

## Para Auxiliar em Sala de Aula



# Fractais na Educação Básica: Aprendendo com Quebra-Cabeças, Arte Francesa e Cartões

*Maria Regina Carvalho Macieira Lopes<sup>17</sup>*

*Alessandry Amaral<sup>18</sup>*

*Adriana Fernandes de Matto<sup>19</sup>*

*Karolina Barone Ribeiro da Silva<sup>20</sup>*

### Resumo

A geometria fractal é uma das geometrias não euclidianas sugeridas pelas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná. Contudo, nem sempre os docentes se sentem preparados para lidar com este tema em sala de aula. Com o intuito de colaborar para a formação continuada de professores, ministrou-se uma oficina em uma escola, no interior do estado, com atividades envolvendo quebra-cabeças com figuras de alguns fractais, aplicação de arte francesa em fractais, planos e construção de cartões fractais com colagem de figuras. Os participantes revelaram que não costumavam abordar fractais com seus alunos por falta de tempo ou por desconhecimento desta geometria. Ao final da oficina, eles deixaram suas impressões sobre o curso e sugestões de outras atividades, além das apresentadas.

**Palavras-chave:** Formação Continuada de Professores. Geometrias não Euclidianas. Geometria Fractal. Oficina.

### Introdução

Nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (PARANÁ, 2008), há a orientação de que os professores, tanto do ensino fundamental quanto do médio, lecionem geometria fractal, uma das geometrias não euclidianas sugeridas pelo documento.

Santos (2008, p. 2) afirma, em relação a tais geometrias, que “não adianta governantes e especialistas em Educação decidirem incluir na Educação Básica determinado conteúdo, se o professor não se sentir seguro para trabalhar com o tema”. Uma das formas de obter essa segurança é a participação dos docentes em atividades de formação continuada, sugeridas pela Lei de Diretrizes e Bases 9.394/96 (BRASIL, 1996).

Há vários trabalhos científicos recentes que relatam experiências obtidas em cursos

<sup>17</sup>Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia. Universidade Estadual do Centro-Oeste/UNICENTRO, Guarapuava – PR. E-mail: [mrlopes\\_0@yahoo.com.br](mailto:mrlopes_0@yahoo.com.br)

<sup>18</sup>Licenciada em Matemática. Escola Est. José de Anchieta. Quedas do Iguaçu – PR. E-mail: [alessandryamaral833@hotmail.com](mailto:alessandryamaral833@hotmail.com)

<sup>19</sup>Licenciada em Matemática. Escola Est. José de Anchieta. Quedas do Iguaçu – PR. E-mail: [adrianamatto@fiqnet.com.br](mailto:adrianamatto@fiqnet.com.br)

<sup>20</sup>Mestre em Estatística. Universidade Estadual do Centro-Oeste/UNICENTRO. Guarapuava – PR. E-mail: [kbarone@unicentro.br](mailto:kbarone@unicentro.br)

de formação em geometria fractal ou que se preocupam em propor maneiras de o professor (ou futuro professor) da Educação Básica tratar do tema em sala de aula. Muitos exploram essa geometria com o auxílio de softwares livres, como, por exemplo, Fuzzo, Santos e Ferreira (2011), Gomes e Salvador (2011), Vielmo e Dalberto (2013). Alguns optam pela construção de cartões fractais (BARBOSA *et al.*, 2013; GADONI, 2013; HECK; GULANOSKI, 2013) e de quebra-cabeças (GOMES, 2010; NASCIMENTO; SILVA; MACIEL, 2012).

Com o objetivo de contribuir para a formação continuada de professores, especificamente em geometria fractal, relatam-se aqui os resultados de uma oficina ministrada para docentes da rede estadual de Educação Básica. Nessa oficina foram utilizados quebra-cabeças com figuras de alguns fractais famosos como motivação para o assunto, aplicação de arte francesa em fractais planos e construção de cartões fractais com aplicação de figuras.

### Desenvolvimento

A oficina teve carga horária de 32 horas e foi ministrada para 30 professores de matemática em uma escola estadual do interior do Paraná. Silva (2011, J., p. 9) afirma que

Como local para a formação contínua, os professores enfatizam que as escolas são um espaço ideal, por estarem em contato direto com a realidade e por ter nos outros professores um apoio para trocas de experiências e informações que contribuem na autoformação desses sujeitos.

Inicialmente, aplicou-se um questionário para investigar o conhecimento prévio dos docentes em relação aos fractais. A seguir, houve a apresentação de um vídeo e de seminário expondo a história dos fractais e sua importância para a Matemática. Um dos objetivos das explanações era enfatizar os grandes nomes envolvidos no estudo desta geometria e as propriedades dos fractais, conforme relatado a seguir.

A geometria fractal tem como principal expoente o polonês Benoit Mandelbrot (1924 – 2010), cujos estudos no tema se iniciaram em 1948, quando ele trabalhava na *International Business Machine* (Estados Unidos) e conseguiu resolver um problema de ruído nas linhas telefônicas da empresa, utilizando um trabalho antigo do matemático Georg Cantor (1845 – 1918), chamado Poeira de Cantor (BARBOSA, 2005).

Em 1975, Mandelbrot chamou de fractais (do latim *fractus*: quebrado) as estruturas que apareciam em seus estudos. Contudo, figuras que satisfaziam condições para que assim fossem chamadas já vinham sendo estudadas desde o século XIX, por matemáticos como Giuseppe Peano (1858 – 1932) e David Hilbert (1862 – 1943) e eram, até então, denominadas simplesmente de aberrações, monstros matemáticos, por não seguirem a lógica da geometria euclidiana quando, por

## FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: APRENDENDO COM QUEBRA-CABEÇAS, ARTE FRANCESA E CARTÕES

exemplo, uma figura apresentava perímetro tendendo ao infinito com área tendendo a zero.

Os fractais obedecem a três propriedades:

*Propriedade 1 – Auto similaridade ou auto semelhança:* cada parte de um fractal, por menor que seja, observada em qualquer escala, é geometricamente semelhante ao todo (SERRA e KARAS, 1997).

*Propriedade 2 – Complexidade infinita:* é impossível representar um fractal completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. Isso se deve ao fato de o processo gerador dos fractais ser recursivo, com infinitas iterações (SILVA, K., 2011).

*Propriedade 3 – Dimensão:* cada fractal tem dimensão<sup>21</sup> própria, relacionada ao seu grau de irregularidade, fragmentação. Essa dimensão, em geral<sup>22</sup>, é um número real não inteiro. Esse é um dos motivos que faz com que a geometria fractal seja chamada de não euclidiana (SILVA, K., 2011).

Após o seminário, foram realizadas atividades utilizando quebra-cabeças com figuras de alguns fractais, aplicação de arte francesa em fractais planos e construção de cartões fractais com aplicação de figuras. Concordamos com Rodrigues e Gazire (2012, p. 188), que enfatizam que materiais manipuláveis

[...] constituem um importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa.

Ao final, os professores avaliaram a viabilidade de aplicação das atividades propostas.

## Resultados e Discussão

A oficina foi iniciada durante a semana pedagógica da escola, com a explanação do projeto de trabalho a todos os docentes. O trabalho foi dividido em quatro etapas, descritas na sequência. Após formar o grupo de 30 professores, deu-se início às atividades.

Na *etapa 1*, foi aplicado um questionário investigativo sobre o conhecimento dos cursistas a respeito do tema e identificou-se que a maior parte dos professores não apresentava a geometria fractal para seus alunos por falta de tempo, já que nem toda a geometria euclidiana é vista ou, ainda, por não a conhecerem. De acordo com os respondentes, a geometria fractal foi um conteúdo não estudado em suas graduações.

Quanto aos recursos metodológicos utilizados no ensino de geometria, 48% dos professores usavam somente o livro didático, 24% eventualmente utilizavam vídeos explicativos, 8% promoviam oficinas com materiais manipuláveis ou software e 4%

<sup>21</sup>Considera-se a dimensão formulada por Felix Hausdorff, em 1919 (MANDELBROT, 1977, p. 15).

<sup>22</sup>Um exemplo de estrutura fractal com dimensão inteira pode ser encontrado no movimento browniano (MANDELBROT, 1977, p. 15).

usavam jogos. Apesar dessa situação, quando indagados sobre a disponibilidade para inclusão de novos recursos em suas aulas, 40% dos pesquisados afirmaram que novidades eram bem-vindas.

Na *etapa 2*, foi proferido seminário de introdução à geometria fractal e sua história. Esse seminário teve como objetivo apresentar os principais conceitos relacionados aos fractais e motivar os professores para o estudo, mediante alguns questionamentos sobre o tema. Na sequência, foi apresentado o vídeo *Fractais – a Geometria do Caos*<sup>23</sup>, disponível no *Portal Educacional do Estado do Paraná, Dia a Dia Educação*. A maior parte dos cursistas não imaginava que os fractais pudessem ser aplicados na química, física, medicina, entre outras áreas.

Nas *etapas 3 e 4*, foram utilizados os materiais didáticos (MD): jogos (quebra-cabeça) e dobraduras (cartões fractais). Admitimos a hipótese de Lorenzato (2006) que afirma que os MD, como meio auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, podem desempenhar as funções de iniciar um assunto, motivar os alunos e auxiliar a memorização de resultados.

Na *etapa 3*, foram distribuídos, desmontados em várias carteiras da sala de aula, quebra-cabeças dos fractais Triângulo de Sierpinski, Floco de Neve, Curva de Hilbert, Curva de Koch (FIG. 1), Conjunto de Mandelbrot (FIG. 2), Esponja de Menger, Conjunto de Julia e formas da natureza como brócolis, coração, DNA e pulmão (FIG. 3). Solicitou-se aos professores que trabalhassem em grupo. As atividades de quebra-cabeças, além de fascinantes e desafiadoras, são excelentes para desenvolver o raciocínio lógico, pois requerem análise da parte e do todo e a elaboração de estratégias de montagem. Em um ambiente participativo, os professores puderam explorar, organizar, expor e discutir suas ideias nos grupos formados. Ao final, foram tiradas fotografias dos quebra-cabeças montados.

Esta atividade tinha o objetivo de que, empiricamente, os cursistas percebessem a beleza e a riqueza de detalhes das figuras mencionadas. Vários professores tiveram dificuldade na montagem, porém, os comentários foram: “Apesar de difícil o resultado é lindo”, “Adorei o desafio”.

<sup>23</sup>Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video=7017>. Acesso em: 06 abr. 2014.

## FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: APRENDENDO COM QUEBRA-CABEÇAS, ARTE FRANCESA E CARTÕES

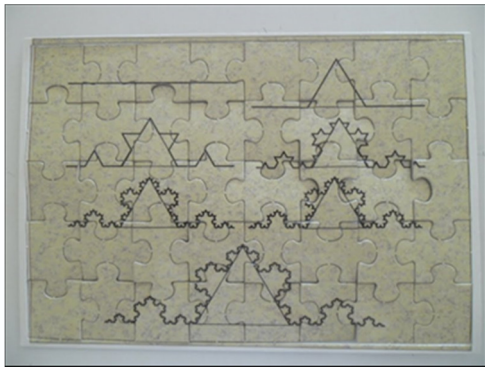


Figura 1 – Curva de Koch  
Fonte: Arquivo pessoal de Alessandry Amaral

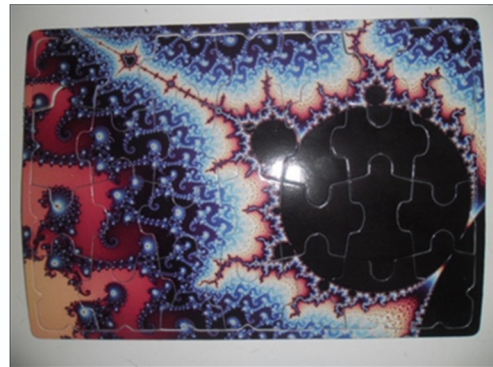


Figura 2 – Conjunto de Mandelbrot  
Fonte: Arquivo pessoal de Alessandry Amaral

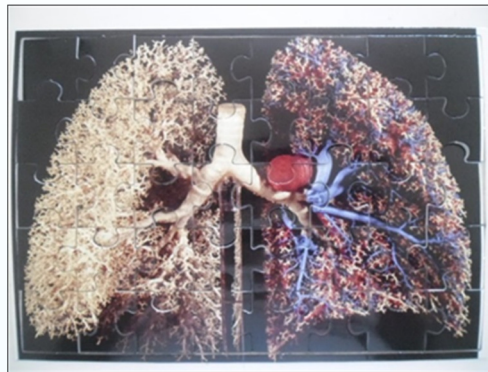


Figura 3 – Pulmão  
Fonte: Arquivo pessoal de Alessandry Amaral

Na sequência, os participantes foram desafiados a elaborar uma atividade a ser aplicada com seus alunos que utilizasse os quebra-cabeças montados. Surgiram várias ideias, algumas tratando de conteúdos da geometria euclidiana e outras, para as séries iniciais, explorando a tabuada e as operações aritméticas. Nesse caso, alguns professores confeccionaram tabuleiros com questões cujas respostas estavam no verso das peças do quebra-cabeça.

A etapa 4 foi dividida em dois momentos. No primeiro, grupos construíram, em uma cartolina, os fractais Curva de Hilbert, Curva de Koch, Floco de Neve, Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski. Para orientar os trabalhos, foi elaborada e disponibilizada uma apostila com todos os passos da construção. Paralelamente às construções, para cada nível, foram determinados: área, perímetro, generalizações e dimensão fractal. Foram também estabelecidas relações entre fractais e os conteúdos progressão aritmética, progressão geométrica e triângulo de Pascal. Ao final, foi aplicada a *arte francesa*<sup>24</sup> em cada fractal (FIG. 4). A *arte francesa* é uma técnica de sobreposição de gravuras de papel a uma imagem plana, conferindo a ela efeito de profundidade e volume.

<sup>24</sup>Mais informações no site do *Portal de Artesanato*. Disponível em: <http://www.portaldeartesanato.com.br/materias/19/>. Acesso em: 06 abr. 2014.

**FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: APRENDENDO COM QUEBRA-CABEÇAS, ARTE FRANCESA E CARTÕES**

No segundo momento, os professores utilizaram dobradura para a construção de três cartões fractais tridimensionais: Degraus Centrais, com figura de borboleta (FIG. 5), Conjunto de Cantor, com figura de corações e Triângulo de Sierpinski, com figura de samambaia (FIG. 6). Nesses casos, o papel dobradura foi previamente preparado com aplicação de figuras escolhidas pelos professores.

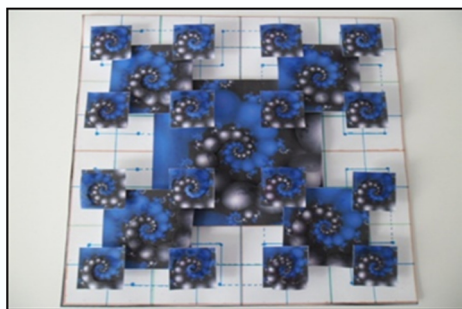


Figura 4 – Arte francesa no Tapete de Sierpinski  
Fonte: Arquivo pessoal de Alessandry Amaral



Figura 5 – Degraus Centrais  
Fonte: Arquivo pessoal de Alessandry Amaral



Figura 6 – Triângulo Sierpinski  
Fonte: Arquivo pessoal de Alessandry Amaral

Por sugestão dos cursistas, foi realizada, na escola que sediou a oficina, uma exposição com os quebra-cabeças e cartões construídos.

Ao final da oficina, um dos professores afirmou: “Pesquisei na internet sobre como poderia adaptar os trabalhos com Geometria Fractal e, além da construção dos cartões, achei interessante e trabalhei com os alunos os Triminós”. Outro professor deixou registrada uma possível interdisciplinaridade:

Na nossa escola trabalhamos em conjunto com os professores de Arte e construímos os cartões fractais explorando a Matemática e o professor de Arte explorou a arte francesa muito bem trabalhada em seu projeto. Valeu muito o conhecimento aprendido com este seu projeto. Muito bem elaborado, contendo todos os passos com riqueza de detalhes. Qualquer professor pode utilizar em sala de aula sem dificuldades.

Como lembrança, cada cursista ganhou um cartão fractal dentro de uma caixa com mensagem de agradecimento pelo interesse e pela dedicação de todos ao curso.

### Referências

BARBOSA, R. M. **Descobrimo a geometria fractal – para a sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Tendências em Educação Matemática, 6).

BARBOSA, C. D.; LEAL, E. R.; SILVA, S. M.; SILVA, P. A.; FERREIRA, F. C. L.; SOUSA, F. F. Educação a distância: um olhar sobre o uso dos fractais nas aulas de matemática. In: CONGRESSO INTERNACIONAL ABED DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 19., 2013, Salvador. **Anais do 19º CIAED**. Salvador: ABED, 2013. p. 1-10.

BRASIL. **Lei nº 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Presidência da República. Brasília, DF, 20 de dezembro de 1996. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/19394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm). Acesso em: 30 mar. 2014.

FUZZO, R. A.; SANTOS, T. S.; FERREIRA, L. Fractais e GeoGebra: construindo a curva de Koch. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife: EDUMATEC – UFPE, 2011. p. 1-6.

GADONI, T. G. Trabalhando geometria fractal no ensino médio, por meio de práticas investigativas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba: SBEM-Regional PR, 2013. p. 1-8.

GOMES, A. N. **Uma proposta de ensino envolvendo geometria fractal para o estudo de semelhança de figuras planas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

GOMES, A. N.; SALVADOR, J. A. Geometria do Ensino Fundamental com SLogo e Fractais. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife: EDUMATEC – UFPE, 2011. p. 1-8.

HECK, A.; GULANOSKI, T. Geometria fractal nas aulas de matemática. In: SEMANA DA MATEMÁTICA, 17., 2013, Guarapuava. **Anais da XVII Semana da Matemática**. Guarapuava: UNICENTRO, 2013. p. 1-2.

LORENZATO, S. (Org). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. New York: W. H. Freeman and Company, 1977.

FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: APRENDENDO COM  
QUEBRA-CABEÇAS, ARTE FRANCESA E CARTÕES

NASCIMENTO, M.; SILVA, S. C. R.; MACIEL, N. A. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica. *VIDYA*, Santa Maria, v. 32, n. 2, p. 113-132. 2012.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Matemática**. 2008. Disponível em: [http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce\\_mat.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf). Acesso em: 22 jun. 2014.

SANTOS, T. S. Geometrias não euclidianas em um curso de atualização para professores da Educação Básica. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. **Anais do XII EBRAPEM**. Rio Claro: UNESP, 2008. p. 1-7.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre o uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 187 – 196. 2012.

SERRA, C. P.; KARAS, E. W. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos**. Curitiba: Champagnat, 1997.

SILVA, J. C. M. Formação continuada dos professores: visando a própria experiência para uma nova perspectiva. **Revista Ibero-Americana de Educação**, n. 55/3, p. 1-11. 2011.

SILVA, K. B. R. **Noções de geometrias não euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais**. Curitiba: CRV, 2011.

VIELMO, S. E.; DALBERTO, F. Abordagem do ensino de matemática através de fractais e recursos tecnológicos. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais do VI CIAEM**. Canoas: ULBRA, 2013. p. 1-12.



**O site da SBEM está repleto de recursos  
que poderão lhe ajudar em sala de aula!**

**Acesse agora!**



**Veja mais em [www.sbembrasil.org.br](http://www.sbembrasil.org.br)**