Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Progressão Aritmética e Resolução de Problemas: uma experiência no contexto do Estágio Supervisionado em Matemática

Beatriz Signori Lonardoni[1]
Edilaine Regina dos Santos[2]

Resumo: O presente artigo tem como objetivo relatar uma experiência relacionada ao desenvolvimento de uma oficina de Matemática, no contexto do Estágio Curricular Supervisionado, destinada para alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Londrina – PR. A oficina contou com a proposição de problemas para a aprendizagem do conteúdo de Progressão Aritmética, conduzida sob a perspectiva de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. Acredita-se que a experiência aqui relatada oportunizou aprendizagens para todos os envolvidos e espera-se que ela possa contribuir para o trabalho de professores e futuros professores de Matemática em relação à temática apresentada.

Palavras-chave: Educação Matemática. Estágio Supervisionado. Resolução de Problemas. Progressão Aritmética.

Arithmetic Progression and Problem Solving: an experience in the Mathematics Supervised Internship

Abstract: This article aims to report an experience linked to the development of a mathematics workshop – within the scope of Mathematics Supervised internship – aimed at first-year high school students from a public school in Londrina, Paraná state, in Brazil. The workshop featured problems which were proposed in order to foster the learning of Arithmetic Progression from the perspective of mathematics teaching through Problem Solving. It is possible to state that the experience described in this paper provided all participants with learning opportunities, and we hope it could contribute to the work developed by mathematics teachers and future teachers regarding the theme that was presented.

Keywords: Mathematics Education. Supervised Internship. Problem Solving. Arithmetic progression.

Progresión aritmética y resolución de problemas: una experiencia en el contexto de las prácticas de enseñanza de las matemáticas

Resumen: Este artículo tiene como objetivo informar de una experiencia relacionada con el desarrollo de un taller de matemáticas en el contexto de las prácticas curriculares de enseñanza de las matemáticas y direccionado a los estudiantes del primer año de la enseñanza secundaria de una escuela pública en Londrina, estado de Paraná, en Brasil. El taller se realizó a través de la proposición de problemas con enfoque en el aprendizaje del contenido Progresión Aritmética, bajo la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas. Se puede afirmar que la experiencia que se ha relatado en este artículo proveyó oportunidades de aprendizaje a todos los participantes del taller, y se espera que él contribuya al trabajo de los profesores y futuros profesores de matemáticas acerca del tema aquí presentado.

Palabras clave: Educación Matemática. Prácticas de Enseñanza. Resolución de Problemas. Progresión Aritmética.

1 Introdução

O presente artigo tem como objetivo relatar uma experiência relacionada ao

[1] Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Universidade Estadual de Maringá. Maringá, PR, Brasil. E-mail: beatrizslonardoni@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0009-0007-9707-3204

[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina. Londrina, PR, Brasil. E-mail: edilaine.santos@uel.br - Orcid: https://orcid.org/0000-0003-2086-4044.

desenvolvimento de uma oficina de Matemática realizada, por uma aluna[3] do 4º ano da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina sob orientação de um docente do departamento de Matemática[4], no contexto do Estágio Curricular Supervisionado.

Essa oficina, realizada[5] no primeiro semestre de 2023, foi ministrada para alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Londrina e destinada à abordagem do conteúdo de Progressão Aritmética através da Resolução de Problemas.

No tocante ao ensino desse conteúdo, alguns documentos destacam que o trabalho em sala de aula pode visar à identificação de regularidades em situações semelhantes, para, a partir disso, estabelecer regras, algoritmos e propriedades (BRASIL, 2006), devendo "evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas ("determine a soma…", "calcule o quinto termo…")" (BRASIL, 2006, p. 75).

Em relação à Resolução de Problemas, tem-se que ela é considerada uma "peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios" (BRASIL, 2002, p. 112), e que

> [...] essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. [...] A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral [...] (BRASIL, 1998, p. 40).

Tendo isso em vista, para a realização dessa oficina, optou-se por utilizar a Resolução de Problemas na perspectiva proposta por Onuchic e Allevato (2011), baseando-se nas seguintes etapas[6]:

> - *Preparação do problema:* selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
> - *Leitura individual:* entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

[3] Primeira autora do artigo.
[4] Segunda autora do artigo.
[5] Realizada em um sábado, das 08:00 às 12:00.
[6] As autoras Onuchic e Allevato (2011) apontam essas etapas como uma das maneiras de implementação da Resolução de Problemas, mas destacam que há uma flexibilização quanto às formas de praticar essa metodologia, não havendo uma rigidez ou ordem pré-estipulada para aplicação.

> - *Leitura em conjunto:* formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
>   - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
>   - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
>
> - *Resolução do problema:* a partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
> - *Observar e incentivar:* nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.
>   - O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.
>
> - *Registro das resoluções na lousa:* representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
> - *Plenária:* para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.
> - *Busca do consenso*: depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
> - *Formalização do conteúdo:* neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 84-85).

Cabe destacar que a primeira etapa apresentada nesse roteiro (*Preparação do problema)* ocorreu durante o período de planejamento da oficina, possibilitando um estudo mais aprofundado do conteúdo e da própria abordagem de condução de aula a ser utilizada. As demais etapas foram efetivadas no decorrer do trabalho com os alunos, cujo relato é apresentado na próxima seção.

2 O desenvolvimento da oficina

Inicialmente explicou-se aos alunos como se daria a dinâmica da oficina: a formação de grupos, o trabalho com problemas, o esclarecimento de dúvidas, o tempo para resolução em grupo, a discussão de algumas resoluções e a relação destas com o conteúdo matemático. Vale salientar que os alunos não sabiam de antemão qual seria o conteúdo a ser abordado.

Na sequência, eles foram dispostos em seis grupos, de cinco e seis integrantes, sendo informados de que, ao longo da resolução dos problemas, seriam questionados sobre os procedimentos e as justificativas adotadas, e que isso não significaria que a resolução estaria incorreta. Além disso, que posteriormente alguns grupos seriam escolhidos para explicarem suas resoluções na lousa, a fim de que todos pudessem analisá-las, identificando possíveis semelhanças e diferenças entre elas; por fim que, na sequência, seriam estabelecidas relações entre as resoluções e o conteúdo matemático.

Durante a oficina foram propostos aos alunos três problemas, utilizados para a formalização de sequência numérica, Progressão Aritmética e suas classificações, fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética e fórmula da soma de termos de uma Progressão Aritmética.

O relato a seguir refere-se ao trabalho com o segundo problema, que levou aproximadamente uma hora, da apresentação até as discussões das resoluções e o término da formalização do conteúdo. A proposição do problema em questão visava, de um modo geral, definir Progressão Aritmética e deduzir a fórmula do termo geral.

Quadro 1 - Enunciado do problema 2

Observe as figuras abaixo, formadas com bolinhas.

figura 1 **figura 2** **figura 3** **figura 4** **figura 5**

Considerando a construção das próximas figuras, responda os itens a seguir:

a) Quantas bolinhas são necessárias para formar a figura 6?
b) Quantas bolinhas são necessárias para formar a figura 12?
c) Escreva uma regra que permita expressar qual a relação entre os números das figuras e suas respectivas quantidades de bolinhas. Justifique sua resposta.

Fonte: Adaptada de Leonardo (2020, p. 112)

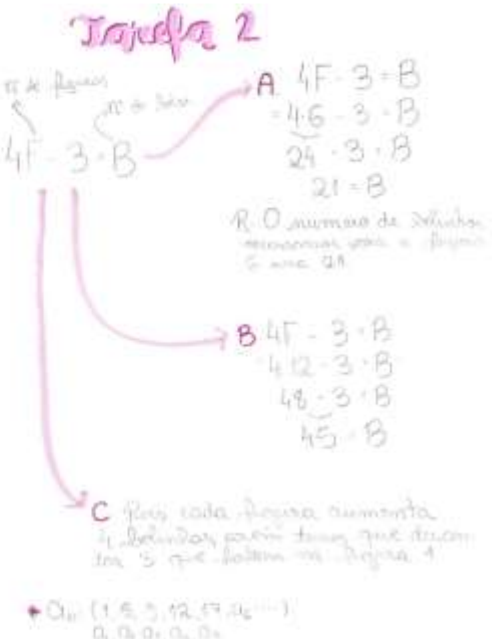
Após a leitura do enunciado, referente à 2ª e à 3ª etapa do roteiro de Onuchic e Allevato (2011), os alunos começaram a resolver o problema, conforme a 4ª etapa do mesmo roteiro. Logo no início, alguns grupos perceberam que, a partir da figura 2, quatro bolinhas eram acrescentadas, chegando à ideia de que "as quantidades de bolinhas seguintes seriam múltiplas de quatro", por se esquecerem de que a bolinha inicial da figura 1 foi usada para formar as seguintes. Esses grupos foram questionados, durante a etapa de "*Observar e incentivar*", sobre a adequação de tal ideia às figuras do enunciado da tarefa. Com isso, constataram seus erros e fizeram as correções necessárias, dando continuidade ao processo de resolução.

Alguns grupos também apresentaram dificuldades em identificar a relação, solicitada no último item da tarefa, pela recorrência apenas às figuras do enunciado. Nesse contexto, os encaminhamentos realizados se deram com os seguintes questionamentos:

- As figuras do enunciado possuem alguma semelhança?
- O que ocorre de uma figura para a outra?
- O que pode ser observado nessas quantidades de bolinhas que aumentam nas figuras?
- Existe alguma semelhança entre essas quantidades que pode ser usada para não precisar desenhar todas as figuras?

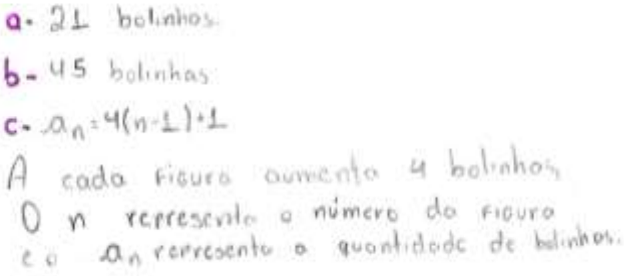
Após a resolução do problema, duas produções foram escolhidas para serem registradas (*Registro das resoluções na lousa)* e discutidas com a turma, no momento da *Plenária*. Tais resoluções estão representadas nas Figuras 1 e 2 a seguir.

Figura 1 – Resolução do Grupo 1



Fonte: a estagiária.

Figura 2 – Resolução do Grupo 2



a- 21 bolinhos.

b- 45 bolinhas

c- $a_n = 4(n-1)+1$

A cada figura aumenta 4 bolinhas

O n representa o número da figura

e o a_n representa a quantidade de bolinhas.

Fonte: a estagiária

Conforme retratado na Figura 1, partindo da ideia de que a cada figura acrescentavam-se quatro bolinhas, o Grupo 1 estabeleceu uma regra associando a multiplicidade por quatro a essas quantidades. No entanto, como na primeira figura da sequência havia apenas uma bolinha, faltando mais três para totalizar uma quantia múltipla de quatro, os alunos retiraram esse valor faltante da quantidade total de bolinhas. Com isso, deduziram a regra $4F - 3 = B$, sendo F o número da figura e B a quantidade total de bolinhas para formar a referida figura. A partir disso, os alunos desse grupo responderam os itens a) e b).

De modo similar, o Grupo 2 observou que: na figura 1 havia apenas uma bolinha; na figura 2, a quantidade aumentou em 4 unidades em relação à figura 1, resultando em 5; na figura 3, a quantidade aumentou em 4 unidades em relação à figura 2, resultando em 9; e, assim, sucessivamente. Com base nisso perceberam que, a cada figura, a quantidade de bolinhas aumentava em 4 unidades em relação à figura anterior, não podendo se esquecer da bolinha inicial que faz parte da formação de todas as demais figuras. A partir dessa constatação, os alunos do Grupo 2 desenvolveram a seguinte regra para determinar a quantidade de bolinhas na figura seguinte: $a_n = 4(n-1) + 1$, em que n representa o número da figura (consequentemente, $(n-1)$ diz respeito ao número da figura anterior) e a_n indica a quantidade de bolinhas da figura n. Utilizando a ideia que embasou tal regra, os integrantes do grupo responderam os itens a) e b) do problema.

Em resumo, a dinâmica da discussão se iniciou pela apresentação e discussão da resolução do Grupo 1 no quadro, seguida da produção do Grupo 2, identificando suas semelhanças com a resolução anterior. A partir disso, buscou-se chegar a um consenso com os alunos (*Busca do consenso*) e à *Formalização do conteúdo*, cujos encaminhamentos estão descritos a seguir.

No início da discussão da resolução do Grupo 1 retomou-se a representação de sequências da tarefa anterior[7], para então reescrever com os alunos a expressão $4F - 3 = B$, em que F representava o número da figura e B sua quantidade de bolinhas, as quais foram substituídas por n e a_n, respectivamente, chegando à fórmula $a_n = 4n - 3$.

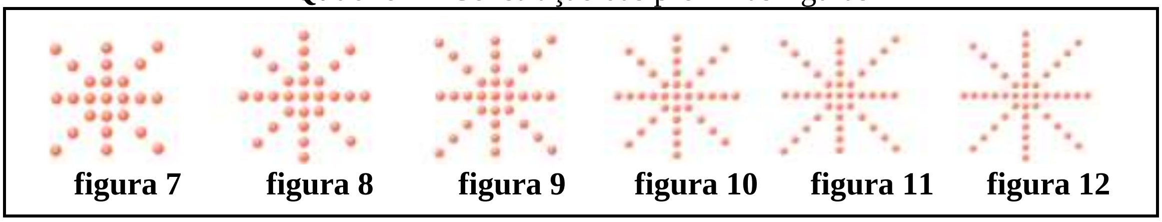
A partir dessa relação, o primeiro grupo representou a sequência da quantidade de bolinhas da seguinte forma: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots)$, sendo a_1 a quantidade de bolinha da figura 1, a_2 a quantidade de bolinhas da figura 2, e assim sucessivamente, retomando a relação obtida anteriormente para calcular a_6 e a_{12}.

Ainda na discussão do item b), foi feito o seguinte questionamento: “como as 45 bolinhas da figura 12 estão organizadas?”. Uma dificuldade relativa a tal representação, que não se fez presente no período das observações, surgiu nesse momento, pelo fato de os alunos não recorrerem, até então, aos desenhos, apenas a “somar 4 bolinhas a cada figura”.

Os alunos não atentaram para a organização das “bolinhas acrescentadas”, e alguns chegaram à conclusão de que “as figuras de ordem ímpar são dadas por bolinhas organizadas de modo a formar um quadrado”. Para esclarecer tal interpretação, recorreu-se às figuras do enunciado, indagando os alunos sobre o modo como as bolinhas acrescentadas estavam posicionadas nas figuras explorando, para tanto, a figura 5.

Após a identificação do padrão do aumento das quatro bolinhas (nos cantos extremos nas figuras de número ímpar e no centro das laterais nas figuras de número par), construiu-se, com os alunos, as próximas figuras, as quais estão no Quadro 2, abaixo. A reação dos alunos foi de surpresa, por não terem atentado a isso anteriormente.

Quadro 2 - Construção das próximas figuras



Fonte: A estagiária.

A partir desse aumento constante de quatro bolinhas a cada figura, e de sua representação em notação de sequências, foi apresentada para os alunos a definição de

[7] Relembrou-se que cada termo de uma sequência pode ser representado por uma letra acompanhada de um índice, que informa a **posição** ou a **ordem** desse termo na sequência, e que uma sequência numérica finita é usualmente representada por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, e uma sequência numérica infinita por $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, na qual o número a_1 representa o primeiro termo da sequência, a_2 o segundo termo e assim sucessivamente, sendo a_n o número que representa o **enésimo (*n*-ésimo) termo** ou **termo geral** da sequência.

Progressão Aritmética, comentando que o "padrão" é chamado de *razão* da progressão.

Quadro 3 - Definição de Progressão Aritmética

Uma **Progressão Aritmética** (PA) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição do termo anterior a uma constante r, chamada de **razão** da progressão.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa (2020, p. 123).

Em seguida, a discussão da resolução do Grupo 2 foi iniciada, com foco na relação obtida para o item c). Os alunos questionaram sobre qual das fórmulas (a obtida pelo Grupo 1 ou a obtida pelo Grupo 2) estariam corretas. Para explorar tal questão, utilizando a propriedade distributiva, desenvolveu-se com os alunos a fórmula obtida pelo Grupo 2 da seguinte maneira:

$$a_n = 4 \cdot (n-1) + 1 = 4 \cdot n - 4 \cdot 1 + 1 = 4 \cdot n - 4 + 1 = 4 \cdot n - 3$$

Desse modo, os alunos compreenderam a equivalência entre ambas, tendo sido a segunda delas a ter oportunizado a relação com a fórmula do termo geral. Com a relação dada por $a_n = 1 + 4 \cdot (n-1)$, perceberam que a quantidade de bolinhas de uma figura podia ser dada pela quantidade de bolinhas da primeira figura, adicionada com o produto da quantidade que aumenta a cada figura (4) com o número da figura anterior.

Na sequência, os alunos foram questionados sobre a possibilidade de estabelecer uma relação para o termo geral (a_n) de uma Progressão Aritmética qualquer. Para responder tal questão, iniciou-se por considerar uma Progressão Aritmética finita genérica, de razão r, representada por

$$(a_1, a_2,\ a_3, a_4, \cdots, a_{n-1}, a_n)$$

$$+r \quad +r \quad +r \qquad\qquad +r$$

Com isso, partindo da ideia de que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição do termo anterior à razão r) foram construídas as seguintes relações com os alunos[8]:

- $\boldsymbol{a_2 = a_1 + r = a_1 + 1r}$
- $\boldsymbol{a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r}$
- $\boldsymbol{a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r}$

A partir disso, os alunos foram questionados sobre a existência de uma relação entre o índice do termo da sequência e o fator que multiplica a razão da progressão. Eles perceberam

[8] Essa construção não foi feita com os termos da sequência de bolinhas das figuras da tarefa, tendo em vista que os próprios alunos apresentaram tais relações.

que o número que multiplica essa razão é uma unidade menor que o número do índice do termo correspondente da PA, reescrevendo as expressões anteriores da seguinte forma:

- $\boldsymbol{a_2 = a_1 + 1r = a_1 + (2 - 1)r}$
- $\boldsymbol{a_3 = a_1 + 2r = a_1 + (3 - 1)r}$
- $\boldsymbol{a_4 = a_1 + 3r = a_1 + (4 - 1)r}$

Esse encaminhamento, possibilitou aos alunos perceberem que o enésimo termo (a_n) de uma PA qualquer pode ser escrito como a soma do primeiro termo (a_1) com o produto da razão (r) pelo fator ($n - 1$), ou seja,

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)r}$$

A discussão dessa tarefa foi então finalizada com a *fórmula do termo geral da PA*:

Quadro 4 - Fórmula do termo geral da Progressão Geométrica

O termo geral de uma Progressão Aritmética qualquer pode ser escrito como a soma do primeiro termo com o produto da razão pelo fator $(n - 1)$. A expressão conhecida como **fórmula do termo geral da PA** é a seguinte: $$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$ em que • a_n é o termo geral; • a_1 é o primeiro termo; • n é a ordem/posição do termo; • r é a razão da PA.

Fonte: Adaptada de Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa (2020, p. 125)

De um modo geral, nessa tarefa, observou-se que o trabalho dos grupos foi semelhante nos itens a) e b), cujas dificuldades, já abordadas anteriormente, foram esclarecidas rapidamente, com pequenas intervenções, por meio da observação das figuras do enunciado.

Com respeito ao item c) das resoluções dos demais grupos, tem-se que metade seguiu a ideia do Grupo 1, e a outra metade, a do Grupo 2, com pequenas variações em suas representações, como o uso de letras diferentes para designar o número da figura e sua respectiva quantidade de bolinhas.

3 Considerações finais

Neste artigo, buscou-se relatar uma experiência relacionada ao desenvolvimento de uma oficina de Matemática realizada no contexto do Estágio Curricular Supervisionado.

Para que o conteúdo Progressão Aritmética pudesse ser trabalhado pela estagiária através da Resolução de Problemas, realizou-se, em um primeiro momento, um estudo mais aprofundado e detalhado do conteúdo, e também da abordagem de ensino a ser utilizada. A partir disso, foi possível elaborar um planejamento, com orientações durante o processo, que oportunizou segurança no decorrer da oficina e preparo para lidar, por exemplo, com possíveis dúvidas e com a formalização do conteúdo, a partir das resoluções dos estudantes.

Com relação ao trabalho com os problemas e à dinâmica utilizada, acredita-se que foi oportunizado aos alunos um ambiente para que participassem e compartilhassem suas ideias, percebendo que diversos caminhos poderiam ser utilizados para resolver um mesmo problema.

Tendo isso em vista, considera-se que a experiência aqui relatada constituiu uma oportunidade de aprendizagem para todos os envolvidos.

Referências

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI Jr, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma Matemática:** Funções e Progressões, 1. ed. Ensino Médio. Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias. São Paulo: Editora FTD, 2020. Disponível em: https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/prisma-matematica/. Acesso em: 17 jan. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias / Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**. Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

LEONARDO, Fabio Martins. **Conexões:** Funções e Aplicações, 1. ed. Ensino Médio. Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias. Obra coletiva; editor responsável: Fabio Martins de Leonardo. São Paulo: Moderna, 2020. Disponível em: https://pnld.moderna.com.br/ensino-medio/obras-didaticas/area-de-conhecimento/matematica/conexoes. Acesso em: 17 jan. 2023.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema** - Mathematics Education Bulletin, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/72994. Acesso em: 17 jan. 2023.