

Pensamento fracionário parte-todo no 4º ano do Ensino Fundamental: um debate com crianças a partir de seus erros

Líslei Rutz Wolter¹
João Carlos Pereira de Moraes²

Resumo: Esta pesquisa objetiva analisar o processo de debate sobre o conceito de fração parte-todo, a partir da perspectiva da análise de erros, com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Canguçu/RS. O estudo foi realizado com 29 alunos por meio de uma intervenção pautada na ideia de parte-todo, relacionada ao pensamento fracionário. A análise dos dados foi constituída em uma perspectiva descritiva-narrativa, na qual se realiza uma análise processual. Como resultado, evidenciou-se que a análise de erro permitiu um processo reflexivo sobre o conceito de fração, gerando uma cultura em sala que traz o questionamento como atividade do aluno. Além disso, ressaltou-se a reflexão de ideias no pensamento fracionário, tais como parte e totalidade e diferentes representações de frações. Conclui-se que essa ação potencializou a construção do conceito de fração e o desenvolvimento de compreensões mais elaboradas sobre a temática.

Palavras-chave: Parte-todo. Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Análise de Erros. Frações.

Part-whole fractional thinking in the fourth year of elementary school: a debate with children based on their mistakes

Abstract: This research aims to analyze the debate process on the concept of part-whole fraction, from the perspective of error analysis, with 4th grade students from a public school in Canguçu/RS. The study was carried out with 29 students through an intervention based on the idea of part-whole, related to fractional thinking. Data analysis was based on a descriptive-narrative perspective, in which a procedural analysis is carried out. As a result, it was evident that the error analysis allowed a reflective process on the concept of fraction, generating a culture in the classroom that brings questioning as a student activity. In addition, it highlighted the reflection of ideas in fractional thinking, such as part and totality and different representations of fractions. Finally, it is clear that the action potentiated the construction of the concept of fraction and the creation of more elaborate understandings about it.

Keywords: Part-Whole. Early Years of Elementary School. Error Analysis. Fractions.

El pensamiento fraccionario parte-todo en el cuarto grado de educación primaria: un debate con los niños a partir de sus errores

Resumen: Esta investigación tiene como objetivo analizar el proceso de debate sobre el concepto de fracción parte-todo, en la perspectiva del análisis del error, con alumnos de 4º grado de una escuela pública de Canguçu/RS. El estudio se realizó con 29 estudiantes a través de una intervención basada en la idea de parte-todo, relacionada con el pensamiento fraccionario. El análisis de los datos se basó en una perspectiva descriptiva-narrativa, en la que se realiza un análisis procedimental. Como resultado, se evidenció que el análisis de errores permitió un proceso reflexivo sobre el concepto de fracción, generando una cultura en el aula que trae el cuestionamiento como actividad de los estudiantes. Además, destacó el reflejo de ideas en el pensamiento fraccionario, como parte y totalidad y diferentes representaciones de fracciones. Se concluye que la acción potenció la construcción del concepto de fracción y la creación de entendimientos más elaborados sobre ella.

Palabras clave: Parte-Todo. Primeros Años de la Escuela Primaria. Análisis de Erros. Fracciones.

¹ Mestra em Educação. Universidade Federal do Pampa/Unipampa, Jaguarão, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: lisleiwolter@gmail.com - Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-0600-7428>.

² Doutor em Educação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná/UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: joaomoraes@utfpr.edu.br - Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9513-018X>.

1 Introdução

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as frações surgem na vida escolar dos alunos com essa nomenclatura no 4º ano do Ensino Fundamental (Brasil, 2017; Wolter; Moraes, 2022). Nesse período, a criança compreende noções de fração pelo seu convívio com situações cotidianas, sem necessariamente compreender as suas significações em totalidade (Wolter; Moraes, 2022).

No âmbito histórico, as frações emergem da necessidade do homem em comparar grandezas, a partir de situações que os números naturais não eram suficientes (Caraça, 1951). Já no âmbito escolar, o conceito representa uma ruptura dos números naturais, o que pode gerar um obstáculo didático para o processo de ensino (Cruz, 2016). Associado a isso, no encontro aluno-fração, os erros tornam-se uma das formas de observar a manifestação do modo de pensar fracionário³ dos estudantes (Wolter; Moraes, 2022), o que permite ao professor mapear compreensões, planejar ações e intervir no processo de aprendizagem.

Nesse contexto, esta pesquisa objetiva analisar o processo de debate sobre o conceito de fração parte-todo, a partir da perspectiva da análise de erros, com alunos do 4º ano de uma escola estadual de Canguçu/RS.

2 Erro e o ambiente escolar

Em uma perspectiva filosófica, o erro pode ser visto como: defeitos advindos do mundo dos sentidos (Platão, 1972), o que afasta o sujeito do mundo ideal da perfeição matemática (Pavanello; Nogueira, 2006); acidente na linha de raciocínio humano (Aristóteles, 1982), distanciando da verdadeira produção científica; fruto do não conhecimento (Santo Agostinho, 1999); limitação ou imperfeição da natureza humana (Leibniz, 2013). No entanto, segundo Gentile (1987), ao ser visto como um momento negativo, o erro pode ser superado a partir da intervenção diferente ao intelecto, fazendo com que o ser saia de sua linha de raciocínio e se abra a novas possibilidades.

Nesse sentido, ao considerar a escola como ambiente de busca e ressignificações de conhecimentos, mediados por processos de leitura, escrita, cálculos e formação de opiniões, o erro emerge com frequência. Para Chevallard e Feldman (1986), a correção torna-se parte do processo didático da docência, porém diferencia-se de outros momentos de ensino, pois, para professor, “aparece como a prova por excelência, da qual se livra ou da qual, pelo contrário, faz

³ A partir dos estudos de Sousa (2014), compreendemos o pensamento fracionário como modo matemático de pensar e analisar situações sociais a partir de conceitos ligados à definição de fração.

uma pequena crucificação que reaparece regularmente” (Chevallard; Feldman, 1986, p. 71).

Ainda de acordo com os autores, o ato de errar pode ser visto como o processo de construção de raciocínio dos alunos. Quando o professor compreende essa relação, passa a observar as situações escolares de outro modo, percebendo o erro como elemento do processo de aprendizagem (Cury, 2019). Já nas palavras de Brousseau (1983, p. 171), “o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, [...], mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado”.

Entretanto, no ambiente escolar, visualiza-se uma predisposição ao erro em uma perspectiva behaviorista (Wolter; Moraes, 2022), na qual o erro representa fracasso do aluno e um condicionamento inadequado do professor (Jucá, 2022). Ou seja, perante o erro, caberá ao professor reforçar o procedimento correto, propondo processos de repetição, até que ele seja extinto nas produções dos alunos.

Por outro lado, nesta pesquisa, corroboramos as ideias de Cury (2019) ao ressaltar que o erro, quando percebido em uma abordagem construtivista, torna-se mais produtivo para os processos de aprendizagem. Nessa concepção, os erros são produzidos como resultados dos conflitos cognitivos que os sujeitos enfrentam no esforço para se adaptarem a novas situações (Teixeira, 1997).

Nesse sentido, encoraja-se os alunos à exploração e verbalização das ideias, raciocínio e argumentação (CURY, 2019). Assim, os erros tornam-se oportunidades para aprendizagem e pesquisa no trabalho pedagógico, potencializando o seu debate em sala.

3 Significados de fração

No contexto escolar, as frações são utilizadas para resolver problemas de diferentes naturezas, assumindo diversos significados (Nunes; Bryant, 1997). Desse modo, dependendo da situação matemática a ser resolvida, uma ou outra significação precisa ser suscitada pelo docente. Cavalcanti e Guimarães (2008, p. 2-3), estruturando uma síntese dessa ideia, elaboraram o Quadro 1, com significados e exemplos para uma melhor compreensão:

Quadro 1 – Significados da fração

Significado	Definição	Exemplo
Parte/todo	Partição de um todo n partes iguais, em que cada uma pode ser representada como $1/n$. Um procedimento de dupla contagem, das partes do todo e das partes tomadas, no geral, é suficiente para solucionar o	Uma jarra com suco foi dividida entre três copos. João bebeu um copo. Qual fração representa o que

	problema.	ele bebeu da jarra?
Quociente	A fração indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo uma variável correspondente ao numerador e outra ao denominador.	Em uma festa, foram distribuídos 2 bolos para 6 crianças, igualmente. Quanto cada uma vai receber?
Probabilidade	A fração representa a chance de um evento ocorrer. (Número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis).	Jogando uma vez um dado, qual fração representa a possibilidade de tirar o número 3 ou 4?
Operador Multiplicativo	A fração é um valor escalar aplicado a uma quantidade, ou seja, um multiplicador da quantidade indicada.	Numa jarra contendo 900 ml de suco, Pedro bebeu $\frac{1}{3}$ do líquido. Quantos mililitros ele bebeu?
Número	A fração é um número em si, não sendo necessário que expresse uma relação ou contexto para ser compreendida numa dada situação.	Em qual lugar posso marcar na reta numérica $\frac{1}{3}$?
Medida	Comparação na qual a fração está relacionada à pergunta “quantas vezes?”. Nesse caso, uma determinada parte é tomada como referência para se medir uma outra.	Quantos copos de $\frac{1}{3}$ litro são necessários para encher um balde de 15 litros?
Razão	A fração refere-se a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.	Para fazer um suco de laranja, eu misturo numa jarra 2 copos de água para 1 de concentrado. Qual fração de concentrado eu tenho na jarra?

Fonte: Cavalcanti e Guimarães (2008, p. 2, modificado pelos autores).

Ao observar os exemplos do quadro, percebe-se que $\frac{1}{3}$ aparece em todos os casos, porém em contextos diferentes, mas em todos representando uma fração. Nesse sentido, a fração como conceito se faz potente na construção do conhecimento matemático quando envolvido no contexto de resolução de problemas (Proença, 2015).

Para este estudo, com o intuito de atender aos requisitos do 4º ano do Ensino Fundamental da BNCC (Brasil, 2017), considerou-se a ideia de parte-todo como um significado a ser abordado. Segundo Nunes *et al.* (2003), o significado parte-todo representa um todo (unidade) dividido em “n” partes iguais, chamado denominador, tomada cada “m” partes, denominado numerador, representada na forma $\frac{m}{n}$.

Corroborando Nunes e Bryant (1997), ressaltamos que esse significado é muito utilizado no Brasil, resumindo-se em dividir a área em partes iguais e, por meio da percepção, nomear a fração a partir das partes pintadas sobre o número total de partes.

4 Aspectos metodológicos

A proposta metodológica da pesquisa é de cunho qualitativo, uma vez que a

intencionalidade do estudo está voltada mais para o processo do que para a geração de um produto (Ludke; André, 1986). Além de qualitativa, a pesquisa possui um caráter intervencionista (Damiani *et al.*, 2013).

Os sujeitos da pesquisa foram 29 alunos do 4º ano de uma escola estadual de Ensino Fundamental na cidade de Canguçu, Rio Grande do Sul, sendo 15 meninas e 14 meninos.

Sobre as questões éticas, destaca-se que o projeto de pesquisa foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP)⁴ da Universidade Federal XXX. Além disso, foi solicitada a autorização aos pais por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e, em seguida, disponibilizado aos alunos o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) para que também autorizassem a análise dos dados.

Os dados foram coletados por meio de gravação (áudio e vídeo), fotos e atividades produzidas pelos alunos na intervenção. Para a realização, utilizou-se a seguinte sequência:

Quadro 2 – Intervenção realizada

Etapa	Ação
1 ^a	<ul style="list-style-type: none"> – Leitura do livro <i>O pirulito do pato</i>, de autoria de Nilson Machado (1992). O livro aborda os três conceitos de fração (parte-todo, medida e número); – Atividade escrita, com exemplos encontrados no livro.
2 ^a	<ul style="list-style-type: none"> – Atividades que envolvam a representação figurativa e fracionária, englobando conceitos como metade, terça parte, quarta parte.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Em todas as etapas listadas no Quadro 2, a análise dos erros foi conduzida com base nas atividades realizadas pelos alunos. Os pesquisadores coletaram as compreensões equivocadas dos alunos no dia seguinte à sua realização, e esses erros foram discutidos pelo grupo. Para o processo de análise dos dados, realizou-se uma abordagem analítica direcionada para uma perspectiva intervencionista de estudo. Como aponta André (2005), a análise deve dialogar com a proposta epistemológica, conceitual e social de coleta de dados. A autora afirma:

Na perspectiva das abordagens qualitativas, não é a atribuição de um nome que estabelece o rigor metodológico da pesquisa, mas a explicitação dos passos seguidos na realização da pesquisa, ou seja, a descrição clara e pormenorizada do caminho percorrido para alcançar os objetivos, com a justificativa de cada opção feita (André, 2013, p. 96).

Assim, a ênfase da análise está atrelada aos pormenores do caminho percorrido para

⁴ Após a avaliação, o parecer consubstanciado 4.711.213 do CEP informa que o projeto de pesquisa foi aprovado.

construí-la. Desse modo, optou-se por uma abordagem descritiva-narrativa de análise, inspirada no método de análise proposto por Moraes (2014). Para o autor, em práticas de pesquisas que buscam apontar processos de mudança como forma de indício, é preciso que a pesquisa descreva o percurso e elenque possíveis transformações. Assim, ao longo da análise, apresentam-se momentos de descrição das etapas para entender o processo, atrelando-se práticas de reflexão teorizadas sobre os eventos ocorridos

5 Análise dos dados

5.1 Primeira etapa da intervenção

Com o objetivo de apresentar e dar início ao trabalho com frações, foi realizada a leitura do livro *O pirulito do pato* (Machado, 1992). A escolha da literatura infantil para compor a situação problematizadora deve-se à sua potencialidade para a Educação Matemática, haja vista que pode oferecer um contexto propício para a resolução de problemas matemáticos (Carey, 1992) e para o desenvolvimento, explicações e/ou revisão de conceitos ou habilidades matemáticas (Souza; Oliveira, 2010).

No início da leitura, foram distribuídos pequenos círculos em cartolina para simular o pirulito. Em seguida, deu-se início à história:

Dino é um patinho muito sapeca e esperto, recebe um pirulito de sua mãe. Para representá-lo, todos fazem o desenho desse pirulito no círculo denominado uma parte.

P⁵: Quanto que é a parte de pirulito que o Dino tem pra comer?

T: Um.

P: Como representamos isso na cartolina?

A2: Pintando o pirulito?

P: Isso.

A1: Pode ser colorido?

P: Pode se o pirulito for de mais de um sabor. (TAV).

Nesse momento, a discussão sobre a unidade ou a totalidade tornou-se o ponto base do processo da relação parte-todo, uma vez que o pensamento fracionário se iniciou com a divisão da unidade. Nesse contexto, segundo Silva e Almouloud (2008), o debate sobre o inteiro precisa ser bem constituído para que a concepção parte-todo de fração seja elaborada pelo aluno. Após o debate e a representação do inteiro trazida pelo livro, continuou-se a leitura da história:

Dino tem um irmão, todos acham graça quando Dino, o patinho da história, divide de forma

⁵ Utilizou-se as seguintes siglas na apresentação dos dados: TAV – transcrição de áudio e vídeo; P – pesquisadora; e A – aluno. Ressalta-se, ainda, o uso do recuo 1,25 cm da margem esquerda para os excertos coletados no campo.

incorreta um pirulito com o irmão, dando-lhe o palito e ficando com o doce, repreendido pela mãe que solicita que Dino divida o pirulito de forma certa. Nesse momento, os estudantes, com um círculo de duas partes, realizam a divisão do pirulito na cartolina.

P: Como vamos dividir o pirulito pra dois patinhos?

Confusão na sala...

P: Vamos pensar, vocês têm um pirulito e vão dar a metade pro irmão de vocês. Com quanto o irmão vai ficar?

A4: Vou desenhar uma linha, pra dividir e depois pintar.

A5: Vou deixar o Dino com o pedaço maior.

P: Lembrem-se, vocês precisam ser justos com os dois patinhos. (TAV).

Como aponta o diálogo, no contexto inicial da divisão fracionária, as discussões precisam retomar a ideia da divisão igualitária, abordada na aula anterior com o conceito de metade⁶. Embora os alunos não tenham demonstrado resistência ao conceito matemático de divisão em partes iguais, a situação gerou impacto sobre a justiça de se repartir igualmente.

Após terminar o desenho da divisão do pirulito por dois, a história prosseguiu:

A mãe de Dino já estava repartindo o pirulito quando chegou a vizinha e essa trouxe seu filho, que também queria um pedaço de pirulito. E agora Dino deve fazer uma nova repartição do pirulito. Utilizando a cartolina de três partes, os estudantes encontram algumas dificuldades.

A4: Não dá pra dividir em três!

A8: É impossível! (Apagando as linhas da cartolina)

A5: Vou dar a parte maior pro Dino!

A9: Se eu dividir assim (mostrando o caderno, no círculo duas linhas verticais bem centralizadas) fica um pedaço maior no meio, não fica igual.

A7: Quem ganhou o pirulito fica com a parte maior, o irmão com a parte menor e o que sobra fica com o Chato (vizinho).

A13: Por que a mãe dele não comprou mais pirulitos?

P: Vocês precisam ser justos, dividir o pirulito igual.

A8: Acho que o meu ficou justo. (TAV).

Intencionalmente, a imagem circular do pirulito causa uma dificuldade na divisão pelos alunos. Nesse processo, os alunos procuram resolver a situação de outros modos “inadequados” para os critérios estipulados na história (partes desiguais, questionamento dos motivos de não ter mais pirulitos, etc.). Conforme aponta Proença (2015), por ser uma superação conceitual em relação aos números naturais, em um contexto de resolução de problemas com o pensamento fracionário, é comum os alunos buscarem saídas não matemáticas.

Após produzir a representação da divisão por três, continuou-se a história:

Já estava tudo acertado pra divisão quando chegou o Patinho, amigo do Dino. Agora a divisão passou para quatro patinhos. Dino ficou de dividir seu pedacinho. Com o círculo de quatro partes os estudantes começaram a dividir.

A1: Ah não, mais um patinho!

A2: Foi só um patinho que dividiu, né?

⁶ A discussão encontra-se em Wolter (2022).

A3: Assim não! *Teu desenho tá errado (Apontando para o desenho do colega), foi só um que dividiu, não foi todos, precisa desenhar dentro de um pedaço só.*

A10: *Tu fez só dois riscos e tá pronto, eu fiz diferente.*

P: *Quantos patos ganharam pirulito?*

Turma: *Quatro.*

P: *Todos ganharam partes iguais?*

Alguns falaram sim, outros não.

Seguindo a historinha, ainda se fala em um quinto e em um sexto, então utilizando, as cartolinas de cinco e seis partes, fizemos as divisões em cinco e seis partes.

A4: *Professora, o pirulito é muito pequeno pra dividir em tantas pessoas!*

P: *Bom, pode ser um pirulito daqueles grandes de festa (TAV).*

Percebeu-se que as maiores dificuldades de divisão dos alunos estiveram na terça parte, uma vez que a representação figural não se tornou fácil. Ao realizar as outras divisões, notou-se que os alunos reutilizaram e ressignificaram estratégias já produzidas, tais como: dividir com linhas retas passando pelo centro ou linhas verticais ou horizontais para compensar a diferença de área do círculo.

Após a leitura, abordou-se questionamentos sobre os acontecimentos da história:

P: *Dividimos as coisas em nosso dia a dia? Se sim, de que forma?*

A11: *Sim, nos alimentos, nos objetos, reparto com minha irmã.*

A6: *Também dividimos o tempo.*

P: *Você concorda com a repartição do pirulito do pato? Justifique.*

A7: *Eu acho que o Dino tinha que ter ficado com a parte maior.*

A2: *Se tu fosse o irmão dele, tu não ia gostar de ficar com menos.*

P: *O que você aprendeu com a historinha?*

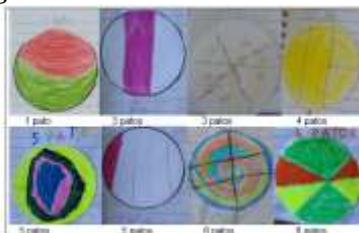
A4: *Aprendemos que precisamos repartir nossas coisas de forma justa com nossos irmãos e amigos (TAV).*

Nesse sentido, a leitura introduziu o estudo de frações de uma forma contextualizada com situações próximas às atividades cotidianas dos estudantes, como as divisões de alimentos. No decorrer da história, os alunos percebem a necessidade de repartir de forma igual, como sugerido pela mãe do patinho, sendo justo com todos. Percebe-se, nesse momento, a reflexão sobre práticas de solidariedade.

5.1.1 Análise de erros – Primeira etapa

Iniciou-se a tarde conversando sobre a historinha do pato Dino e seu pirulito, lembrando dos pirulitos confeccionados. Realizou-se, ainda, a correção em conjunto no quadro de alguns desenhos previamente selecionados por mim, no dia anterior. (TAV).

Nesse contexto, a pesquisadora explicou que havia escolhido desenhos para reflexão e que, antes de mudar (ou não) o desenho, era necessário observar e descobrir se estava certo ou errado. Abaixo são apresentados os desenhos selecionados.

Figura 1 – Desenhos selecionados

Fonte: Acervo da pesquisa.

Iniciou-se a discussão com a primeira imagem, referente a 1 pato.

P: O Dino, quando ganhou o pirulito inicialmente da mãe dele, ele precisou dividir?

T: Não.

P: Então o pirulito era só dele, certo? Se eu fosse pintar poderia fazer dessa forma (mostro o primeiro desenho representado por mim no quadro, a partir do desenho do aluno).

A7: Tem duas cores. Não pode.

A4: As cores pode, o que não pode é o risco no meio.

P: E como eu faço para deixar certo?

A4: Tira o risco que separa as cores (TAV).

Embora de imediato a representação de duas cores tenha parecido errada, percebe-se, pelo discurso dos alunos, que o grupo entende a unidade. Nesse sentido, segundo Cury (2019), o erro só pode ser significado e entendido pelo professor no contexto da explicação. Perante isso, nota-se que as duas cores não caracterizam um erro.

Já para duas partes, não houve erros dos alunos. Acreditamos que isso se deva a toda a discussão produzida sobre o conceito de metade, realizada em atividades anteriores. No entanto, para a divisão em três, a situação ficou complexa, uma vez que a representação figural não pareceu tão intuitiva para o grupo. Foram selecionados dois desenhos.

P: Observem, esse pirulito é para três patinhos [primeiro desenho representado para três patos, com duas linhas verticais]. Fui justa?

Turma: Sim... Não... Não... Nem um pouco justa.

P: Por quê?

A14: A parte do meio tá maior.

P: E se eu desenhar assim [fazendo o segundo desenho para três patinhos]. Fica justo?

A1: Quase, professora, tem dois iguais, mas ainda fica um com bem mais.

A5: É difícil esse com três!

P: Observem agora, alguns desenharam dessa forma [desenho a forma certa no quadro com transferidor, iniciando com um ponto central e adiciono três linhas distribuídas proporcionalmente].

A4: Esse tá bem justo. Tá certo.

A4: Professora, eu não fiz assim, precisa arrumar? Esse jeito [com transferidor] é fácil fazer.

P: Não, não precisa, o objetivo era vocês desenharem como vocês achavam que era, então não faz mal quem fez diferente (TAV).

Com a questão da terça parte, percebe-se que os entendimentos sobre como deveria ser

a divisão (três partes iguais) estavam presentes. Porém, as dificuldades aconteciam em relação à representação figural. Nesse sentido, a estratégia de análise de erro teve que ser apoiada em uma estratégia de representação figural. Vale ressaltar que a estratégia só recebeu a atenção do grupo a partir da necessidade criada pela análise do erro.

Após esse momento, partiu-se para a análise da divisão por quatro:

P: Com quatro divisões teve uma bem diferente [desenhando no quadro, o desenho que representa a divisão para quatro patos]. Foi justo? Todos receberam pedaços iguais de pirulito?

A1: Nunca.

A3: Não.

A17: Até os dois primeiros traços tá parecido, mas aquele cortado no meio tá muito menor.

A4: E os lados do círculo são menores. É redondo, não tem como ser igual.

P: E se eu desenhar assim? [mostrando uma forma certa].

A4: Eu fiz assim, assim tá justo (TAV).

A partir da análise da representação figural dos alunos da quarta parte – 4 patos (Figura 1) –, acreditamos que a estratégia utilizada pelo aluno foi utilizar a divisão por três e, em seguida, dividir uma das partes em duas. Assim, percebemos o erro por fluidez da unidade na fração parte-todo (Cavalcanti; Guimarães, 2008). Ou seja, no início da resolução da divisão por quatro, o aluno levou em conta todo o pirulito, porém, ao se deparar com somente três partes, considerou como unidade uma das partes, dividindo-a em duas.

Já com cinco partes, separamos duas representações. No momento em que realizava o desenho (primeiro desenho para cinco patinhos), a conversa na sala começou:

P: Está certo?

A17: Não professora, tá errado, o do meio é bem “mais pequeno”.

A3: Eu não ia querer um pedaço desse pirulito. Não tá justo.

P: Desenho o segundo desenho para cinco patinhos. E agora?

A4: Esse tá parecido com aquele de três, tá errado também.

A6: Os dos cantos estão “mais pequeno”.

P: E agora, como faço pra ficar certo? [Desenhando o círculo no quadro].

A4: Começa como foi o de três, coloca o pontinho no meio.

A1: Aí depois puxa as linhas, mas com cinco é bem difícil (TAV).

No contexto de análise do erro da quinta parte, os alunos compreendem que a divisão não é igualitária. O grupo tenta recuperar uma estratégia já apresentada pela professora: a inserção de um ponto central para divisão. Desse modo, parafraseando Brousseau (1983), que ressalta que o erro é efeito de um conhecimento anterior, consideramos que as estratégias de resolução também podem ser fruto de conhecimentos anteriores. Ou seja, os alunos buscam se apropriar de um mecanismo já apresentado na tentativa de contornar o desafio imposto.

Por fim, na divisão por seis, duas representações foram elencadas. A discussão

inicialmente passou pela primeira delas.

P: Teve alguns que fizeram [a primeira opção], e então?

T: Não.

P: O que tem errado?

A1: As laterais são “mais pequenas”. Não fica igual.

P: Busco mostrar a visualização dessa ideia, desenhando um quadrado na volta do círculo, mostrando que falta realmente pedaços de pirulito nas laterais (TAV).

A ideia da representação da docente foi inspirada na perspectiva histórica da quadratura do círculo (Boyer, 1996). Trata-se de um problema proposto na geometria grega, que visava construir um quadrado da mesma área de um círculo. O intuito dos gregos era produzir uma representação de melhor manejo de estudo matemático do que o círculo (Boyer, 1996). Nesse sentido, a intenção aqui foi inscrever o círculo no interior do quadrado para refletir que não é possível utilizar as mesmas estratégias para dividi-los.

Essa compreensão já vinha sendo construída pelos alunos, como evidenciado na fala de A1 acima. Desse modo, a representação apresentada serviu para corroborar o pensamento do grupo e generalizar a ideia, como “outro modo de ver o objeto matemático” (Moraes, 2018).

Já na segunda representação, a estratégia de inserção do ponto central por meio do transferidor foi introduzida novamente e ressignificada:

P: Desenho então a segunda opção para 6 patinhos. E esse, o que vocês acham?

A7: Esse tá certo, tem o pontinho no meio.

A1: Tem o pontinho, mas os desenhos não estão iguais. Acho que tá errado.

A18: Esse também tá errado.

P: E como arrumamos?

A4: Como já tem o pontinho no meio, só divide certo as linhas (TAV).

A partir do diálogo, elenca-se que a estratégia inicial necessita ser refinada. Para além do ponto central, as linhas precisam ser estruturadas de modo que a divisão seja igualitária. Ressalta-se que não foi intenção da intervenção aprofundar essa estratégia (discussão angular, por exemplo), visto que são alunos do 4º ano do Ensino Fundamental.

5.2 Segunda etapa da intervenção

Na atividade do dia, discutiu-se, com o auxílio do livro didático da turma (Bem-me-quer), conceitos de leitura e escrita de frações, identificação de numerador e denominador.

P: Na leitura, o número de cima chamamos de numerador, que normalmente na figura vai ser a parte colorida, já o denominador é a parte de baixo que corresponde à quantidade de vezes que dividimos a figura (TAV).

Das atividades oferecidas pelo livro, somente uma causou dúvida na maioria dos alunos:

Figura 2 – Atividade de fração

2 Qual das frações escritas ao lado corresponde à quantidade de garrafas vazias em cada item?

a)

b)

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{4}{10}$

$\frac{3}{5}$

Fonte: Bem-me-quer – Matemática/4º ano (Bordeaux *et al.*, 2007).

Um incômodo tomou conta do grupo. Não haveria resposta correta para a questão.

A3: Professora, tem 6 garrafas na letra A, não tem nenhuma nas respostas?

A2: A letra B também não tem, são 12 garrafas ao todo? (TAV).

Dessa forma, a professora nota que o grupo esbarrou em um obstáculo sobre parte-todo. Assim como pontua Krutetskii (1976), o professor perante o erro deve perceber as compreensões que levaram o aluno àquela elaboração. Nesse caso, foi necessário problematizar a ideia de totalidade dos alunos: no item *a*, não seriam 10 garrafas, mas 5 grupos de 2 garrafas; e, por sua vez, no item *b*, não seriam 12 garrafas, mas 3 grupos de 4 garrafas.

Nesse sentido, com base na ideia de descoberta de Borasi (1996), a intenção é dar condições para que os alunos descubram a respostas. Como estratégia, a pesquisadora apresentou pistas para o grupo:

A4: [...] vocês não estão olhando direito, tem risco no meio das garrafas!

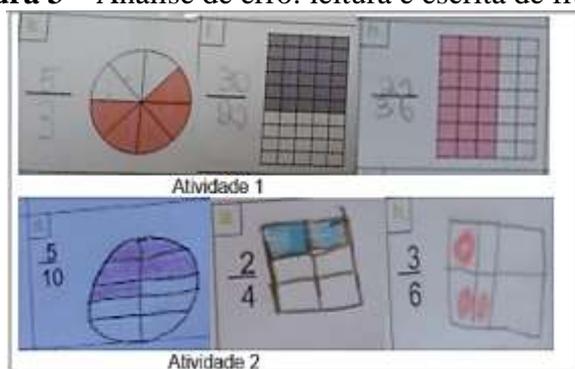
A15: Se contar pelos riscos aí tem, dá certo. Descobri!

P: Observem que as garrafas estão em grupos, elas aparecem com divisões, cada divisão é 1 número. Na letra A, por exemplo, ao todo temos 5, desses cinco usamos quantos?

A3: Tem três espaços, então 3 em cima e 5 embaixo (TAV).

5.2.1 Leitura e escrita de frações – análise de erros

Iniciou-se a aula com a correção da atividade do dia anterior, conforme exposto na seção anterior. Selecionou-se três casos de respostas dos alunos, os quais foram analisados pela turma.

Figura 3 – Análise de erro: leitura e escrita de frações

Fonte: Acervo da pesquisa.

As atividades demonstram duas transições de representação necessárias aos alunos. Na primeira atividade (Figura 3), ocorre a transição da representação figural para a linguagem numérica. Já na segunda, a ação é oposta: a transição que ocorre é da linguagem numérica para a representação figural.

Na discussão sobre o primeiro grupo, o debate foi o seguinte:

P: Observando a atividade 1, primeiro exemplo [letra K], o colega de vocês colocou cinco terços como resposta, será que está certo?

A5: Tem cinco partes pintadas, está certo o número de cima.

A1: O três tá errado, pois deveria ser oito.

P: Por que deveria ser oito?

A1: O denominador é todas as divisões do desenho e não o que sobra.

P: E no segundo exemplo [letra L], está certo ou errado?

A4: A pessoa também errou o número de baixo, não é vinte, e sim 50!

P: Todos conseguem perceber que o denominador, ou seja, o número de baixo deve ser todas as divisões da figura?

T: Agora sim.

P: E nesta? [Desenhando o exemplo h]. Tem algo errado?

A9: O numerador tá certo, 3×7 é vinte e um, então está certo, mas o número de baixo a pessoa que fez contou errado, faltou cinco (TAV).

Nesse processo de transição figura-número, nota-se que alguns alunos retornam à questão do que representa a totalidade, o denominador. Uma das suspeitas é que este erro esteja associado aos estudos de números naturais vividos pelos alunos. Como docentes, imaginamos que os alunos realizam a seguinte ação: Contam quantas partes estão pintadas e inserem o numerador. Depois, contam o restante (não pintados) e colocam o denominador. Essa ideia é corroborada na fala de A1: O denominador é todas as divisões do desenho e não o que sobra.

Deste modo, a análise deste erro no grupo cria a correção. No entanto, percebe-se que esta discussão não é superada facilmente. A tradição da contagem proveniente do grupo dos números naturais demonstra-se como perspectiva intensa de resolução da transição figura-

-número no campo da fração.

Após esse debate, segue-se para os exercícios selecionados na atividade 2.

P: Na atividade 2 vocês deveriam fazer o contrário do número 1, aqui vocês têm a fração e deveriam fazer o desenho, separei algumas atividades dos colegas pra gente observar junto. [Desenhando o primeiro exemplo]. Está certo?

A1: Tá sim! Tem 10 partes e pintou cinco, está certo!

A12: As laterais são menores, o desenho não tá dividido como deve ser.

P: Como que ficaria certo pra dividir, alguém sabe?

A10: Do jeito que corta pizza, com o ponto no meio.

P: E agora, será que esse tá certo? [Terminando de desenhar o segundo exemplo].

A18: A pessoa dividiu os espaços direitinho!

A4: Mas tem quadrinho demais! Tá errado por isso.

P: E como arrumamos?

A17: Apaga os dois últimos quartinhos da linha.

P: E esse? [Fazendo o terceiro desenho].

A2: Esse está certo, professora! Tem seis quadrinhos e a pessoa pintou três.

P: Todos concordam?

A4: Acho que a última linha tá muito gorda, não foi junto com os outros quadrinhos. É isso? (TAV).

Na discussão do segundo grupo, transição de representação número-figura, visualiza-se que a questão da divisão em partes iguais é o que toma maior evidência. Embora não tenha sido elencada a medição para a repartição, o visual aparente das imagens trouxe problematizações para o grupo. As laterais não podem ser menores (A12) e nem a “linha” muito “gorda” (A4).

Um próximo passo para o estudo (não realizado aqui) seria a padronização das medidas das imagens. Essa ação poderia estar associada à discussão de área, por exemplo.

Sobre esse erro de representação, a pesquisadora elabora uma síntese para o grupo:

P: Sim, é isso! Conseguiram ver, estava tudo dividido com número igual, pintado com número igual, mas dividido com tamanho diferente. Imaginem se é um bolo, vocês iriam gostar de receber a parte menor?

A1: A “mais grande” é claro!!!!

A4: Mas não ia ser justo! (TAV).

Vale ressaltar que o segundo pensamento desse grupo traz indícios semelhantes ao erro do primeiro: a associação equivocada com os números naturais. Pode-se imaginar que o aluno leu o denominador 2 e desenhou dois quadrados pintados. Leu o numerador 4 e desenhou quatro quadrados sem preenchimento. No entanto, esse erro não foi amplamente discutido pelo grupo, concentrando no pensamento igualitário das partes da fração.

6 Considerações finais: síntese integradora

Como considerações finais da pesquisa, elenca-se a importância do levantamento prévio

dos conhecimentos prévios dos alunos pelos professores, uma vez que o erro é fruto das elaborações dos estudantes acerca do conhecimento científico (Cury, 2019). Assim, trazê-las na intervenção permitiu dar evidência e reflexão para o pensamento do grupo. As respostas iniciais tinham conotação com exemplos e questões vividas no cotidiano, assim como já percebido por Moraes (2018). Com a análise de erros, as respostas adquiriram novas significações matemáticas, associadas ao conceito matemático debatido.

Não houve a extinção de erros em relação ao conceito de fração. Visualizou-se novos erros, oriundos de um patamar mais reflexivo. Assim, não há um “fechar” do conceito, mas oportunidades para novas intervenções com os mesmos alunos. O debate em grupo passa a agir como problematizador do conceito e fonte para constituir novas ideias sobre fração, retirando do docente o papel de trazer as respostas corretas.

O uso de diferentes representações, bem como os diversos momentos em que os alunos produziram formas representacionais de pensar a fração, potencializou uma ampliação do conceito. Assim como o próprio conceito, a exatidão da forma de representar precisa ser problematizada com o grupo, uma vez que ela é oriunda de como os alunos pensam a fração.

Ao longo de toda a intervenção, a ideia de metade e seu uso social foi levantada pelo grupo, o que nos faz corroborar a afirmação de Cruz (2003, p. 43), quando ressalta que “o referencial de metade é um recurso poderoso para a compreensão inicial das crianças de conceitos matemáticos como proporção, probabilidade e fração”.

Além disso, a ideia de parte-todo tornou-se porta de entrada pertinente para o trabalho com o conceito de fração, uma vez que potencializa a percepção visual do aluno, bem como a leitura e a escrita da fração na sua forma a/b (Nunes; Bryant, 1997). Ao término do processo, visualiza-se um grupo de alunos que incorporam a iniciativa de reflexão sobre os erros em suas produções.

Referências

ANDRÉ, M. O que é um estudo de caso qualitativo em Educação? **Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 22, n. 40, p. 95-103, jul./dez. 2013. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Marli-Andre/publication/311361132>. Acesso em: 22 jan. 2022.

ANDRÉ, M. Pesquisa em Educação: questões de teoria e método. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS, 5, 2005, Bauru. **Anais [...]**. Bauru: ABRAPEC, 2005.

ARISTÓTELES. **Metafísica**. Tradução Valentin García Yebra. 2. ed. Madrid: Gredos, 1982.

BORASI, R. **Reconceiving mathematics Instruction: a Focus on Errors**. Norwood, Nj: Ablex Publishing Corporation, 1996.

- BORDEAUX, A. L. *et al.* **Novo bem-me-quer matemática, 4º ano**. São Paulo: Editora do Brasil, 2007. (Coleção bem-me-quer).
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.
- BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. **Recherches em didactique des Mathématiques**, [s. l.], v. 4, n. 2, p. 165-168, 1983.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa, Portugal: [s. n.], 1951.
- CAREY, D. The patchwork quilt: a context for problem solving. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. 39, n. 4, p. 199-203, dez. 1992.
- CAVALCANTI, E. M.; GUIMARÃES, G. L. O significado de frações em livros didáticos das Séries Iniciais. In: SIPEMAT – SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2008, Recife. **Anais [...]**. Recife: UFRPE, 2008. (Publicado em CD-ROM).
- CHEVALLARD, Y.; FELDMANN, S. **Pour une analyse didactique de l'évaluation**. Marseille: IREM, 1986.
- CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.
- CRUZ, L. **Abordando frações em perspectiva histórica: uma possibilidade de ensino para a Educação Básica**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC. São Paulo. 2016.
- CRUZ, M. S. S. **Resolvendo adição de frações através de estimativas: um estudo exploratório**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2003.
- DAMIANI, M. F. *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Revista Cadernos de Educação**, [s. l.], n. 45, p. 57-67, 2013.
- GENTILE, A. **Skill acquisition: action, movement and neuromotor process**. Rockville: Aspen, 1987.
- JUCÁ, R. S. O estudo do erro: contributos para o trabalho docente do professor de matemática. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, [s. l.], p. 1-20, 2022.
- KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Chicago: The University of Chicago Press, 1976.
- LEIBNIZ, G. **Ensaio de Teodiceia**. Trad. William Piau e Juliana Cecci. São Paulo: Liberdade, 2013.
- LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.
- MACHADO, N. **O pirulito do pato**. [S. l.]: Scipione, 1992.
- MORAES, J. C. P. **Experiências de um corpo em Kandinsky: formas e deformações num passeio com crianças**. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) — Centro de Ciências da Educação. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2014.

MORAES, J. C. P. **Insubordinação, Invenção e Educação**: a produção de reflexões por meio do espaço na formação inicial docente em pedagogia. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2018.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T. *et al.* The effect of situations on children's understanding of fractions. **British Society for Research on the Learning of Mathematics**. Oxford, jun. 2003.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. **Revista Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 17, n. 33, jan./abr., 2006.

PLATÃO. **Sofista**. Tradução Jorge Paleikat e João Cruz Costa. São Paulo: Victor Civita, 1972.

PROENÇA, M. C. O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**. v. 29, n. 52, p. 729-755, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a15>. Acesso em: 22 mar. 2022.

SANTO AGOSTINHO. **A Cidade de Deus**: contra os pagãos. Parte 2 (livros 11-22). Petrópolis: Vozes, 1999. (Pensamento Humano, 7).

SILVA, M.; ALMOULOU, S. As Operações com Números Racionais e seus significados a partir da Concepção Parte-todo. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2105>. Acesso em: 22 mar. 2022.

SOUSA, M. C. A organização do ensino de fração na Educação Básica a partir do movimento lógico-histórico. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 7, n. 13, p. 60-83, 2014.

SOUZA, A.; OLIVEIRA, R. Articulação entre literatura infantil e matemática: intervenções docentes. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 23, n. 37, p. 955-975, dez. 2010.

TEIXEIRA, L. R. M. A análise de erros: uma perspectiva cognitiva para compreender o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos. **Nuances**, [s. l.], v. 3, p. 47-52, set. 1997.

WOLTER, L. R. ; MORAES, J. C. P. A fração nos Anos Iniciais: um enfoque nas pesquisas com crianças. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Itabaiana, v. 7, p. 60-76, 2022.

WOLTER, L. R. **Frações no quarto ano do Ensino Fundamental**: um debate com crianças a partir de seus erros. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Pampa. Jaguarão. 2022.