Sociedade Brasileira de Educação Matemática

emr

# Educação Matemática Realística: notas históricas e teóricas

Gabriel dos Santos e Silva[1]

**Resumo:** A Educação Matemática Realística é uma abordagem ao ensino de matemática preconizada por Hans Freudenthal, um matemático alemão que trabalhou na Universidade de Utrecht (nos Países Baixos) em oposição às ideias do Movimento da Matemática Moderna. Neste ensaio teórico, apresenta-se um breve apanhado histórico da Segunda Guerra Mundial, da Guerra Fria e das reformas curriculares das décadas de 1950 e 1960 que culminaram no Movimento da Matemática Moderna. Em seguida, é desenhada uma pequena biografia de Hans Freudenthal, abordando aspectos de sua vida e obra; faz-se, também, um breve histórico da reforma curricular neerlandesa presidida por Freudenthal. Por fim, são apresentados os seis princípios da Educação Matemática Realística, a saber: da atividade, da realidade, de níveis, da interatividade, do entrelaçamento e da orientação.

**Palavras-chave:** Educação Matemática Realística. Hans Freudenthal. Movimento da Matemática Moderna. Reformas Curriculares.

# Realistic Mathematics Education: historical and theorical notes

**Abstract:** Realistic Mathematics Education is an approach to mathematics teaching advocated by Hans Freudenthal, a German mathematician who studied at the University of Utrecht (in the Netherlands) in opposition to the ideas of the Modern Mathematics Movement. In this theoretical essay, a brief historical overview of the Second World War, the Cold War and the curricular reforms of the 1950s and 1960s that culminated in the Modern Mathematics Movement is presented. Then, a short biography of Hans Freudenthal is presented, addressing aspects of his life and work; a brief history of the Dutch curriculum reform presided over by Freudenthal is also made. Finally, the six principles of Realistic Mathematics Education are presented, namely: activity, reality, level, interactivity, intertwinement and guidance.

**Keywords**: Realistic Mathematics Education. Hans Freudenthal. Modern Mathematics Movement. Curricular Reforms.

# Educación Matemática Realista: apuntes históricos y teóricos

**Resumen:** La Educación Matemática Realista es un enfoque de la enseñanza de las matemáticas defendido por Hans Freudenthal, un matemático alemán que estudió en la Universidad de Utrecht (en los Países Bajos) en oposición a las ideas del Movimiento de Matemáticas Modernas. En este ensayo teórico se presenta una breve reseña histórica de la Segunda Guerra Mundial, la Guerra Fría y las reformas curriculares de las décadas de 1950 y 1960 que culminaron en el Movimiento de las Matemáticas Modernas. Luego, se presenta una breve biografía de Hans Freudenthal, abordando aspectos de su vida y obra; también se hace una breve historia de la reforma curricular holandesa presidida por Freudenthal. Finalmente, se presentan los seis principios de la Educación Matemática Realista, a saber: actividad, realidad, niveles, interactividad, entrelazamiento y orientación.

**Palabras clave:** Educación Matemática Realista. Hans Freudenthal. Movimiento de Matemáticas Modernas. Reformas Curriculares.

## 1 Aspectos históricos

A década de 1950 foi marcada pelas consequências do fim da Segunda Guerra Mundial.

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR, Brasil. E-mail: gabriel.santos22@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-7527-7763.

Após a derrota do Eixo — formado principalmente por Alemanha, Japão e Itália — para os Aliados — formados majoritariamente pela União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS), Estados Unidos da América (EUA), China e Reino Unido —, a guerra sangrenta se encerrou, dando origem a uma guerra sem lutas e batalhas, conhecida como Guerra Fria.

> A peculiaridade da Guerra Fria era a de que, em termos objetivos, não existia perigo iminente de guerra mundial. Mais que isso: apesar da retórica apocalíptica de ambos os lados, mas sobretudo do lado americano, os governos das duas superpotências aceitaram a distribuição global de forças no fim da Segunda Guerra Mundial, que equivalia a um equilíbrio de poder desigual mas não contestado em sua essência. A URSS controlava uma parte do globo, ou sobre ela exercia predominante influência — a zona ocupada pelo Exército Vermelho e/ou outras Forças Armadas comunistas no término da guerra — e não tentava ampliá-la com o uso de força militar. Os EUA exerciam controle e predominância sobre o resto do mundo capitalista, além do hemisfério norte e oceanos, assumindo o que restava da velha hegemonia imperial das antigas potências coloniais. Em troca, não intervinha na zona aceita de hegemonia soviética (HOBSBAWM, 1995, p. 179).

Essa década, de 1950, também ficou conhecida como “Era dos Mísseis”, pois as duas superpotências buscavam desenvolver pesquisas e construir mísseis e foguetes, como em uma “corrida” (ROLIM, 2012). No período da Segunda Guerra Mundial, a Alemanha investiu para desenvolver foguetes para transportar bombas. “Depois da guerra, os EUA e a URSS aproveitaram a experiência dos alemães em seus programas de armamentos, cujos foguetes oportunamente também se prestariam à exploração do espaço” (CARLEIAL, 1999, p. 22).

Ao que se refere à exploração espacial, ambos os países buscavam conquistar o espaço cósmico, em uma corrida que só teria fim nos anos 1970. Nessas duas décadas de Corrida Espacial, os soviéticos tiveram diversas conquistas, como “o primeiro satélite artificial (o Sputnik, 1957), o primeiro vôo espacial tripulado por homem e mulher (1961; 1963) e os primeiros passeios espaciais” (HOBSBAWM, 1995, p. 419).

O lançamento do Sputnik ao espaço intensificou em professores estadunidenses o sentimento de que havia algo errado com a matemática ensinada nas escolas do país. Além desse evento, observava-se que os estudantes tinham notas mais baixas em matemática que em outras disciplinas e que havia um alto desinteresse dos alunos por essa disciplina (KLINE, 1976). Começou-se, então, um movimento de reforma no ensino da matemática nos Estados Unidos da América e, consequentemente, em outros países.

Um tempo antes desses acontecimentos, na França da década de 1930, um grupo de matemáticos começou a utilizar "Nicolas Bourbaki" como pseudônimo para publicar diversas obras a respeito da matemática, a partir das "leis básicas da álgebra". Bourbaki via a matemática como uma "bola de fios emaranhados" de tal forma que os fios do centro estão completamente unidos (EVES, 2011).

> Nesse emaranhado há fios, ou pontas de fios, que saem em várias direções e que não têm nenhuma conexão íntima com nada do que está dentro. O método bourbakiano corta todos esses fios livres e se concentra no apertado núcleo da bola de onde tudo o mais se desembaraça. O núcleo apertado contém as estruturas básicas e os processos ou instrumentos fundamentais da matemática [...]. É apenas essa parte da matemática que N. Bourbaki tenta arranjar logicamente e moldar numa teoria coerente e fácil de aplicar (EVES, 2011, p. 692).

Então, na década de 1950, surgiram algumas primeiras reformas isoladas no ensino da matemática. No último ano dessa década, com o apoio da OEEC (*Organization for European Economic Cooperation*), ocorreu a Conferência de Royaumont, na França, dedicada a repensar o ensino da matemática na escola secundária. Participaram dessa conferência os países: Áustria, Bélgica, Canadá, Dinamarca, França, Alemanha, Grécia, Irlanda, Itália, Luxemburgo, Países Baixos, Noruega, Suécia, Suíça, Turquia, Reino Unido, Estados Unidos e Iugoslávia. Segundo as regras do evento, cada um desses países deveria enviar à Conferência de Royaumont três "delegados": um matemático, um professor dessa disciplina no ensino secundário e um educador da área da matemática ou membro do Ministério da Educação responsável pela matemática (SOARES, 2001). As principais conclusões apresentadas nessa conferência foram:

> 1. Não é necessário um programa de álgebra à parte dos de aritmética, de geometria, de trigonometria e de análise, mas um programa que combine os conteúdos destes, dando unidade à matemática. Os conceitos fundamentais são os de conjunto, relação, função e operações; as estruturas fundamentais são as de grupo, anel, corpo e espaço vetorial.
> 2. O simbolismo moderno para conjuntos, relações e aplicações deve ser adotado tão logo quanto possível, e ser aplicado de um modo coerente e contínuo.
> 3. Deve dar-se maior importância ao emprego de representações gráficas e seus novos tipos.
> 4. Grande parte da álgebra tradicional, de pouca ou nenhuma aplicação no estudo posterior de matemática, deve ser eliminada. [...]
> 5. A geometria euclidiana tradicional ou sintética deve ser modificada em grande parte - e também eliminada - em detrimento de outros métodos de estudo do espaço. Nas escolas secundárias, deve ser ensinada a geometria vetorial condizente aos espaços vetoriais, assim como a álgebra linear.
> 6. Deve-se eliminar o curso isolado de trigonometria, e seu conteúdo deve ser

incorporado aos programas de álgebra, de geometria e de análise. Oferecida desta maneira, passa a ser uma parte da matemática unificada.
7. A análise, o estudo das desigualdades, limites, diferenciação, integração e funções, devem fazer parte da matemática da escola secundária. A maneira de abordar este estudo não tem porque ser rigorosa ao extremo, pode fazer-se uma abordagem intuitiva e correta. A ênfase deve estar nas técnicas de cálculo, apoiadas na compreensão da teoria que se baseiam.
8. A probabilidade e a inferência estatística, juntamente com a análise combinatória do ponto de vista dos conjuntos, funções de conjuntos e espaços amostrais constituem um novo campo muito apropriado para ser tratado na escola secundária.
9. É preciso contar com um grupo de especialistas composto de pessoas de diferentes países para encomendar a elaboração de programas detalhados de ensino de matemática para as escolas secundárias (FEHR; CAMP; KELLOG, 1971, p. 9-10, tradução nossa).

Iniciou-se no mundo, então, um movimento denominado Movimento da Matemática Moderna (MMM), desencadeado, principalmente, pelos Estados Unidos da América. Esse movimento pode ser definido como "uma abordagem 'estruturalista' que considera a matemática como centrada em estruturas básicas, dando ênfase ao estudo da matemática por si, sem uma preocupação com aplicações" (SILVA, 2018, p. 20).

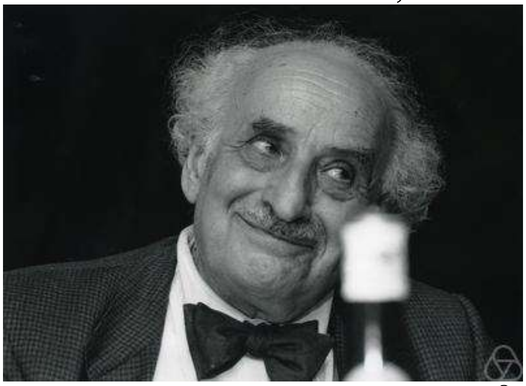
Segundo Bürigo (1989), com o MMM, o ensino da matemática passou a dar ênfase à lógica, à topologia, aos conjuntos, aos conjuntos numéricos, às relações e funções, além de um abandono à Geometria Euclidiana e um enfoque nas propriedades das operações (KLINE, 1976; SOARES, 2001). Além da abordagem estruturalista ao ensino da matemática, duas outras abordagens predominavam em países como o Reino Unido e os Países Baixos: a empirista e a mecanicista, respectivamente.

Em linhas gerais, a abordagem mecanicista é focada em cálculos apenas com números, sem aplicações, em que os estudantes são "treinados" por meio de "exercícios" para a resolução de procedimentos fixos; a matemática é ensinada de forma fragmentada; há pouca (ou nenhuma) atenção dada aos problemas de contexto e eles nunca são tomados como ponto de partida. Já a abordagem estruturalista é aquela derivada do Movimento da Matemática Moderna, em que a matemática é trabalhada a partir de suas "estruturas"; os problemas de contexto são trabalhados enquanto se estuda o conteúdo utilizado para resolvê-lo, e cabe ao estudante mostrar que compreendeu o procedimento de resolução de um problema apresentado pelo professor a partir da resolução de outro problema. Por sua vez, na abordagem empirista, os estudantes são estimulados a realizar investigações; é dada grande atenção à esquematização preliminar dos estudantes ao resolver um problema, esperando-se que comecem formulando hipóteses, que são testadas e discutidas; dá-se pouca atenção ao fechamento matemático após a resolução dos problemas de contexto (TREFFERS; GOFFREE, 1985; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

## 2 Hans Freudenthal e o Instituto Freudenthal

Em 17 de setembro de 1905, nasceu Hans Freudenthal (Figura 1), na cidade de Luckenwalde, capital do distrito de Teltow-Fläming, no estado de Brandenburg, na Alemanha; seus pais eram Elisabeth Ehmann e Joseph Freudenthal (VAN EST, 1994). Ele iniciou seus estudos em matemática na Universidade de Berlim, a partir de 1923. Freudenthal (1987) afirmou ter passado por dificuldades financeiras durante o andamento do seu curso de graduação. No início, deslocava-se a pé até a estação de trem para ir a Berlim, ficando na cidade do início da manhã até o final do dia; por vezes, voltava para casa próximo à meia-noite, para não perder eventos importantes, como palestras de Albert Einstein.

**Figura 1** – Hans Freudenthal em 1984, aos seus 79 anos



Fonte: *Oberwolfach Photo Collection*[2]

Do segundo semestre em diante, passou a morar em Berlim e se acomodou em quartos alugados, todos em situações precárias. Ao final do seu terceiro semestre, um grupo de trabalho de matemática e física, o Mapha (acrônimo para o alemão *math-physikatische Arbeitsgemeinschaft*[3]), lhe proporcionou trabalhar com aulas particulares, o que lhe possibilitou pagar seus estudos (FREUDENTHAL, 1987).

[2] https://opc.mfo.de/
[3] "Grupo de trabalho matemática-física", em tradução livre.

Em 1930, Freudenthal concluiu seu doutorado na Universidade de Berlim[4] orientado por Heinz Hopf. Logo em seguida, o matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer, que trabalhava com topologia e intuicionismo, pediu um estágio na Universidade de Amsterdam. Freudenthal havia conhecido Brouwer em 1927 em uma palestra na Universidade de Berlim e candidatou-se a uma vaga para ser seu assistente, pois tinha interesse em intuicionismo (FREUDENTHAL, 1987).

> Como mencionado antes, foi seu interesse pelo intuicionismo, e não pela topologia, que foi a principal razão para as nomeações de Freudenthal como assistente de Brouwer em 1930. Em Amsterdã, Freudenthal conheceu [Witold] Hurewicz, outro assistente de Brouwer, que viera para Amsterdã alguns anos antes precisamente através de seu interesse em topologia. Embora Brouwer não estivesse mais ativamente interessado em topologia naquela época, ambos, como Freudenthal escreveria mais tarde, consideravam sua assistência uma honra e um desafio (VAN EST, 1994, p. 61, tradução nossa).

Freudenthal (1987) considerou que sua viagem de Berlim a Amsterdam foi uma viagem apenas de ida, ainda que ele tenha voltado a Berlim algumas vezes durante sua vida. Em Amsterdam, dois eventos marcaram a vida de Freudenthal: estudar topologia e intuicionismo com Brouwer e conhecer sua esposa, Suus Lutter.

Freudenthal trabalhou na Universidade de Amsterdam como convidado, sem receber salário, dividindo cursos com Arend Heyting (também ex-aluno de Brouwer). Os cursos oferecidos pela dupla eram de Teoria dos Grupos, Teoria das Medidas, Análise Complexa, Topologia, Operadores Lineares, entre outros (VAN EST, 1994). Porém, com os avanços da Segunda Guerra Mundial, Freudenthal foi suspenso de suas funções na Universidade de Amsterdam, por ser judeu.

> Essa situação permitiu, por um lado, muito tempo para trabalhos pessoais – os estudos históricos e alguns trabalhos publicados no pós-guerra foram frutos deste período. [...] Por outro lado, porém, a situação era demasiado ameaçadora e ainda mais à medida que a guerra avançava, para permitir um verdadeiro "desfrute" desta "licença" forçada. É provavelmente devido em grande parte aos esforços da Sra. [Suus Lutter] Freudenthal, que sempre que possível agia em defesa de seu marido, que a família Freudenthal foi poupada da mais grave provação. Algumas prisões de curta duração, um período em um campo de trabalho na Holanda e um período de esconderijo no sul do país podem, afinal, ser considerados um final feliz (VAN EST, 1994, p. 62,

[4] A tese de Freudenthal é intitulada "*Über die Enden topologischer Räume und Gruppen*" ("Sobre as extremidades dos espaços e grupos topológicos", em tradução livre) e foi defendida em 1930. O título de doutor só foi obtido em 1931, quando o periódico *Mathematische Zeitschrift* aceitou seu artigo para publicação (VAN EST, 1994).

tradução nossa).

Com o fim da Segunda Guerra Mundial, Freudenthal recebeu uma proposta da Faculdade de Ciências da Universidade de Utrecht (nos Países Baixos) para ocupar a cadeira de Geometria. “Um aspecto atraente da oferta de Utrecht era a possibilidade de modernizar o currículo de matemática em colaboração com Popken, o candidato à cátedra de Análise. Isso facilitou a transição e um novo período começou” (VAN EST, 1994, p. 62, tradução nossa). Freudenthal afirmou que sua ida de Amsterdam a Utrecht “não foi uma viagem, mas um longo processo cujas feridas dolorosas demoraram a cicatrizar” (FREUDENTHAL, 1987, p. 117, tradução nossa).

Na Universidade de Utrecht, Freudenthal trabalhou até o fim de sua vida. Suas principais publicações foram *Mathematics as an Educational Task* – “Matemática como uma Tarefa Educacional” (FREUDENTHAL, 1973), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* – “Fenomenologia Didática das Estruturas Matemáticas” (FREUDENTHAL, 1983), *Revisiting Mathematics Education* – “Revisitando a Educação Matemática” (FREUDENTHAL, 1991) e *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven* – “Escreva isso, Hans. Recortes de uma vida” (FREUDENTHAL, 1987).

Os três primeiros livros citados apresentam as principais ideias de Freudenthal em relação à matemática e ao seu ensino. São eles que dão sustento à abordagem de ensino denominada Educação Matemática Realística. O quarto livro é uma obra de cunho autobiográfico, com passagens da vida de Freudenthal, de acordo com o próprio autor. “Não era para ser uma autobiografia, pois ele falhou em ver (ou não queria ver) uma estrutura clara nisso, mas sim pedaços e pedaços, instantâneos de sua vida, reunidos enquanto limpava sua estante” (GOFFREE, 1994, p. 22, tradução nossa).

Além das publicações dos livros, Freudenthal colocou-se como um forte opositor às ideias do Movimento da Matemática Moderna. Ele próprio declarou ter subestimado a Conferência de Royaumont:

> Assim, no final de 1959, foi criada a famosa Conferência de Royaumont. Não me deixei delegar porque estava farto desse tipo de conferência. Acabou sendo um erro capital. Royaumont não era uma conferência qualquer, os governos enviaram representantes para ela – uma conferência investida de autoridade. Se eu estivesse lá, poderia me opor às decisões de Royaumont? Em todo caso, eu poderia ter gritado mais alto que meu renomado amigo Dieudonné. Em retrospecto, não foi apenas um erro não ter ido à Royaumont, mas foi contra

> o meu hábito de não ficar indiferente (FREUDENTHAL, 1987, p. 350, tradução nossa).

Como parte de sua oposição a esse movimento, duas ações de Freudenthal podem ser destacadas: sua participação no projeto Wiskobas[5], preconizado por Edu Wijdeveld, Fred Goffree e Adri Treffers, e a direção do *Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs* – "Instituto de Desenvolvimento da Educação Matemática" (IOWO). Em relação à primeira,

> Freudenthal está fortemente associado a Wiskobas. Isso é certo e errado. Errado, porque Wiskobas se originou em 1968 sem o envolvimento de Freudenthal e continuou depois de 1981 sem sua participação direta. Certo, por causa da influência duradoura de sua gama de ideias sobre o trabalho de Wiskobas (TREFFERS, 1994, p. 89, tradução nossa).

O propósito do Wiskobas era "a inovação da educação matemática em nível nacional por meio do ensino nas escolas de formação de professores" (TREFFERS, 1987, p. 11, tradução nossa). Ao mesmo tempo, Freudenthal foi convidado a dirigir o IOWO — que, à época, trabalhava em uma reforma do currículo de matemática. A abordagem desse instituto era a RD&D, na qual se seguiam, basicamente, três etapas: pesquisa, desenvolvimento e difusão das ideias. Freudenthal se opunha a essa proposta, pensando que o desenvolvimento do currículo não deveria ocorrer senão junto a uma mudança nas práticas educacionais (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000).

> Além disso, o desenvolvimento educacional não apenas implicava que a implementação do currículo fosse antecipada desde o início, mas também implicava a escolha de uma ampla abordagem de mudança, incluindo formação de professores, aconselhamento, desenvolvimento de testes e formação de opinião - tudo baseado na mesma filosofia educacional (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 789, tradução nossa).

Em 26 de janeiro de 1971, o IOWO tornou-se parte da Comissão de Modernização do Currículo de Matemática do governo (GOFFREE, 1994), o que proporcionou a Freudenthal a oportunidade de reformar o currículo de matemática dos Países Baixos por meio de uma abordagem que denominou *realística*, desenvolvida nas pesquisas do IOWO e no projeto Wiskobas. Para Treffers (1994, p. 89, tradução nossa), "foi Freudenthal quem em 1971 – após a fundação do IOWO – colocou Wiskobas no caminho da Educação Matemática Realística, longe do caminho trilhado da aritmética tradicional e longe do emergente Movimento da

[5] A expressão *Wiskobas* é um acrônimo das palavras *Wiskunde* (Matemática) e *Basisschool* (Escola primária).

Matemática Moderna".

Em 1981, o IOWO passou a ser chamado de *Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum* – "Pesquisa em Educação Matemática e Centro de Informática Educacional" (OW&OC), liderado pelo Prof. Frederik van der Blij[6], dando continuidade aos trabalhos do grupo do IOWO.

Em 13 de outubro de 1990, Freudenthal "faleceu pacificamente, sentado em um banco de parque em uma manhã ensolarada" (VAN EST, 1994, p. 63, tradução nossa). Em 1991, o livro *Revisiting Mathematics Education* foi lançado e o OW&OC passou a ser chamado de Instituto Freudenthal[7]. Ainda hoje, pesquisadores de Educação em Ciências e de Educação Matemática trabalham em prol do currículo neerlandês, que está baseado na abordagem realística desde a década de 1970.

## 3 Princípios da Educação Matemática Realística

A Educação Matemática Realística está fundamentada em seis princípios, a saber: da atividade, de níveis, da interatividade, da realidade, do entrelaçamento e da orientação (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

O *princípio da atividade* se refere à visão da matemática como uma atividade humana,

> [...] atividade de resolver problemas, de procurar por problemas, mas também uma atividade de organização de um assunto. Isso pode ser um assunto da realidade que precisa ser organizado de acordo com padrões matemáticos se os problemas da realidade precisarem ser resolvidos. Também pode ser um assunto matemático, resultados novos ou antigos, seus próprios ou de outros, que precisam ser organizados de acordo com novas ideias, para serem melhores compreendidos, em um contexto mais amplo, ou com uma abordagem axiomática (FREUDENTHAL, 1971, p. 413-414, tradução nossa).

Freudenthal (1973) afirmou que a humanidade, em seu desenvolvimento, apresentou diversas necessidades, como a contagem, a medida de áreas, a astronomia, a geometria algébrica e a teoria dos números. Cada uma das necessidades suscitou que se pensasse matematicamente e se fizesse matemática. Nesse sentido, a matemática, enquanto atividade, emerge das necessidades e das ações da humanidade, não apenas dos matemáticos. Isso

[6] Mais informações em: https://www.uu.nl/en/research/freudenthal-institute/about-us/background/mathematics-education
[7] Mais informações em: https://www.uu.nl/en/research/freudenthal-institute

significa que a condição para se fazer matemática (matematizar) é apenas ser humano.

São atividades das quais se reconhece matematização:

> • identificar as especificidades matemáticas no contexto geral;
> • esquematizar;
> • formular e visualizar o problema;
> • descobrir relações e regularidades;
> • reconhecer similaridades em diferentes problemas;
> • representar uma relação em uma fórmula;
> • provar regularidades;
> • refinar e ajustar modelos;
> • combinar e integrar modelos;
> • generalizar (DE LANGE, 1999, p. 18, tradução nossa).

Treffers (1987) fez uma distinção entre matematização horizontal e matematização vertical. Para o autor, a primeira está relacionada à esquematização de um problema em linguagem matemática; e a segunda, com as atividades próprias do processo matemático.

> Dividir a atividade matemática nesses dois elementos é uma operação artificial. Na realidade, a distinção é difícil de fazer, principalmente porque a esquematização e o processamento matemático estão intimamente relacionados. No entanto, essa distinção é significativa, apenas para deixar claro que atividades como construir, experimentar e classificar se encaixam tão bem no processo de matematização quanto simbolizar, generalizar e formalizar (TREFFERS, 1987, p. 71, tradução nossa).

A consequência mais importante do princípio da atividade é que, se a matemática é uma atividade humana, então, aprende-se matemática fazendo (FREUDENTHAL, 1968). Iniciar o ensino da matemática apresentando temas matemáticos prontos, evidenciando o que já fora sistematizado pela humanidade, para depois ensinar a aplicá-la, é, para Freudenthal (1968), uma inversão antididática[8]. Para a Educação Matemática Realística, deve-se aprender matemática matematizando.

O conjunto de conhecimentos historicamente acumulado e validado pela humanidade é denominado de conhecimento matemático. Para Van den Heuvel-Panhuizen (2010), os domínios do conhecimento matemático não são faixas isoladas, nem há uma fronteira entre eles, mas são fortemente integrados. Esse é, para a Educação Matemática Realística, o *princípio do entrelaçamento*. Consequentemente,

[8] "Antididática" é utilizado para adjetivar/caracterizar a "inversão" feita como sendo "contrária à didática".

> [...] em vez de correr em caminhos separados que, exceto por referências e empréstimos incidentais, são independentes um do outro, a aprendizagem deve ser organizada em vertentes mutuamente entrelaçadas o mais cedo, o mais longo e o mais forte possível (FREUDENTHAL, 1991, p. 118, tradução nossa).

Além disso, o princípio do entrelaçamento também vale para assuntos dentro dos diferentes domínios do conhecimento matemático. "Por exemplo, dentro do domínio dos números, [...] o sentido numérico, a aritmética mental, a estimativa e os algoritmos são ensinados em estreita conexão entre si" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, tradução nossa). Nessa direção, além de proporcionar aos estudantes que compreendam as diferentes relações entre os assuntos e os domínios, também pode-se utilizar a própria matemática como fonte para os contextos das tarefas.

Em relação à aprendizagem, a Educação Matemática Realística trata dela a partir de dois pontos de vista: um individual e um social. Os princípios que estão relacionados a esses pontos de vista são o de níveis e o da interatividade, respectivamente.

O *princípio de níveis* diz respeito ao fato de a aprendizagem matemática se desenvolver em níveis. Nesse sentido, a RME valoriza as resoluções e estratégias informais dos estudantes e as entende como motes para que se desenvolvam estratégias mais formais.

> Estudantes devem ter a oportunidade de desenvolver as suas próprias estratégias informais de resolução de problemas que podem levar à construção de procedimentos de solução. Os modelos que desenvolvem vão se transformar gradualmente em modelos genéricos para uma classe de situações (DRIJVERS, 2000, p. 192, tradução nossa).

Em aulas na perspectiva da Educação Matemática Realística, os estudantes são incentivados a utilizar suas próprias estratégias e procedimentos, ainda que informais, para lidar com as tarefas; ao passo em que vão formalizando suas produções, constituem modelos que resolvem a tarefa com a qual estão lidando (chamado "modelo de"). Em seguida, o professor pode propor outras tarefas que podem se valer dos "modelos de" já formalizados pelos estudantes, que vão generalizando os "modelos de" para um conjunto de situações ("modelo para") (GRAVEMEIJER, 2008).

Em relação ao *princípio da interatividade*, afirma-se que a aprendizagem é uma atividade social. Para Nelissen e Treffers (2010), podem-se considerar dois tipos de interatividade: uma que ocorre entre professor e estudantes; e outra, entre os estudantes mutuamente.

Para os autores, a interatividade entre o professor e os estudantes pode se dar: “a) entre o professor e um único aluno; b) entre o professor e um grupo pequeno de alunos [...]; e c) entre o professor e toda a turma” (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 393, tradução nossa). Nesse tipo de interação, o professor tem o papel de auxiliar seus estudantes, individual ou coletivamente, a regularem suas estratégias e produções, a repensar o encaminhamento de suas resoluções, a discutir, a pensar criticamente e a refletir.

Em relação à interatividade entre os estudantes mutuamente, é importante que se crie um cenário baseado em discussões, explicações, justificações, comunicação, ilustrações e analogias (DE LANGE, 1999; KWON, 2002).

O *princípio da realidade* trata da visão de Freudenthal a respeito do que é real. Para o autor, “a realidade é histórica, cultural, ambiental, individual e subjetivamente determinada” (FREUDENTHAL, 1991). O termo realístico, que dá nome à abordagem, é uma tradução livre do verbo neerlandês “*zich realiseren*”, que tem como possíveis acepções “entender”, “perceber” e “imaginar”. Nesse sentido, para a RME, é real/realístico[9] tudo aquilo com o que se pode ter alguma experiência (GRAVEMEIJER; COBB, 2006). Logo, a definição de realidade da RME inclui, entre outras coisas, a própria matemática.

Como consequência desse princípio, o ensino da matemática na perspectiva da RME tem como ponto de partida tarefas e situações realísticas que possam ser matematizadas pelos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010). Além disso, para Gravemeijer e Cobb (2006, p. 63, tradução nossa), o princípio da realidade também se refere a "apoiar os alunos na criação de uma nova realidade matemática”. Isso significa que, em aulas de matemática, o professor utiliza contextos que são próximos dos estudantes e dos quais eles possam se aproximar.

Por fim, o *princípio da orientação* se refere à oportunidade guiada que os estudantes devem ter de reinventar a matemática. A expressão “reinvenção guiada”, cunhada por Freudenthal (1973), é considerada o método de ensino da Educação Matemática Realística. Como, para a RME, a matemática é uma atividade humana, ela é inventada e não está pronta em um mundo ideal. Desse modo, os conteúdos, conceitos e procedimentos também são

[9] Real, para a RME, é tudo aquilo com o que se pode ter alguma experiência. Porém, frequentemente, usa-se a expressão “realístico”, a fim de evitar confusão com a compreensão do senso comum do que é real.

inventados. O método da reinvenção guiada prevê que os estudantes vivenciem o processo de invenção, aproximando suas produções (ainda que informais) do conhecimento matemático — tornando-se, assim, autores dessas reinvenções.

Para Freudenthal (1973), os estudantes devem experimentar vivenciar um processo similar ao que os matemáticos passaram na invenção de conteúdos, conceitos e procedimentos. Para Gravemeijer (2008), isso não significa que os estudantes farão exatamente o que fizeram os matemáticos — que, muitas vezes, demoraram longos períodos para inventar determinados assuntos. Portanto, o professor tem o papel de orientar/guiar os estudantes para que possam passar por esse processo lidando com alguns obstáculos vivenciados pelos matemáticos.

O Quadro 1 apresenta uma síntese dos princípios da Educação Matemática Realística e suas consequências para o ensino da matemática.

**Quadro 1** – Síntese dos princípios da Educação Matemática Realística

<table>
<tr><th>Princípio</th><th colspan="2">Enunciado do princípio</th><th>Consequência</th></tr>
<tr><td>Da atividade</td><td>Matemática</td><td>é uma atividade humana</td><td>Aprende-se matemática fazendo.</td></tr>
<tr><td>Do entrelaçamento</td><td>Conhecimento matemático</td><td>é tomado de forma integrada e não como um conjunto de faixas isoladas.</td><td>A aprendizagem é organizada em vertentes entrelaçadas.</td></tr>
<tr><td>De níveis</td><td rowspan="2">Aprendizagem</td><td>se desenvolve em níveis.</td><td>As produções dos estudantes em um nível são utilizadas para que se tornem mais formais no próximo.</td></tr>
<tr><td>Da interatividade</td><td>é uma atividade social.</td><td>As interações entre professor e estudante e entre estudantes (mutuamente) são promovidas.</td></tr>
<tr><td>Da realidade</td><td>Realidade</td><td>é dada por aquilo com o que se pode ter alguma experiência.</td><td>Os contextos das tarefas são realísticos.</td></tr>
<tr><td>Da orientação</td><td>Estudantes</td><td>devem ter a oportunidade de reinventar conteúdos matemáticos por meio da orientação do professor.</td><td>O método de ensino da Educação Matemática Realística é a reinvenção guiada.</td></tr>
</table>

Fonte: o autor.

Salienta-se que, ainda que os princípios da Educação Matemática Realística abordem as bases para sua compreensão, ela se trata, especificamente, de uma abordagem para o ensino da matemática. Não se trata de uma teoria de aprendizagem, nem de um conjunto de regras a serem seguidas, bem como não há uma única maneira de se trabalhar nessa perspectiva. O conjunto de princípios da Educação Matemática Realística, então, versa a respeito de atitudes sugeridas para o professor em sala de aula.

Pode-se sistematizar a *abordagem realística* como aquela em que as situações e os problemas de contexto são ponto de partida para a reinvenção guiada; os estudantes têm um papel ativo na busca por procedimentos de resolução (ainda que informais) para tais situações e problemas de contexto, e têm papel ativo, também, na busca por formalizar seus procedimentos. A matemática é tomada como uma atividade humana e, por isso, os sujeitos envolvidos nos processos educacionais fazem matemática — e aprendem por meio dessa ação.

## Referências


BÜRIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da matemática moderna no Brasil:** estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 293f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 1989.

CARLEIAL, Aydano Barreto. Uma breve história da conquista espacial. **Parcerias Estratégicas**, [s. l.], n. 7, 1999.

DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assessment**. Madison: WCER, 1999.

DRIJVERS, Paul. Students Encountering Obstacles Using a CAS. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, [s. l.], v. 5, p. 189-209, 2000.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FEHR, Howard Franklin; CAMP, John; KELLOG, Howard. **La revolucion en las matematicas escolares (segunda fase)**. Washington, D.C: Organizacion de los Estados Americanos, Secretaria Geral, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, 1971.

FREUDENTHAL, Hans. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 1, n. 1/2, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, Hans. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 3, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, Hans. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht: Springer Dordrecht, 1983.

FREUDENTHAL, Hans. **Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven**. Amsterdam: Meulenhoff, 1987.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GOFFREE, Fred. HF: Working on Mathematics Education. In: STREEFLAND, Leen. **The Legacy of Hans Freudenthal**. Utrecht: Springer Dordrecht, 1994. p. 21-50.

GRAVEMEIJER, Koeno. RME theory and mathematics teacher education. In: TIROSH, Dina; WOOD, Terry. **Tools and processes in mathematics teacher education**. Rotterdam: Sense, v. 1, 2008.

GRAVEMEIJER, Koeno; COBB, Paul. Design research from a learning design perspective. In: VAN DEN AKKER, Jan. **Educational design research**. Londres: Routledge, 2006. p. 45-85.

GRAVEMEIJER, Koeno; TERWEL, Jan. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, [s. l.], v. 32, n. 6, p. 777-796, 2000.

HOBSBAWM, Eric. **Era dos Extremos:** O breve século XX: 1914-1991. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.

KWON, Oh Nam. Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations. **Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level**. Grécia: University of Crete. 2002. p. 2-11.

NELISSEN, Jo; TREFFERS, Adri. Marco de enseñanza. In: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Los niños aprenden matemáticas**. México: Correo del Maestro, 2010. p. 389-416.

ROLIM, Tácito Thadeu Leite. **Brasil e Estados Unidos no contexto da "Guerra Fria" e seus subprodutos:** Era Atômica e dos Mísseis, Corrida Armamentista e Espacial, 1945-1960. 2012. 292f. Tese (Doutorado em História) - Universidade Federal Fluminense. Niterói. 2012.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2018.

SOARES, Flávia. **Movimento da matemática moderna no Brasil: avanço ou retrocesso ?** 192 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2001.

TREFFERS, Adri. **Three Dimensions:** A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction — The Wiskobas Project. Dordrecht: Springer Dordrecht, 1987.

TREFFERS, Adri. Wiskobas and Freudenthal: Realistic Mathematics Education. In: STREEFLAND, Leen. **The Legacy of Hans Freudenthal**. Utrecht: Springer Dordrecht, 1994. p. 89-108.

TREFFERS, Adri; GOFFREE, Fred Rational analysis of realistic mathematics education. In: STREEFLAND, Leen. **Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht: OW&OC, v. 2, 1985. p. 97-123.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, Len; KISSANE, Barry; HURST, Chris. **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA, 2010.

VAN EST, Willem Titus. Hans Freudenthal. In: STREEFLAND, Leen. **The Legacy of Hans Freudenthal**. Utrecht: Springer Dordrecht, 1994. p. 59-70.