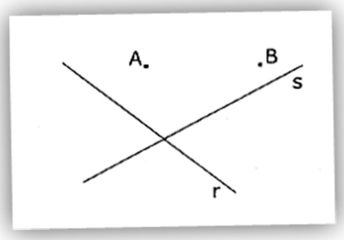
O terceiro slide, representado na da figura 1, instigou alguns alunos a observarem a formação de um cata-vento. A professora, aproveitando o ensejo, desafiou os alunos a construírem o objeto e colocá-lo em movimento e um dos alunos do próprio grupo conseguiu realizar tal façanha, encantando a turma. A visualização propiciada pelo *software* mostrou ser um elemento essencial na percepção de propriedades relacionadas às isometrias. Assim, concordamos com Barbosa (2009, p.55) ao afirmar que "a eficácia dos computadores, no ensino e na aprendizagem da Matemática, não depende de qualquer característica intrínseca dos equipamentos utilizados, mas é consequência da forma como a máquina é empregada".

Para o autor, “pautadas na escrita estática, as imagens nem sempre foram consideradas parte integrante na produção do conhecimento matemático” (BARBOSA, 2009, p. 59-60). Porém, com a facilidade de acesso que o aluno tem hoje aos computadores, é inadmissível que esta postura se mantenha. Por meio da visualização, o aluno pode levantar conjecturas e testá-las.

Ao elaborarmos esta sequência de atividades, queríamos também investigar se os alunos adotariam o *software*, utilizado durante o desenvolvimento da sequência, na resolução dos problemas propostos no capítulo referente às isometrias do livro texto adotado. Nossa intenção era verificar se a visualização propiciada pelo *software* ajudaria os alunos a resolverem os problemas propostos. Assim, não indicar para os alunos a utilização do *software* foi intencional, pois queríamos verificar se eles perceberiam suas potencialidades na visualização de possíveis soluções dos problemas, o que significaria que teriam se apropriado dessas potencialidades.

Embora isso não tenha acontecido, o percurso de realização e discussão das atividades propostas e a socialização de alguns problemas, em que a professora utilizou o *software,* configuraram-se em interessantes objetos de discussão durante a aula. Ao entraram em contato com resoluções feitas no GGb pela professora, os alunos se sentiram motivados e envolvidos com a possibilidade de utilizar esse recurso para ampliar seu poder de visualização.

Um exemplo destes momentos foi a discussão de um exercício que propunha que, dadas duas retas concorrentes r e s e dois pontos A e B, ambos no mesmo lado de r e no mesmo lado de s, se determinasse os pontos X em uma reta r e Y em uma reta s, tal que o caminho AXYB tenha o menor comprimento possível (REZENDE; QUEIROZ, 2008).




A professora utilizou os diversos caminhos descritos pelos alunos nas folhas entregues e compôs uma construção no GGb para a discussão. Após visualizarem, de forma dinâmica, as diferentes maneiras utilizadas por cada grupo de alunos para resolver o exercício, os alunos se mostraram empolgados com a possibilidade de utilizar as tecnologias para analisar diferentes caminhos para resolver um mesmo problema.

## Algumas considerações...

Ao dar voz aos alunos para também se posicionarem sobre a sequência, muitos expuseram seu contentamento com as atividades propostas, com a possibilidade de trabalhar em grupo e de criar, porém não ouvimos apenas elogios. As críticas apareceram e nos ajudarão, com certeza, a propor alterações benéficas à sequência.

> Achei a atividade muito interessante, mas também muito trabalhosa. Às vezes errar um passo da construção fazia com que você tivesse que reconstruir muita coisa. No meu caso, colocamos muitos polígonos e isso fez com que o programa do GeoGebra travasse e tivemos que fazer tudo novamente. Então, especificar a quantidade de polígonos seria bem interessante. Como disse, é uma atividade trabalhosa, mas também muito prazerosa (e-mail de uma aluna, dez. 2013).

Considerando que há uma forte cultura de resolução de exercícios por meio das mídias lápis e papel, concluímos que a preocupação dos alunos era apresentar suas respostas por escrito e, portanto, eles não consideraram o *software* como um recurso a ser explorado nesse processo. Assim, a vivência de mais experiências envolvendo *softwares*, no ensino superior, mostrou-se importante e necessária.

Além disso, foi fundamental pensar numa sequência de atividades que explorasse as potencialidades do *software* de maneira reflexiva e investigativa, pois com a facilidade de acesso as tecnologias que temos hoje, a visualização e a dinamicidade promovidas por *softwares,* como o GGb, precisam ser exploradas não apenas em DG, mas também nas demais disciplinas que compõem a matriz curricular, especialmente dos cursos de licenciatura. Isso porque é importante que os futuros professores se apropriem de suas potencialidades por meio de vivências diversas, em todas as disciplinas possíveis, não limitando-se apenas àquelas em que se trata sobre o uso de *softwares* no ensino.

## Referências

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.** 2009. 199 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, Florianópolis (SC), SBEM, vol. 4, p. 3-13. 1995.

REZENDE, E. Q. F. e QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.** Editora Unicamp, 2ª edição, 2008.