Relato de Experiência

Aprendizagens Matemáticas a Partir da Construção de Fractais[1]

Teresinha Aparecida Faccio Padilha[2]

1. A localização e descrição da escola, sala e turma na qual foi aplicada a experiência

A intervenção pedagógica foi desenvolvida com uma turma de 7ª série do Ensino Fundamental, da Escola Municipal de Ensino Fundamental Otto Gustavo Daniel Brands, no município de Venâncio Aires. A turma era composta por 20 alunos, sendo 11 meninas e 09 meninos, que frequentavam as aulas no turno da manhã e que estavam na faixa etária de 12 a 16 anos. Três eram repetentes e uma aluna não frequentou nenhuma das aulas presenciais da intervenção pedagógica por estar de atestado médico prolongado, devido a sua gestação de risco.

Os alunos da referida turma residiam nas proximidades da escola. É relevante destacar que essa região notavelmente vem aumentando o número de moradores, pois as construções de casas novas são visíveis, refletindo no acréscimo do número de alunos do educandário, que, recentemente, foi ampliado. Três novos estudantes tinham acabado de ingressar na série em questão porque passaram a residir perto da escola, sendo, portanto, o primeiro ano que a frequentavam.

O desenvolvimento da proposta relatada neste trabalho aconteceu na turma em que a autora leciona e é a professora titular da disciplina de Matemática, na já mencionada instituição de ensino. Esse fato permitiu vivenciar várias experiências pedagógicas com o grupo o que possibilita afirmar que muitos deles apresentavam dificuldades significativas em sua aprendizagem. Isso porque, apesar de possuírem os conhecimentos básicos na área da Matemática que os levaram a serem promovidos para a atual série, eles

[1]Colaboraram na elaboração destas atividades as professoras Maria Madalena Dullius e Marli Teresinha Quartieri.
[2]Professora E.M.E.F. Otto Gustavo Daniel Brands.
E-mail: teresinhafaccio@gmail.com

necessitavam de muitos estímulos e incentivos.

2. Descrição pormenorizada da proposta pedagógica

A prática pedagógica foi desenvolvida dentro da carga horária da disciplina de Matemática. Foram realizados 14 encontros, distribuídos dentre 24 horas-aula, de 45 minutos cada uma.

Na sequência, apresentamos a intervenção pedagógica detalhando cada uma das atividades desenvolvidas.

2.1 Atividade 1: Descobrindo a Geometria Fractal

Esta atividade teve por objetivo despertar nos alunos a percepção da insuficiência da Geometria Euclidiana na representação de elementos da natureza. Começamos com o questionário apresentado, que instigou a reflexão sobre quais formas geométricas os estudantes conheciam. Na sequência, eles foram convidados a observar objetos ou elementos quaisquer da natureza e associá -los às formas geométricas conhecidas. Foi nesse momento que se questionou sobre possíveis dificuldades encontradas na realização da atividade:

1) *Faça o desenho das formas geométricas que você conhece com seu o respectivo nome:*

2) *Agora faça uma lista de dez coisas que você pode observar na natureza e associe com a forma geométrica que mais lhe pareça familiar:*

Elemento observado	Forma geométrica a que você o associa

Quadro 1 – Associação de elementos da natureza a formas geométricas.
Fonte: Elaborado pela autora.

3) *Você teve alguma dificuldade em associar os elementos escolhidos com uma forma geométrica conhecida? Por quê?*

____

____

____

A exploração detalhada das respostas obtidas foi feita em um momento de socialização, seguido de um questionamento aos alunos sobre as formas da natureza e a possibilidade de todas serem associadas ou construídas a partir das figuras geométricas euclidianas. Ampliamos a discussão com questionamentos do tipo: Como a natureza sabe construir essas estruturas? Como ela sabe a regra de construção?

Comentamos o surgimento da geometria fractal para sanar a insuficiência da geometria euclidiana, percebida pelos alunos na realização da atividade, e a apresentamos em forma de *slides* com imagens, exemplificando, conceituando e mostrando diferentes aplicações.

2.2 Atividade 2: conhecendo o *software* Geogebra

A Atividade 2 foi o primeiro contato dos alunos com o *software* Geogebra para que pudessem conhecê-lo e explorá-lo sem que fossem conduzidos por uma atividade dirigida.

No primeiro momento, apresentamos aos alunos os passos operacionais de acesso ao *software* Geogebra.

- Acessando o Geogebra pela área de trabalho;
- Conhecendo o Geogebra.

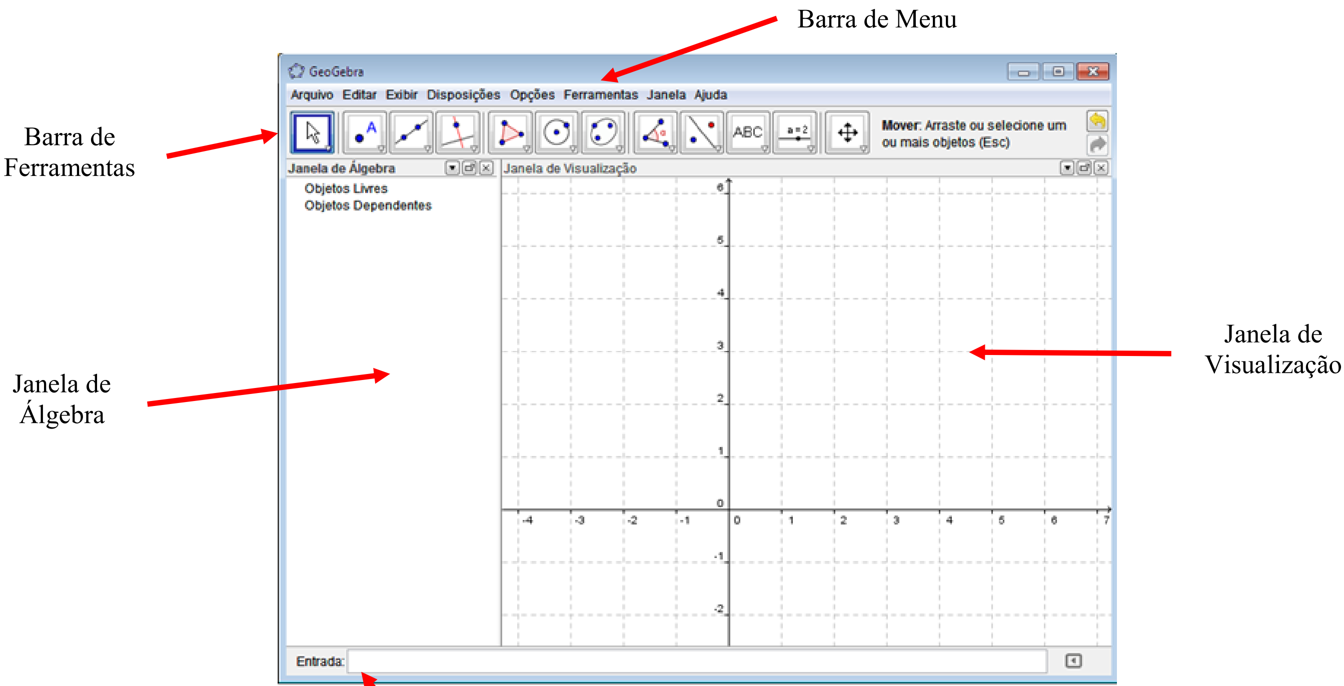


Figura 1 – Janela principal do Geogebra.
Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

Um dos diferenciais deste programa, em relação aos outros *softwares* de Geometria Dinâmica, é o fato de que se pode acessar suas funções tanto por meio dos botões na Barra de Ferramentas quanto pelo Campo de Entrada. Além disso, podemos alterar as propriedades dos objetos construídos via Janela da Álgebra e também por meio de algumas ferramentas do Botão Direito do *Mouse*.

A Barra de Ferramentas está dividida em 12 janelas como a que apresentamos na Figura 2.

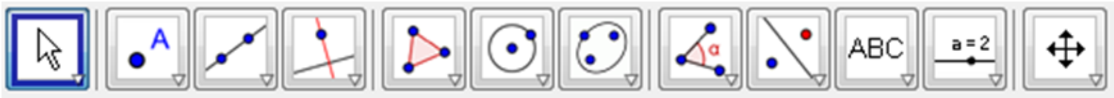


Figura 2 – Janelas do Geogebra
Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

Cada janela possui várias ferramentas que podem ser visualizadas com um clique na parte inferior do ícone. Assim, o programa abrirá as opções referentes à janela. Cada ícone tem um desenho e um nome para ajudar a lembrar o que a ferramenta faz.

O Campo de Entrada fica no rodapé da janela do Geogebra. Por meio dele é possível operar o programa usando comandos escritos, que desempenham praticamente as mesmas funções da Barra de Ferramentas. Dependendo do objetivo que se tem, este recurso pode apresentar algumas vantagens como, por exemplo, a precisão de um ponto ao digitarmos suas coordenadas, que com um clique no *mouse* pode não sair no local desejado.

A Janela da Álgebra, que geralmente aparece quando o Geogebra é iniciado, pode ser ocultada a partir da Barra de Menu, em EXIBIR e marcando a opção JANELA DE ÁLGEBRA. Uma das funções desta Janela é exibir as informações algébricas dos objetos que estão na Janela de Visualização, sendo possível editar as suas respectivas propriedades. Para tanto, é preciso clicar com o botão direito do *mouse* sobre a informação algébrica do objeto e escolher a opção "PROPRIEDADES" ou, então, fazer essa edição com um duplo clique sobre a informação algébrica.

Depois que o *software* foi apresentado aos alunos, deixou-se um tempo livre para que pudessem se familiarizar com as funções e possibilidades de trabalho que teriam com o uso do programa.

2.3 Atividade 3: construção da Curva de Koch com o *software* Geogebra

A Curva de Koch, mostrada na Figura 3, foi proposta para ser construída no Geogebra com o objetivo de identificar a regra de construção do referido fractal e em seguida mobilizar conhecimentos acerca da classificação dos triângulos, segmentos de reta, semirretas, paralelismo, raio da circunferência para a sua construção. Também se objetivava fazer uso da potenciação e dos números racionais para representar os comprimentos dos segmentos em cada iteração.

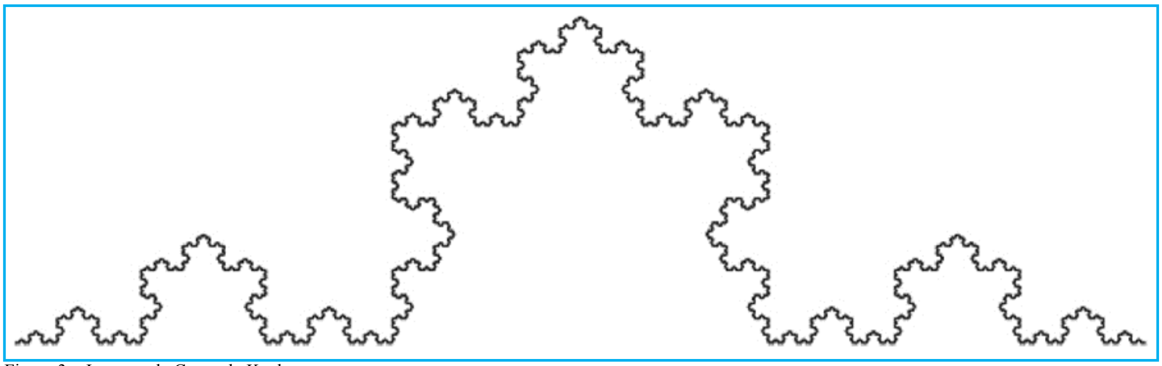


Figura 3 – Imagem da Curva de Koch.
Fonte: CCAPITALIA (2012).

Assim, apresentamos a imagem em *slides* do fractal Curva de Koch com algumas informações históricas sobre ele. Os alunos foram convidados a identificar as características fractais ali presentes, bem como o padrão geométrico utilizado para sua construção.

Os passos para construção do fractal no Geogebra foram discutidos juntamente com os alunos, buscando sempre relacionar cada decisão tomada com o respectivo conteúdo geométrico utilizado. Assim, explicitaremos os passos para a construção com base em trabalho de Macedo e Franco (s/d):

- Abrir uma janela no Geogebra e esconder os eixos e a malha quadriculada, caso estejam visíveis clicando em exibir eixos e malha.

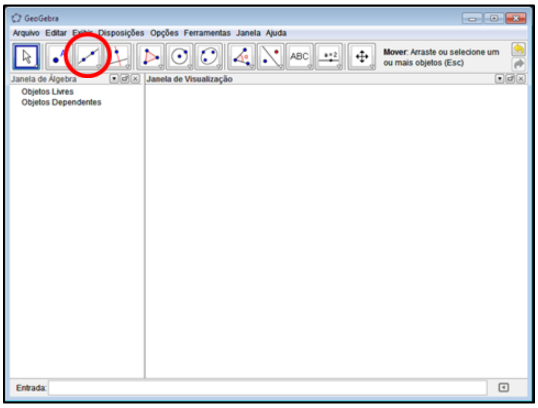


Figura 4 – Interface do Geogebra.
Fonte: Interface do *software* Geogebra (2012).

- Questionar os alunos sobre qual deve ser o ponto de partida para a construção do fractal desejado. Partindo das respostas dadas, iniciar a construção de um segmento de reta definido por dois pontos utilizando o terceiro ícone:

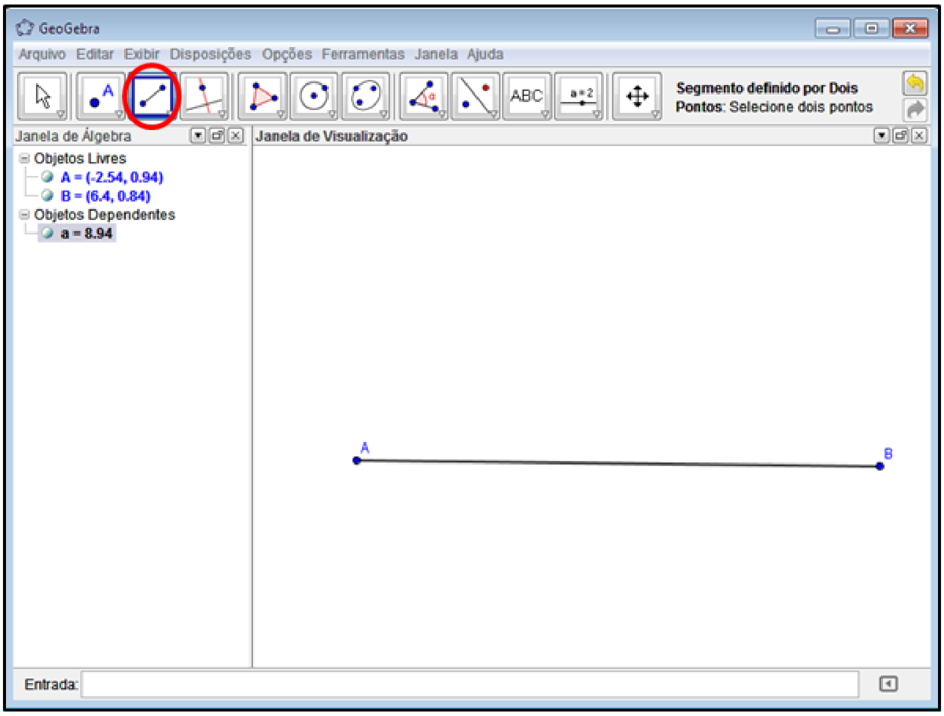


Figura 5 – Ponto de partida para a construção da Curva de Koch.
Fonte: autoria própria, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Após decidir qual deve ser o próximo passo, dividir o segmento em três partes iguais. Ouvir as diferentes sugestões para a realização do proposto e sugerir os passos que seguem para que, ao criar a nova ferramenta, ela funcione. Em outro local da tela construir outro segmento de reta para ser nossa unidade de medida. Construir uma semirreta do ponto **A** de um tamanho qualquer.

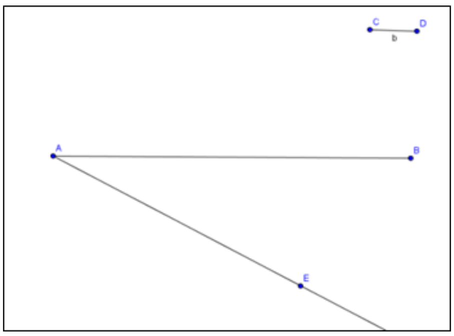


Figura 6 – Sequência da construção da Curva de Koch.
Fonte: autoria própria, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Agora, marcar, na semirreta, três segmentos de mesmo tamanho utilizando a nossa unidade a partir do ponto **A**. Para isso, construir uma circunferência de centro em **A** e raio b, conforme instruções constantes no 6º ícone – círculo dados centro e raio - e marcar a intersecção de dois objetos (circunferência e semirreta – 2º ícone). Repetir o processo mais duas vezes centrando o círculo na intersecção. Marcar o ponto de intersecção da semirreta auxiliar com a última circunferência construída.

- Traçar o segmento de reta g (3º ícone), passando pelos pontos **B** e **H** e paralelas a g, passando pelos pontos de intersecção F e G de acordo com as instruções do 4º ícone (retas paralelas). Encontrar o ponto de intersecção entre o segmento a e as paralelas que passam por **F** e **G**. Observar a divisão do segmento em três partes congruentes.

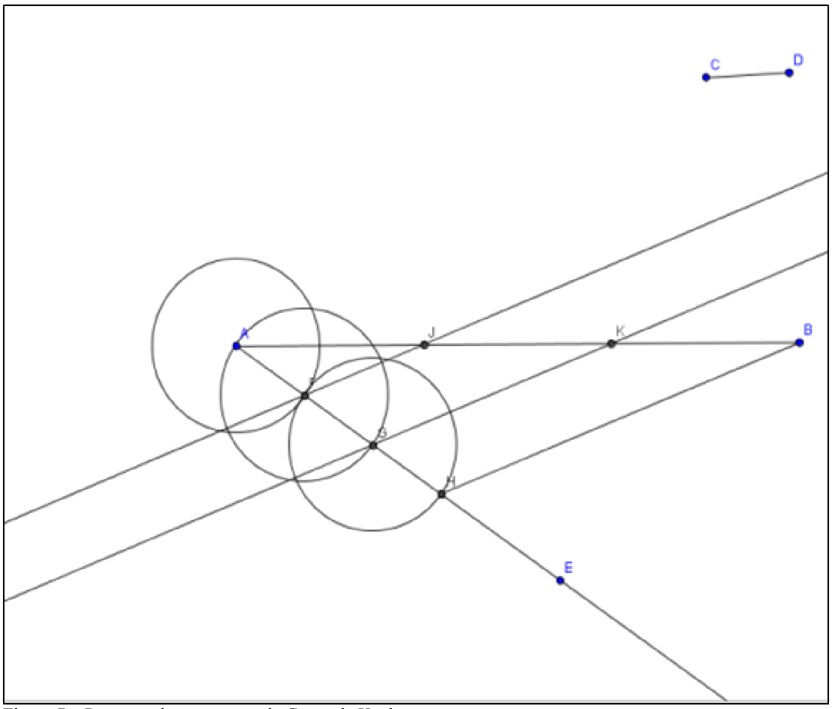


Figura 7 – Processo de construção da Curva de Koch
Fonte: autoria própria, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Para esconder os objetos que aparecem durante a construção, basta clicar com o botão direito do *mouse* sobre o objeto e em exibir objeto. Se quiser esconder os nomes dos objetos, clicar em exibir rótulo.

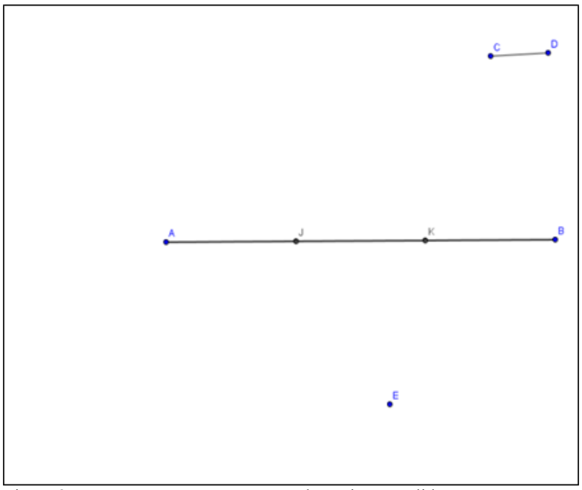


Figura 8 – Imagem com as construções de apoio escondidos
Fonte: autoria própria, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Para apagar a parte central teremos que esconder o segmento de reta a e construir dois segmentos de reta: **AJ** e **KB.** Vamos agora substituir a parte central por um triângulo equilátero sem um lado e, para isso, desenharemos um círculo de centro em **J** e outro de centro em **K** e raio j ou k. Marcar o ponto de intersecção dessas duas circunferências.

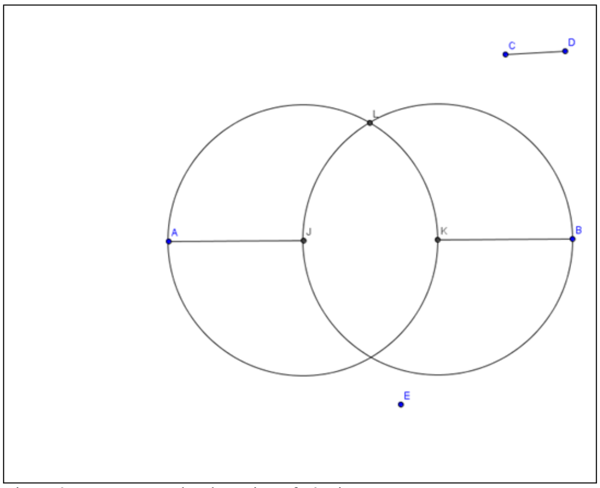


Figura 9 – Intersecção das duas circunferências
Fonte: autoria própria, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Desenhar o segmento de reta **JL** e **LK** e esconder as circunferências.

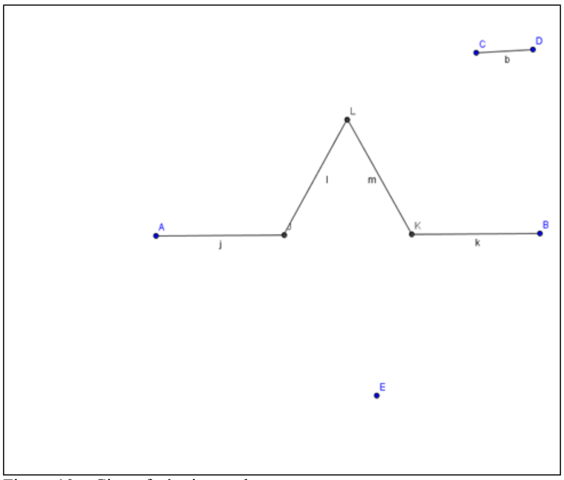


Figura 10 – Circunferências ocultas
Fonte: autoria própria, baseada em Macedo e Franco (s/d).

- Agora precisamos repetir para cada segmento o mesmo processo realizado no segmento inicial. Esse processo é chamado iteração e, por meio dele, obteremos a Curva de Koch. Mas esta repetição seria muito trabalhosa. É aqui que temos uma grande vantagem de uso do *software* Geogebra, que permite criar uma ferramenta que reproduz a construção. Para isso, ative a opção **ferramentas – criar nova ferramenta**, abrindo uma janela com abas que contêm as seguintes informações:

<u>Objetos finais</u>: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros. No nosso caso são os pontos **J**, **L**, **K**, segmento j, segmento l, segmento m, segmento k. Para inseri-los na construção, basta clicar sobre esses objetos com o botão esquerdo do *mouse*.

<u>Objetos iniciais</u>: são objetos que foram informados inicialmente dos quais dependem toda a construção. No nosso exemplo, correspondem aos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, e **E**. Esses objetos automaticamente aparecem em objetos iniciais.

<u>Nome e ícone</u>: é o nome dado ao novo ícone conforme desejado. Após a nomeação dessa ferramenta, clicar em concluído. Irá aparecer um novo ícone com a ferramenta construída. Para utilizá-la é preciso clicar no ícone com o nome dado e nos pontos **A**, **J**, **C**, **D**, **E.** Ao construir essa nova parte da Curva, teremos que esconder o segmento j para eliminar o segmento central. Vamos repetir esse processo novamente, mas agora com os segmentos **J**, **L**, **C**, **D**, **E**; **L**, **K**, **C**, **D**, **E** e **K**, **B**, **C**, **D**, **E**. Poderemos fazer quantas iterações desejarmos. A Figura 18, que segue, mostra três iterações.

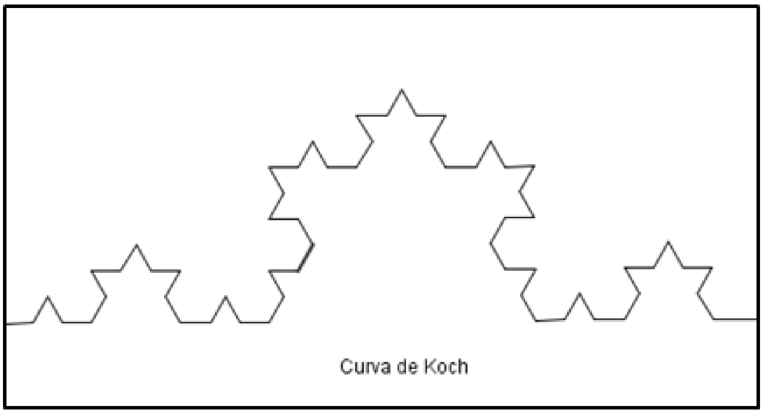


Figura 11 – Curva de Koch concluída.
Fonte: autoria própria, baseada em Macedo e Franco (s/d).

A partir da construção do fractal Curva de Koch foi proposta a seguinte atividade de exploração do fractal:

Após ter construído no Geogebra a Curva de Koch, preencha o quadro que segue, ele é uma atividade modificada de Gomes (2007), tomando como base o segmento inicial de comprimento c:

Ilustração	Número de iterações realizadas	Número de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da Curva
	0			
	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
	...			

Quadro 2 – Atividade sobre a Curva de Koch.
Fonte: autoria própria, adaptada de Gomes (2007).

2.4 Atividade 4: construção da Ilha de Koch ou Floco de Neve com o *software* Geogebra

A Atividade 4 foi proposta com o objetivo identificar a regra utilizada na construção do fractal de modo a estabelecer relações com o Floco de Neve construído anteriormente. Além deste, constituíam objetivos retomar os conceitos similares ao da Atividade 3, agora aplicados em contexto diferenciado, bem como usar a álgebra nas generalizações exigidas.

Apresentamos, assim, a imagem projetada do fractal Floco de Neve e os alunos imediatamente foram encontrando semelhanças com o fractal anteriormente trabalhado. Discussões surgiram acerca dos passos necessários para a construção. Mostraremos os passos adotados por grande parte dos alunos.

- Construa um triângulo equilátero usando a ferramenta polígono regular:

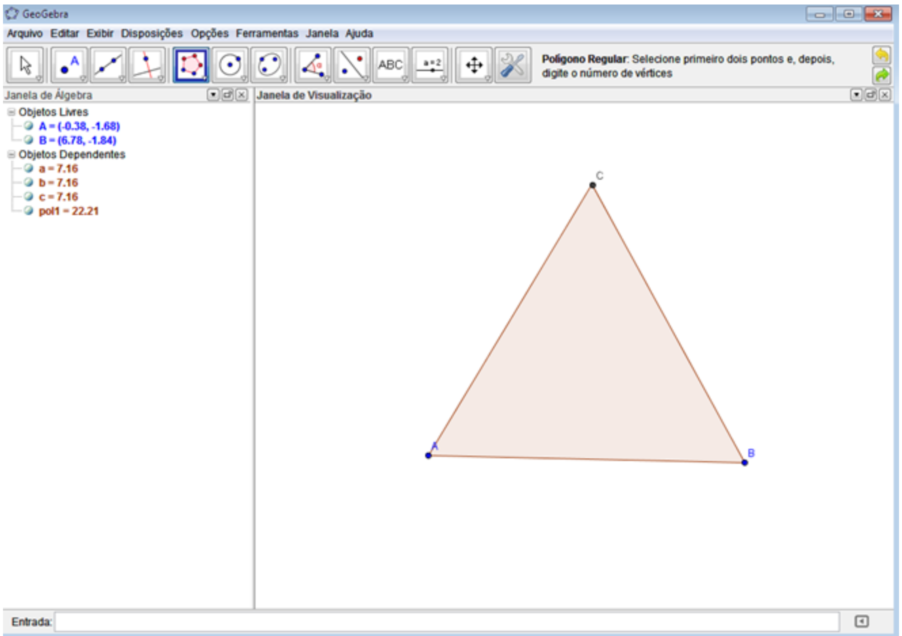


Figura 12 - Ponto de partida para a construção da Ilha de Koch
Fonte: Interface do *software* Geobebra.

Realizar a primeira iteração com a mesma ferramenta construída anteriormente para a Curva de Koch:

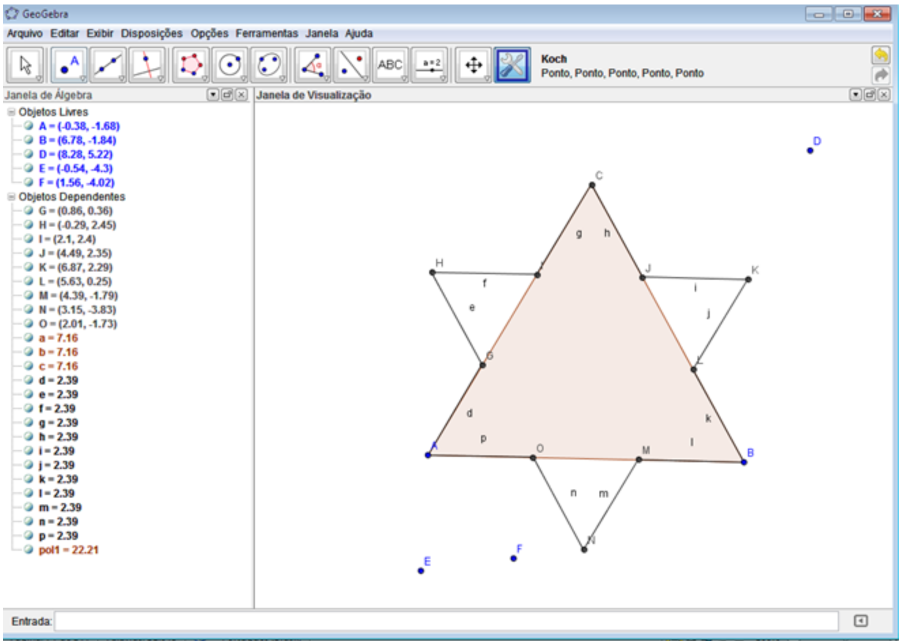


Figura 13 - Primeira iteração da Ilha de Koch.
Fonte: Interface do *software* Geogebra.

- Para ocultar os pontos e nomes dos segmentos basta clicar com o botão do direito do *mouse* e escolher a opção EXIBIR RÓTULO.

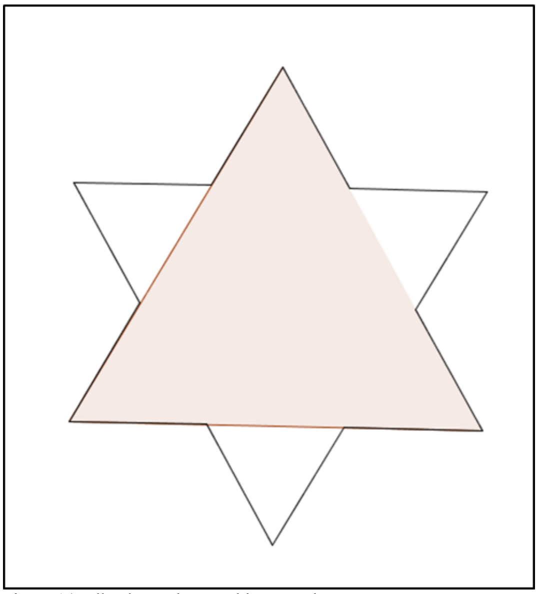


Figura 14– Ilha de Koch com objetos ocultos.
Fonte: Interface do *software* Geogebra.

Desse modo, segue-se realizando quantas iterações desejar.

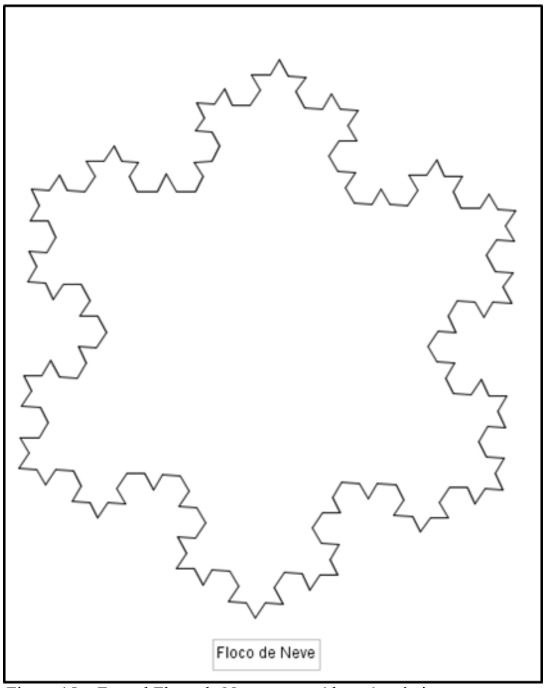


Figura 15 – Fractal Floco de Neve construído após três iterações.
Fonte: Interface do Geogebra

Concluída a construção da Ilha de Koch no Geogebra, foram distribuídas aos alunos as seguintes questões:

Explorando o fractal Floco de Neve com atividades baseadas em Barbosa (2005):

1) Contagem dos segmentos:

a) Quantos lados tem a figura inicial do fractal? Suas medidas são iguais? Por quê?

____

b) Após ter sido realizada a primeira iteração, quantos segmentos passou a ter cada um dos seus lados?

____

c) E a figura toda passou a ter quantos segmentos?

____

d) Após a segunda iteração, cada um dos segmentos passou a ser substituído por quantos? Ficando agora a figura com que total de segmentos?

____

e) Seguindo este mesmo raciocínio, como poderíamos representar o total de segmentos após três iterações? Quatro? Cinco? E após n iterações?

____

2) Perímetro: considerando o comprimento do lado do triângulo inicial como c responda:

a) Qual o perímetro do triângulo inicial?

____

b) Após a primeira iteração, cada segmento resultante passou a medir que parte do segmento inicial c?

____

c) Então como podemos expressar o perímetro neste nível?

____

d) De quanto foi este aumento em relação ao nível anterior?

____

e) Se continuarmos a realizar as iterações o que acontecerá com o valor do perímetro do Floco de Neve?

____

2.5 Atividade 5: construção do Triângulo de Sierpinski com o *software* Geogebra

Esta atividade foi elaborada com a intenção de que os alunos identificassem a regra utilizada na construção do fractal e o construíssem. Também se pretendia que eles consolidassem conceitos de perímetro, área, classificação de triângulos, porcentagem e fizessem uso da álgebra nas generalizações.

Assim, apresentamos a imagem projetada do Triângulo de Sierpinski para os alunos em *slides* e os questionamos sobre qual foi o ponto de partida para sua construção, bem como sobre quais procedimentos foram utilizados para sua construção.

Disponibilizamos um tempo para que os alunos investigassem procedimentos para a construção do fractal em questão, tendo disponíveis as ferramentas do *software* em uso. Explicitaremos um roteiro semelhante ao adotado por muitos alunos após várias tentativas.

- Abrir uma janela no Geogebra e esconder os eixos e a malha quadriculada, caso estejam visíveis, clicando em exibir eixos e malha.

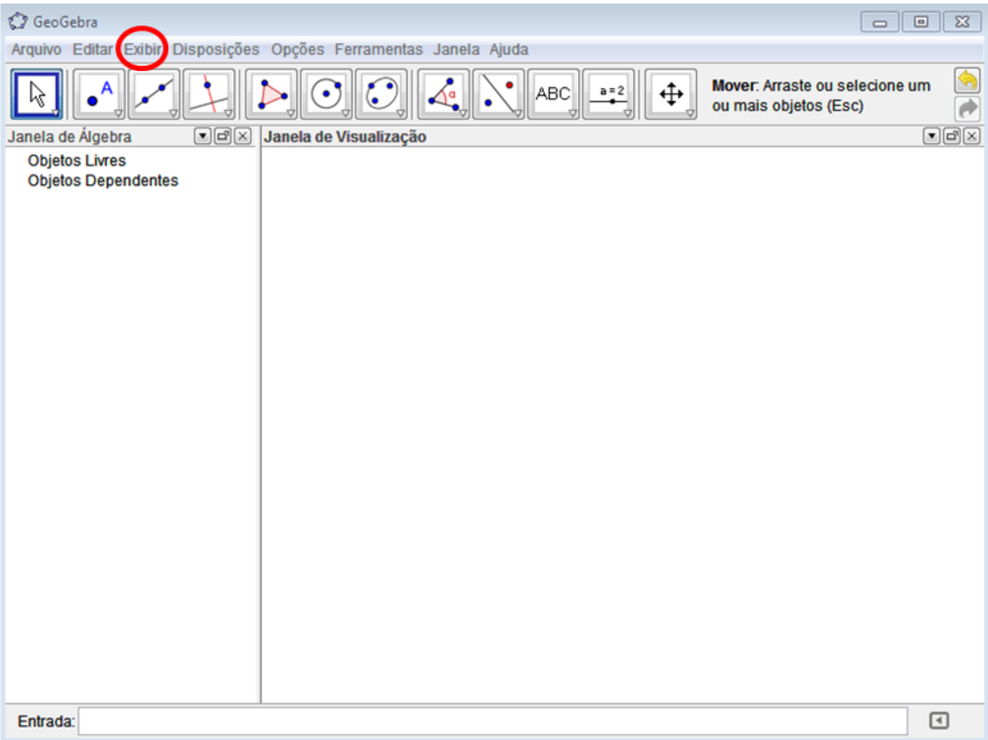


Figura 16 – Interface do Geogebra com eixos e malha ocultos.
Fonte: Interface do *software* Geogebra.

- Construir um triângulo equilátero utilizando o quinto ícone.

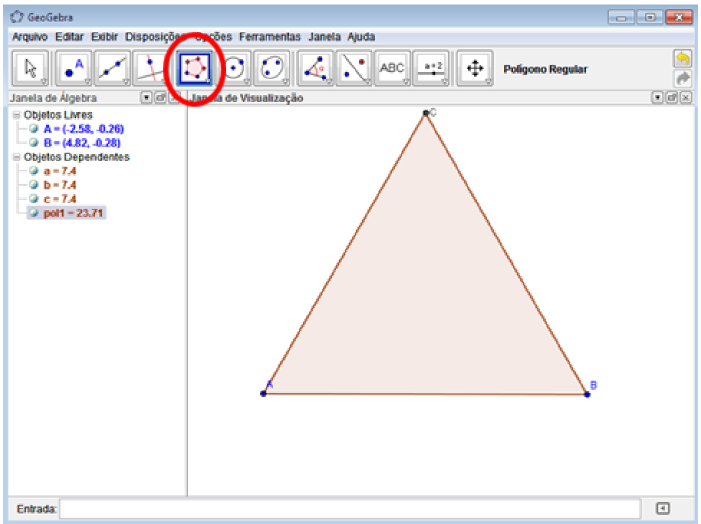


Figura 17 – Triângulo equilátero construído no Geogebra.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Em seguida marcar os pontos médios utilizando o 2º ícone.

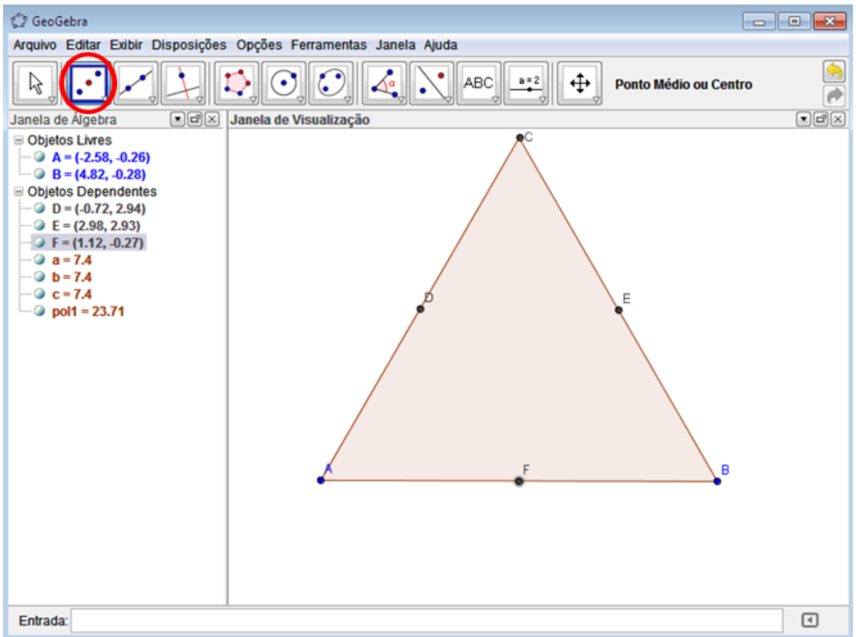


Figura 18 – Identificação dos pontos médios dos lados do triângulo.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Agora construir um novo triângulo equilátero que tenha como base os pontos médios do triângulo feito no princípio.

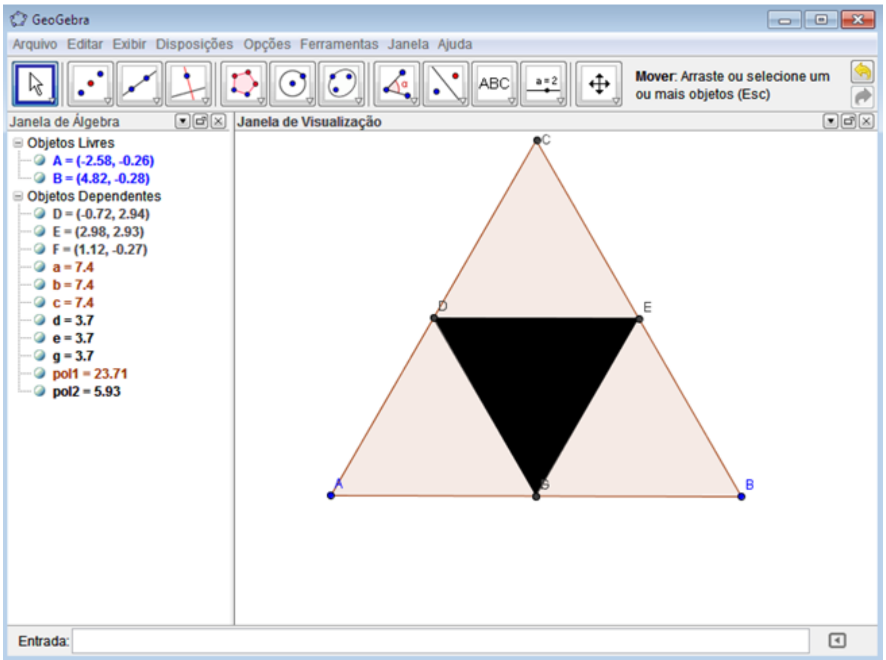


Figura 19 – Triângulo construído tendo como base os pontos médios.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Desconsiderar o triângulo central que será pintado de uma cor diferenciada a fim de termos nossa primeira iteração. Esse processo deve ser repetido marcando-se o ponto médio de cada um dos lados dos demais triângulos. Em seguida, unir os segmentos e desconsiderar o triângulo do meio e assim, sucessivamente.

Para isso, utilizaremos a criação de uma nova ferramenta na interface do Geogebra que nos facilitará essa repetição. Ela se encontra no ícone **Ferramentas- criar nova ferramenta** e, sendo utilizada, abrirá uma nova aba na tela, conforme Figura 20.

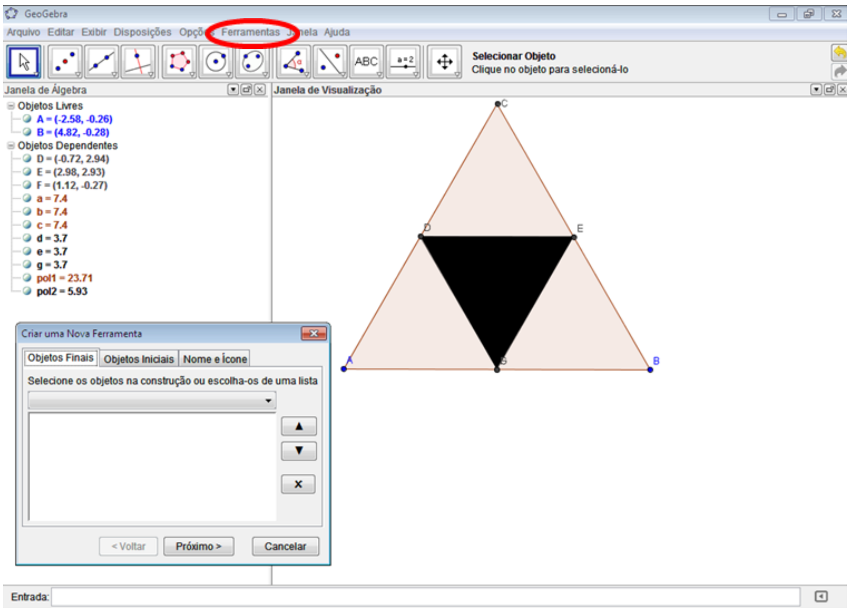


Figura 20– Visualização da janela "Ferramenta" aberta.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

Objetos finais: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros. No nosso caso são os segmentos d, e, e f. Para inseri-los na construção, basta clicar sobre esses objetos com o botão esquerdo do *mouse*.

Objetos iniciais: são objetos que foram informados inicialmente dos quais depende toda a construção. No nosso exemplo, correspondem aos pontos **A** e **B**. Esses objetos automaticamente aparecem em objetos iniciais.

Nome e ícone: nome dado, conforme desejado, ao novo ícone para a ferramenta. Após clicar em concluído irá aparecer um novo ícone com a ferramenta construída. Para utilizá-la, iremos clicar no ícone com o nome dado e nos pontos desejados.

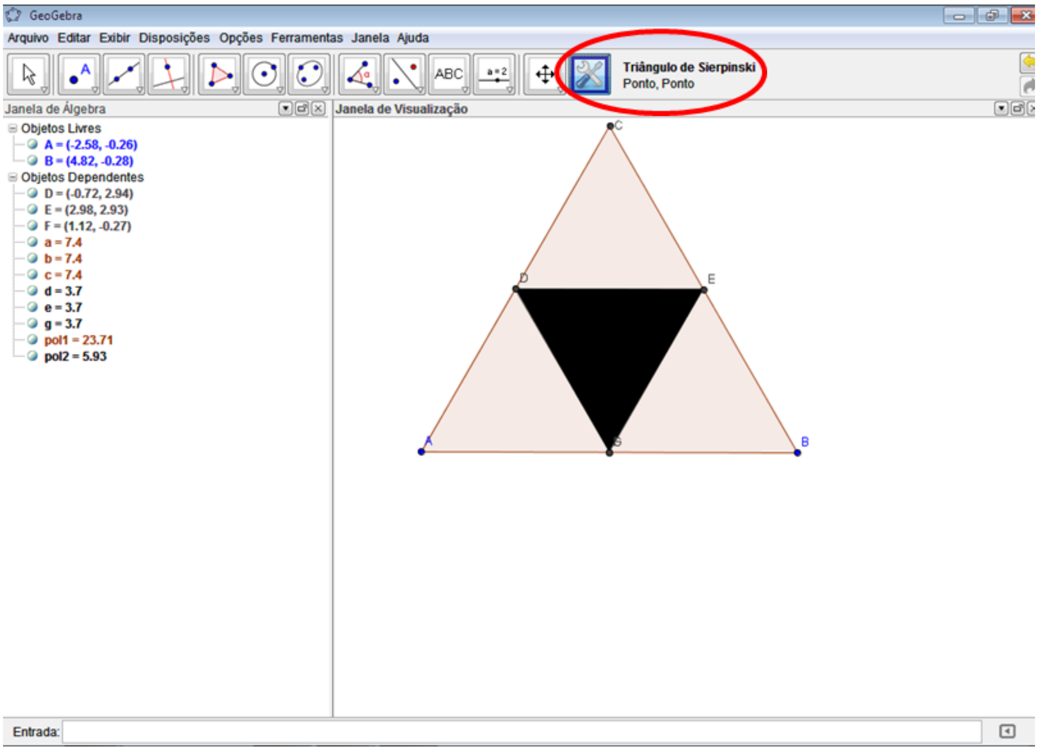


Figura 21 – Ferramenta construída com êxito.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

Depois de criada a macroferramenta, fica muito fácil fazer quantas iterações desejarmos. Após propor a realização da seguinte atividade:

1) Responda:

a) Qual foi a figura que você teve como ponto de partida para a construção do Triângulo de Sierpinski? Quais são suas caraterísticas?

____

____

b)Como podemos generalizar a medida do comprimento do lado da figura inicial?

____

____

c)Como expressar seu perímetro?

____

____

d)Quantos triângulos você ignorou em cada etapa?

____

____

e)Existe alguma regra ou fórmula para expressar o total de triângulos ignorados? Qual?

____

____

f)Quantos triângulos restam em cada iteração? O que eles representam?

____

____

g)Existe uma regra ou fórmula para expressar quantos triângulos são considerados em cada iteração? Qual?

____

____

Agora preencha os dados no quadro modificado de Gomes (2007):

Iteração	Número de triângulos	Comprimento do lado	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
0				
1				
2				
3				
...				
N				

Quadro 3 – Atividade que explora o Triângulo de Sierpinski.
Fonte: Produção da autora, adaptada de Gomes (2007).

2) O que você observa que acontece com perímetro total à medida que aumentam as iterações? Esse valor tende a quê?

____

____

3) Se considerarmos que o triângulo inicial possui área X, cada novo triângulo gerado na primeira iteração terá que área?

____

____

4) E após a segunda iteração cada novo triângulo terá qual área?

____

____

5) Na sequência, após a terceira iteração, cada novo triângulo terá área igual a :

____

____

6) Agora organizaremos esses dados num quadro modificado de Gomes (2007):

Iteração	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total
0			
1			
2			
3			
...			
N			

Quadro 4 – Continuação da exploração do Triângulo de Sierpinski.
Fonte: Quadro da autora, adaptado de Gomes (2007).

7) O que você observa que acontece com a área total à medida que aumentam as iterações? Esse valor tende a quê?

____

____

8) Considerando a área do triângulo inicial como referência responda:

a) Qual a porcentagem que a área do triângulo inicial representa?

____

b) Que porcentagem representa cada triângulo resultante da primeira iteração?

____

2.6 Atividade 6: relação entre o Triângulo de Sierpinski e o de Pascal no Geogebra (Baseada em Barbosa, 2005)

Pesquisar sobre o Triângulo de Pascal e sua relação com o Triângulo de Sierpinski e apresentar o que foi encontrado para os demais colegas da turma. Construir o Triângulo de Pascal sobre o de

Sierpinski no Geogebra com procedimentos semelhantes aos já descritos anteriormente. A única adequação necessária que deve ser feita na macroferramenta criada é forma que ela não pinte a parte que, no Triângulo de Sierpinski retirávamos, e apenas divida em novos triângulos com base no ponto médio dos lados. Divididos em grupos, cada um é responsável por pintar de cor diferenciada os múltiplos de dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez. A partir da observação, descobrir se a configuração de cada múltiplo forma ou não uma estrutura fractal. Vejamos na Figura 22 como ficaram os múltiplos de dois e três.

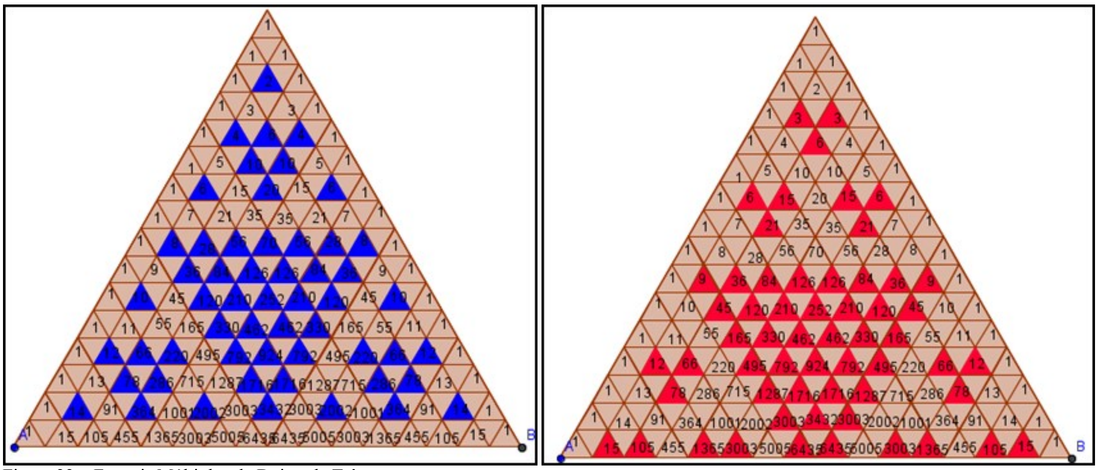


Figura 22 – Fractais Múltiplos de Dois e de Três.
Fonte: Interface do Geogebra.

Explorar com os alunos os padrões existentes em cada múltiplo, os critérios de divisibilidade adotados ou não em cada grupo questionando quando eles são úteis, facilitando o processo, e quando não auxiliam, sendo mais rápido realizar o cálculo.

2.7 Atividade 7: Carpete de Sierpinski no Geogebra

A realização da Atividade 7 tinha como objetivo identificar a regra de construção do fractal e construí-lo fazendo uso dos conhecimentos geométricos intrínsecos no processo, como a divisão do segmento em três partes iguais, o ponto de partida com o quadrado e sua área após cada iteração. Novamente o uso da álgebra, da potenciação e dos números racionais nas generalizações era um propósito.

A imagem do Carpete de Sierpinski foi projetada para os alunos e eles foram questionados sobre qual foi o ponto de partida para sua construção e quais procedimentos foram utilizados para ele se apresentar dessa forma.

Descreveremos um roteiro adotado por um número significativo de alunos:

- Construir um quadrado utilizando o quinto ícone.

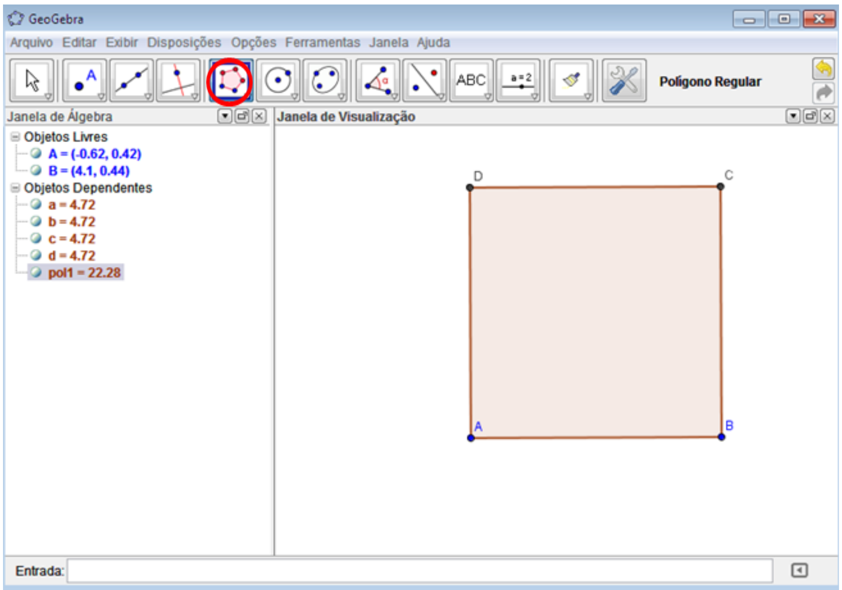


Figura 23– Quadrado construído no Geogebra.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Dividir um dos lados do quadrado em três partes iguais. Para isso adotaremos os mesmos procedimentos feitos quando dividimos o segmento na Curva de Koch.

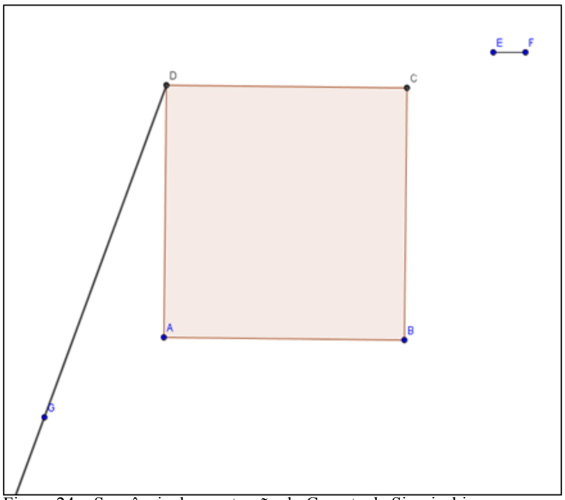


Figura 24 – Sequência da construção do Carpete de Sierpinski.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

Num outro local da tela, construir outro segmento de reta para ser nossa unidade de medida. Construir uma semirreta do ponto **D**, de qualquer tamanho.

- Agora marcar, na semirreta, três segmentos de mesmo tamanho utilizando a nossa unidade, a partir do ponto **D**. Para isso, construir uma circunferência de centro em **D** e raio e, conforme instruções constantes no 6º ícone – círculo, dados, centro e raio - e marcar a intersecção de dois objetos (circunferência e semirreta – 2º ícone). Repetir o processo mais duas vezes, centrando o círculo na intersecção. Marcar o ponto de interseção da semirreta auxiliar com a última circunferência construída.

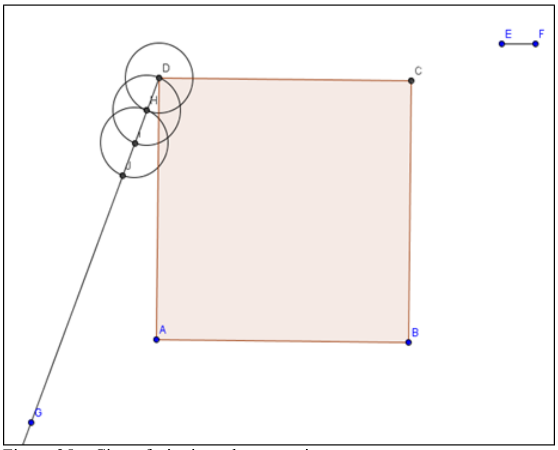


Figura 25 – Circunferências sobre a semirreta.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Traçar o segmento de reta g (3º ícone), passando pelos pontos **J** e **C** e paralelas a i passando pelos pontos de intersecção **I** e **H** de acordo com as instruções do 4º ícone (retas paralelas). Encontrar o ponto de intersecção entre o segmento c – lado do polígono - e as paralelas que passam por **I** e **H**. Observar a divisão do segmento em três partes congruentes.

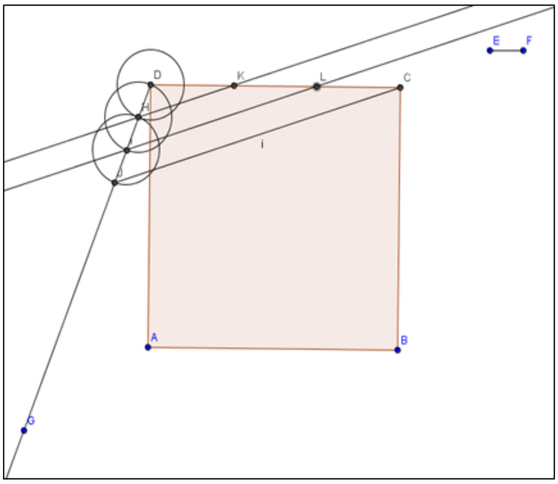


Figura 26 – Retas paralelas na construção.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Para esconder os objetos que aparecem durante a construção, basta clicar com o botão direito do *mouse* sobre o objeto e em exibir objeto. Se quiser esconder os nomes dos objetos, clicar em exibir rótulo.

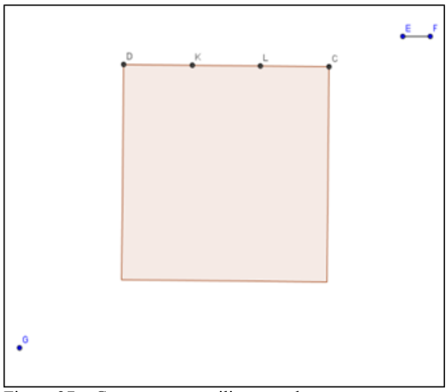


Figura 27 – Construções auxiliares ocultas.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pela autora.

- Construir um polígono regular de quatro lados - quadrado - com o uso do quinto ícone dados os pontos **K** e **D,** na sequência outro com os pontos **C** e **L**. Continuar construindo quadrados até preencher todo o espaço interno do quadrado inicial. Para representar a remoção do quadrado central, pintar de uma cor diferente.

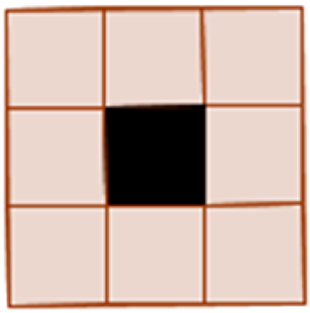


Figura 28 – Carpete de Sierpinski,1ª Iteração
Fonte: Interface do Geogebra.

- Temos, assim, concluída a primeira iteração. Para realizar as demais, criaremos uma ferramenta para evitar muitas repetições de procedimentos longos. Para isso, iremos em: **ferramenta - criar nova ferramenta -** abrindo com isso uma nova aba na tela, conforme Figura 29.

<u>Objetos finais</u>: são os objetos que quero reproduzir e que dependem de outros. No nosso caso, são os polígonos 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9 e 10. Para inseri-los na construção, basta clicar numa flecha dentro da aba aberta e selecioná-los.

<u>Objetos iniciais</u>: são objetos que foram informados inicialmente dos quais depende toda a construção. No nosso exemplo correspondem aos pontos **A** e **B**. Esses objetos automaticamente aparecem em objetos iniciais.

<u>Nome e ícone</u>: nome dado ao novo ícone com a ferramenta conforme desejado. Após a nomeação, clicar em concluído. Irá aparecer um novo ícone com a ferramenta construída. Para utilizá-la, clicar no ícone com o nome dado e nos pontos desejados.

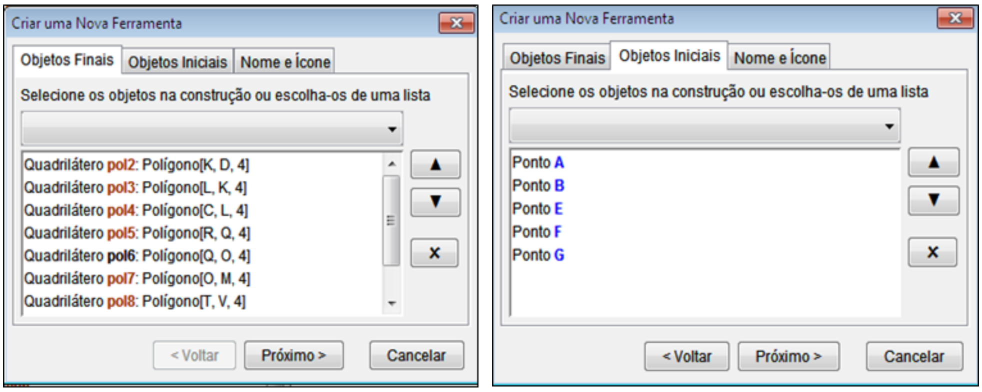


Figura 29 – Janela “Ferramenta” aberta.
Fonte: Interface do *software* Geogebra.

- Podemos realizar quantas iterações desejarmos.

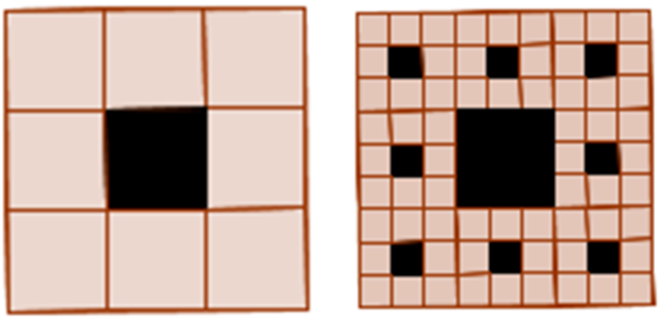


Figura 30 – Iteração 1 e 2 do Fractal Carpete de Sierpinski.
Fonte: Interface do Geogebra.

Atividade proposta para explorar conhecimentos relativos à construção do fractal carpete de Sierpinski:

Atividade posterior à construção do Carpete de Sierpinski:

1) Qual figura foi o ponto de partida para construção do fractal?

____

____

2) Quantas peças quadradas surgem:

- *Na iteração zero:*____
- *Na primeira iteração:*____
- *Na segunda iteração:*____
- *Na terceira iteração:*____
- *Na enésima iteração:*____

3) Como sabermos quantas peças quadradas surgirão após a quinta iteração?

____

____

4) Complete o quadro, modificado de Gomes (2007), considerando como medida do lado do quadrado inicial c:

Iteração	Número de quadrados	Comprimento do lado de cada quadrado	Área de cada quadrado	Área total
0				
1				
2				
3				
N				

Quadro 5 – Atividade sobre Fractal Carpete de Sierpinski
Fonte: Quadro produzido pela autora, sendo modificado de Gomes (2007).

2.8 Atividade 8: criação de fractais com uso do *software* Geogebra

A Atividade foi proposta a fim de desafiar os alunos a criar um fractal utilizando os recursos disponíveis pelo *software* Geogebra e apresentá-lo para a turma explicando as características que o definem como fractal.

2.9 Atividade 9: Construção de cartões fractais (Atividades que tiveram como base trabalho apresentado por Almeida *et al* (s/d).

A construção do cartão Degraus Centrais foi proposta a fim de diversificar os recursos em uso na abordagem do conteúdo que vem sendo desenvolvido. Assim, espera-se que os alunos consigam identificar o padrão fractal no cartão, as figuras geométricas que surgem em cada iteração com as respectivas quantidades.

A) Cartão Degraus Centrais

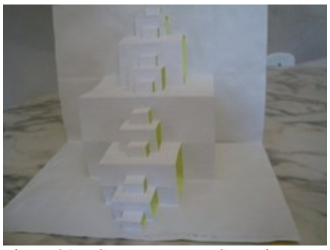


Figura 31 – Cartão Degraus Centrais, construído pelo aluno A2.
Fonte: Aluno A2.

Passos para construção do cartão:

- Pegue uma folha de tamanho A4.
- Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura.
- Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos a uma distância x das extremidades da folha, de altura $\frac{a}{2}$. Observe que: $2\ X\ \frac{x}{4}\ X\ \frac{x}{2}$
- Dobre o retângulo formado para cima, fazendo um vinco na dobra.
- Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro da figura em relevo. Pode-se dizer que esta é a primeira iteração do cartão fractal.
- Dobre novamente, pois as iterações serão obtidas seguindo os mesmos passos de 3 a 5, porém em uma escala menor, apenas na região dobrada.
- Dobre o retângulo para cima, fazendo um vinco na dobra.
- Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a figura em relevo. Neste momento, temos a primeira e a segunda iteração do cartão fractal.
- Para obter mais iterações, repita esse processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel, sempre usando a regra de corte estabelecida no passo 3. Por fim, desdobre os recortes e puxe as figuras em relevo.

Concluída a construção do cartão fractal, propor a realização da seguinte atividade:

Atividade posterior à construção do Cartão Fractal Degraus Centrais:

1) Que propriedades dos fractais podemos visualizar no cartão fractal construído?

____

____

2) Que formas geométricas resultaram dos cortes e dobraduras?

____

____

3) O que acontece após cada iteração realizada?

____

____

4) Qual o volume do paralelepípedo da primeira iteração?

____

____

5) Complete o quadro:

Iteração	Número de paralelepípedos novos
0	
1	
2	
3	
4	
...	...
N	

Quadro 6 – atividade sobre cartão fractal degraus centrais.
Fonte: autoria própria, baseado em almeida et al. (s/d).

B) Cartão Triângulo de Sierpinski

Elaborada no mesmo modelo da atividade anterior, a Atividade 9 B tinha como intenção que os alunos identificassem as formas geométricas resultantes dos cortes e dobraduras e que conseguissem fazer uso da potenciação para expressar a quantidade de novos paralelepípedos a cada iteração, fazendo, em seguida, a respectiva generalização.

Passos para a construção do Cartão Triângulo de Sierpinski:

- Pegue uma folha de tamanho A4.
- Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura.
- Com a folha dobrada ao meio, marque o ponto médio na parte dobrada de largura x e faça um corte vertical de altura y qualquer.
- Dobre um dos retângulos formado para cima, fazendo um vinco na dobra.

- As gerações seguintes serão obtidas nos dois retângulos formados no cartão, aplicando a mesma regra do passo 3. Note que os retângulos possuem $\frac{x}{2}$ de base, logo os cortes verticais em seus pontos médios devem ter altura a $\frac{y}{2}$.

De forma a explorar o fractal construído, propor a realização da seguinte atividade:

Atividade posterior à construção do cartão Triângulo de Sierpinski:

1) Que formas geométricas resultaram dos cortes e dobraduras?

____

____

2) O que acontece após cada iteração realizada?

____

____

3) Complete o quadro:

Iteração	Número de paralelepípedos novos
0	
1	
2	
3	
4	
...	...
N	

Quadro 7 – Atividade sobre Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski.
Fonte: autoria própria, baseado em Almeida et al. (s/d).

2.10 Atividade 10: construção de fractais com sólidos geométricos baseados em Souza (2010)

A Atividade 10 (A) foi planejada com o intuito de os alunos estabelecerem relações entre a figura plana e o sólido tridimensional. Era exigência que encontrassem um valor para a área de cada fractal no final de diferentes iterações e comparassem os resultados encontrados de modo a elaborarem suas conclusões sobre o que acontece com tais valores.

Propor a realização da construção do Fractal em grupos, pois individualmente ela torna-se muito trabalhosa:

A) Tetraedro de Sierpinski


Iteração 1


Iteração 2


Iteração 3

Figura 32 - Imagem de fractais construídos pelos alunos A6, A7, A14, A8, A9, A18, A11 e A13
Fonte: autoria própria.

Em grupos, propor que os alunos imaginem como seria construir no espaço o Triângulo de Sierpinski.

Obtido a partir de um tetraedro, este fractal é uma variação do Triângulo de Sierpinski no espaço.

- Construir um tetraedro;
- A partir dos pontos médios de cada aresta, obter cinco novos tetraedros semelhantes ao tetraedro original;
- Retirar o tetraedro central;
- Repetir os passos anteriores para os tetraedros anteriores e assim sucessivamente.
- Concluída a construção, propor a realização da seguinte atividade:

Atividade posterior à construção do Tetraedro de Sierpinski:

1) Qual é a área do tetraedro inicial?

____

2) Quantos tetraedros foram gerados a partir da primeira iteração? Qual é a área de cada um deles?

____

3) Como poderíamos escrever esse valor genericamente?

____

4) E a área total após a primeira iteração? Compare esse valor com a área inicial e justifique porque isso acontece?

____

5) Quantos tetraedros foram gerados a partir da segunda iteração? Qual á área de cada um deles?

____

6) E a área total após a segunda iteração? Compare esse valor com a área inicial e explique por que isso acontece.

____

B) Esponja de Menger

De maneira similar à anterior, esta atividade foi proposta com o intuito de que os alunos estabelecessem relações entre a figura plana, referindo-se ao Carpete de Sierpinski, e o sólido tridimensional confeccionado. Também foi objetivo da atividade proposta que os alunos fizessem uso da potenciação, dos números racionais e da álgebra nas generalizações exigidas e em contexto diferenciado dos anteriores. Aliado a isso, a retomada do conceito de volume era um propósito da atividade.

Inicialmente levamos para a escola um grande cubo e pedimos que os alunos sugerissem como poderíamos construir um fractal no espaço, de modo que cada face do cubo se parecesse com um Carpete de Sierpinski, que é então denominado Esponja de Menger e foi criado por Karl Menger (1902-1985).

Questionamos os alunos sobre quantos cubos e de que medida deve ser a aresta que precisamos para obtermos a primeira iteração. Cada aluno construiu um cubo de razão $\frac{1}{3}$, totalizando 27 cubos. Em seguida, os cubos centrais de cada uma das faces e o cubo central foram retirados. Para repetir esses passos em cada um dos cubos restantes, cada aluno fez uma parte.

Após o término da construção do fractal, foi proposta a seguinte atividade:

Atividade posterior à construção da Esponja de Menger:

1) Complete o quadro:

Iteração	*Aresta de cada cubo*
0	
1	
2	
3	
...	*...*
n	

Quadro 8 – Atividade sobre Fractal Esponja de Menger
Fonte: autoria própria, baseado em Souza (2010).

2) Preencha o quadro:

Iteração	*Número de cubos retirados*	*Número de cubos restantes*	*Aresta de cada cubo*	*Volume total do fractal*
0				
1				
2				
3				

Quadro 9 – Continuação da Atividade sobre o Fractal Esponja de Menger.
Fonte: Quadro de autoria própria, baseado em Souza (2010).

3) O que você observa que está acontecendo com o volume do fractal à medida que aumentam as iterações?

____

____

3. O relato da experiência desenvolvida com os alunos

3.1 Atividade 1: descobrindo a Geometria Fractal

No questionário que instigou os alunos a lembrarem de quais formas geométricas conheciam, um número significativo deles, quase a totalidade, mencionou as figuras do retângulo, triângulo e do quadrado. Destes, apenas um, ao desenhar um retângulo e nomeá-lo, errou e o confundiu com o quadrado. Acreditamos que isso tenha ocorrido pelo fato de serem figuras muito usadas no dia a dia e já estarem sendo trabalhadas desde a pré-escola. Outras figuras, como o losango, o círculo, a circunferência, o paralelogramo e o trapézio surgiram. O losango e o trapézio foram trocados por grande parte da turma, que desenhava um e dava o nome do outro, como podemos observar na Figura 33.

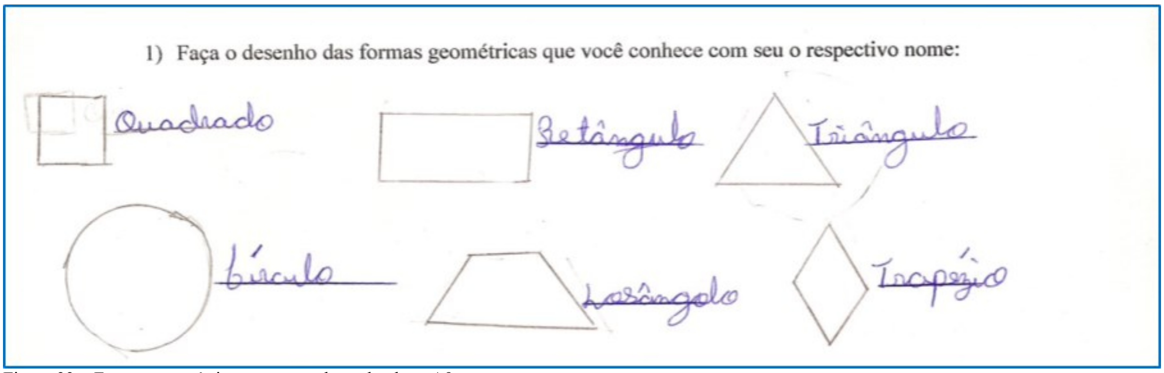


Figura 33 – Formas geométricas apresentadas pelo aluno A9.
Fonte: Atividade realizada pelo Aluno A9 (2012).

No momento em que os discentes foram convidados a observar objetos e elementos quaisquer da natureza e associá-los às formas geométricas conhecidas, percebemos que eles utilizaram um tempo maior, demonstrando hesitação nas respostas. Eles queriam primeiro encontrar algum elemento que soubessem relacionar sem antes fazerem uma listagem para depois realizar a associação. Um aluno, o último a entregar a atividade, não completou a relação de dez elementos pedidos, afirmando não ter conseguido encontrar elementos da natureza que atendessem ao enunciado.

3.2 Atividade 2: Conhecendo o *software* Geogebra

Contatar e explorar o *software* foram ações importantes para que os discentes melhor desenvolvessem as atividades, que foram posteriormente propostas. Naquele momento, foi possível perceber muitas aprendizagens sendo construídas e consolidadas. Ao abrirem as janelas com os diferentes ícones, todos com desenhos disponíveis para visualização, ouviam-se comentários, tais como: “Qual a diferença entre segmento de reta e reta?” Ou então: “Por que quando uso a ferramenta reta ela não termina nas pontas?” Além das trocas entre os alunos, houve a intervenção da professora com o intuito de utilizar as observações feitas e as experimentações para explorar de forma mais intensa os conteúdos intrínsecos nas falas ocorridas.

3.3 Construção da Curva de Koch com o *software* Geogebra

A partir da construção do fractal Curva de Koch, a atividade proposta de exploração do fractal, já mencionada, permitiu retomar para alguns alunos, e até introduzir para outros, conceitos sobre classificação de triângulos, elementos de uma circunferência, diferenciando medidas de raio e diâmetro, retas, semirretas, segmentos de reta, paralelismo. A potenciação e os números fracionários foram também muito enfatizados.

Outro aspecto a ser ressaltado, conforme mostra a Figura 34, é quanto ao campo destinado à ilustração. A maioria dos alunos não completou esse espaço até o fim, pois, na medida em que aumentava o número de iterações, eles manifestavam oralmente a dificuldade em representar o desenho e desistiam de concluí-lo. Tal fato não aconteceu quando ele foi feito com o auxílio do *software* Geogebra. Assim, esse fato evidencia a importância desse recurso para a realização das atividades propostas. O uso da ferramenta computacional fez com que o trabalho maçante da repetição do padrão geométrico em questão não ocorresse, cedendo o tempo para o desenvolvimento de outras habilidades, hoje mais importantes na educação e na sociedade.

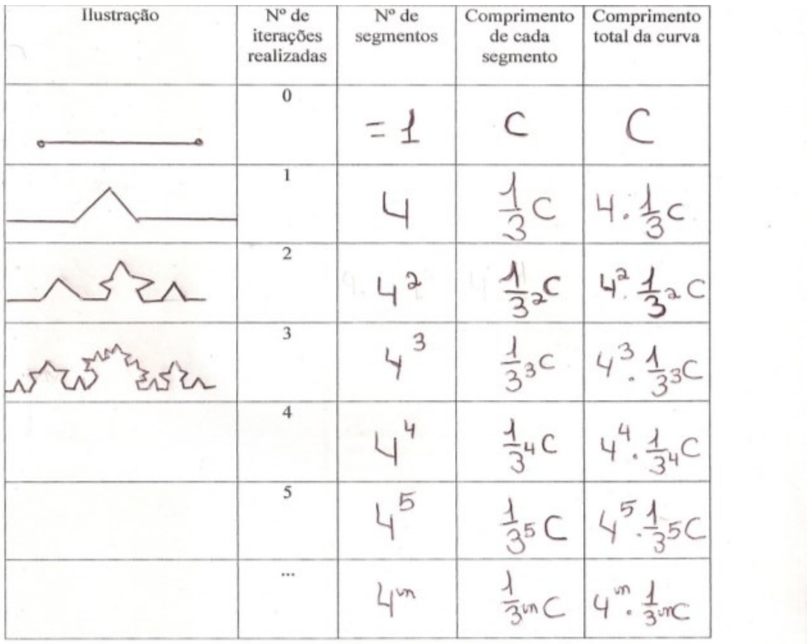


Ilustração	Nº de iterações realizadas	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da curva
	0	$=1$	C	C
	1	4	$\frac{1}{3}C$	$4\cdot\frac{1}{3}C$
	2	4^2	$\frac{1}{3^2}C$	$4^2\cdot\frac{1}{3^2}C$
	3	4^3	$\frac{1}{3^3}C$	$4^3\cdot\frac{1}{3^3}C$
	4	4^4	$\frac{1}{3^4}C$	$4^4\cdot\frac{1}{3^4}C$
	5	4^5	$\frac{1}{3^5}C$	$4^5\cdot\frac{1}{3^5}C$
	...	4^n	$\frac{1}{3^n}C$	$4^n\cdot\frac{1}{3^n}C$

Figura 34 – Atividade 3 apresentada pelo aluno A2.
Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A2.

A observação da atividade exemplificada pela Figura 16 também nos permitiu constatar que os alunos fizeram uso da potenciação para representar o número de segmentos e o respectivo comprimento, evidenciando que se apropriaram do referido conhecimento na representação da situação apresentada. Também cabe destacar o uso do número fracionário na representação do comprimento de cada segmento como importante aprendizagem efetivada, pois, em experiências anteriores, os educandos demonstravam dificuldades relacionadas ao domínio do conteúdo. Assim, atingimos o objetivo proposto pela atividade.

Ademais, podemos destacar o fato de que foram os alunos que forneceram informações e comandos para que o *software* realizasse o que desejavam e era conveniente para a ocasião numa espécie de programação. Não foi uma simples combinação de teclas ou ícones para que tudo estivesse pronto. Foi perceptível a mobilização de conceitos e estratégias já presentes na bagagem cultural de cada um, bem como a busca por outros que a atividade exigia.

3.4 Atividade 4: Construção da Ilha de Koch ou Floco de Neve com o *software* Geogebra

Um fato que merece destaque foi o desenvolvimento dessa atividade por um aluno que apresentava um histórico de muita inquietude em aula, distraindo-se sempre com muita facilidade com qualquer acontecimento ao seu redor. Essa atividade, para ele, foi especialmente desafiadora à sua concentração, assim como também deve ter sido para os demais, talvez não com a mesma intensidade, pois, ao fazer uso da macro ferramenta, é necessário que se clique nos cinco pontos de referência em uma ordem única. Como o educando em questão seguidamente se distraía, clicava em um mesmo ponto duas vezes ou não respeitava a ordem. Quando solicitava ajuda e lhe era sugerido refazer a trajetória, sendo acompanhado para que percebesse que a falta de concentração o prejudicava, reclamava muito. Entretanto, ao repetir várias vezes a mesma cena, melhorou sua postura frente ao desenvolvimento da atividade.

A troca e a ajuda mútua entre os colegas foi outro aspecto positivo e percebido quando um deles, que apresentava um domínio maior do recurso computacional, auxiliava os demais sem que fosse solicitado. Além disso, ao lidarmos com tecnologias, seguidamente acontecem fatos inusitados. Por exemplo, no trabalho de alguns colegas, ao fazerem uso da macro ferramenta criada, a iteração não saia como deveria. Entretanto, isso não acontecia em todos os segmentos, apenas em alguns, como mostra a Figura 36, e ninguém conseguia descobrir o porquê, nem a professora.

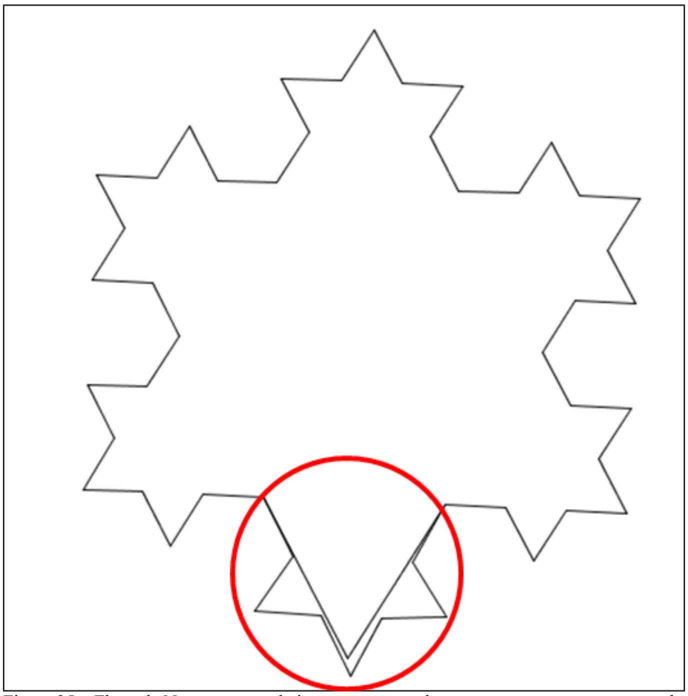
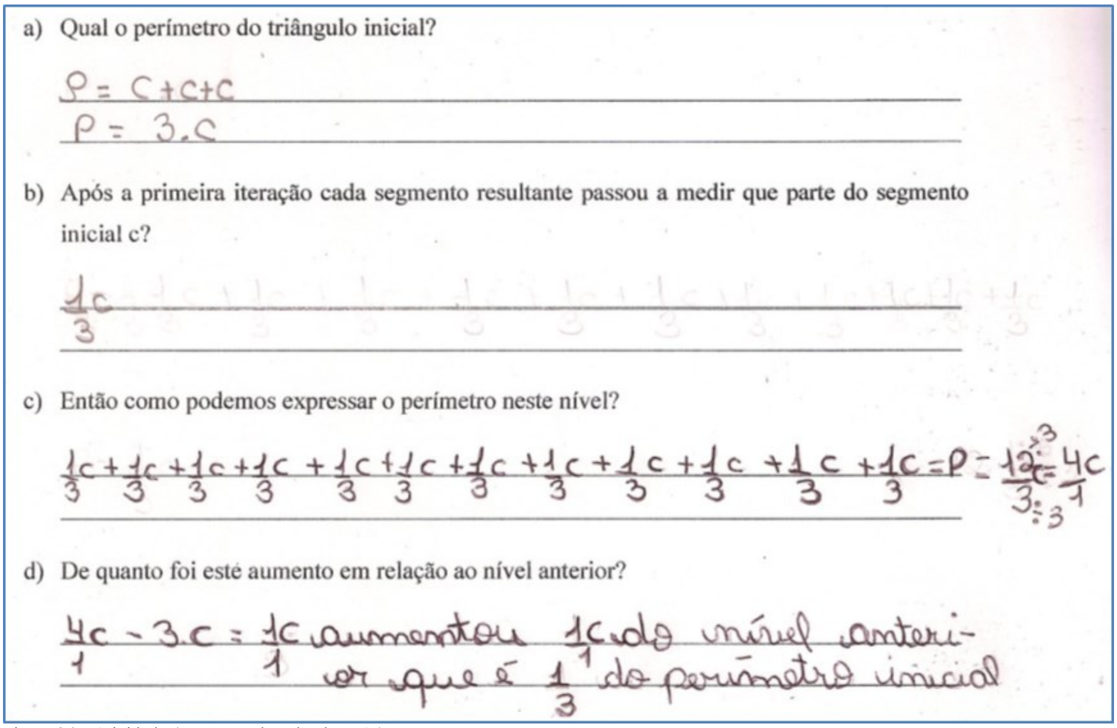


Figura 35 – Floco de Neve na segunda iteração mostrando um erro que estava acontecendo no trabalho de alguns alunos.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade construída pelo Aluno A7 (2012).

Um colega compartilhou que, ao apagar um ponto e refazê-lo, dava certo, porém, em seguida, o problema persistia. Nesse momento, outro descobriu que isso ocorria porque não estavam selecionando apenas um ponto, mas um segmento junto, provocando o erro. Esse foi um dos acontecimentos, dentre tantos, que costumam envolver o uso do computador e que se constitui, às vezes, em um dos motivos para seu não uso, por parte de alguns professores que se sentem inseguros frente a situações como essa.

Durante a realização das questões propostas, após a construção da Ilha de Koch no Geogebra, grande parte demonstrou muita dificuldade ao responder algumas delas, principalmente quando a exigência eram generalizações ou cálculos que retomavam conceitos, como operações com frações. Constatação esta baseada nos muitos questionamentos feitos durante a realização das atividades por parte dos educandos. Foi necessário instigá-los a pensar as diferentes formas de representar o pensamento matemático que expressavam oralmente, pois os obstáculos se faziam presentes quando usavam a linguagem matemática. O relato dessa situação poderia nos levar à suposição de que houve certa desvalia da atividade proposta; no entanto, nós a vimos como um ganho no processo de aprendizagem, pois os discentes foram encorajados e desafiados a crescerem e avançarem em seus conhecimentos.

Durante a realização da atividade proposta, houve alunos que não se recordavam de conteúdos, como perímetros e somas de frações, e solicitavam ajuda sem se darem conta de que dispunham, à sua frente, de uma fonte de pesquisa imensa que é a internet. Fez-se necessário sugerir-lhes que a utilizassem na busca de informações que pudessem auxiliá-los a sanarem suas dúvidas e darem sequência à atividade, conforme o exemplificado nas respostas de um aluno na Figura 36.



a) Qual o perímetro do triângulo inicial?

$P = C+C+C$

$P = 3.C$

b) Após a primeira iteração cada segmento resultante passou a medir que parte do segmento inicial c?

$\frac{1}{3}c$

c) Então como podemos expressar o perímetro neste nível?

$\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c = P = \frac{12c}{3} = \frac{4c}{1}$

d) De quanto foi este aumento em relação ao nível anterior?

$\frac{4c}{1} - 3.c = \frac{1c}{1}$ aumentou $\frac{1c}{1}$ do nível anterior que é $\frac{1}{3}$ do perímetro inicial

Figura 36 – Atividade 4 apresentada pelo aluno A4
Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A4 (2012).

Outro elemento a ser ressaltado foi a possibilidade de se rever cada uma das iterações realizadas no fractal construído sem ser necessário refazer manualmente cada etapa, o que seria muito trabalhoso. Esse recurso foi usado de forma unânime por toda a turma em praticamente todas as atividades. O uso da ferramenta computacional recebe os méritos deste retrospecto que muito colaborou para o êxito na resolução das atividades propostas.

3.5 Atividade 5: construção do Triângulo de Sierpinski com o *software* Geogebra

Nessa atividade, também foi perceptível o interesse dos alunos pelo jogo de cores permitido ao pintarem o triângulo central representando sua retirada. O uso do recurso computacional possibilitou que diferentes combinações fossem testadas com muita facilidade, despertando a criatividade e o senso estético de cada um. A visualização os motivou a investigar os conhecimentos algébricos e geométricos.

Durante o desenvolvimento das questões, os alunos demonstraram progresso quanto ao uso da álgebra para representar situações apresentadas de forma genérica. Percebemos esse fato porque houve um grupo que conseguiu completar dados, como os mostrados na Figura 38, de maneira mais independente do que no início das atividades.

Iteração	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total
0	1	x	x
1	3^1	$\frac{x}{4^1}$	$3 \cdot \frac{x}{4^1}$
2	3^2	$\frac{x}{4^2}$	$3^2 \cdot \frac{x}{4^2}$
3	3^3	$\frac{x}{4^3}$	$3^3 \cdot \frac{x}{4^3}$
...			
N	3^n	$\frac{x}{4^n}$	$3^n \cdot \frac{x}{4^n}$

Figura 37 – Atividade 5 apresentada por um aluno A16.
Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A16.

Observar as construções fractais realizadas e nelas conseguir identificar padrões geométricos e aritméticos presentes e, ainda mais, fazer uso de letras para representar suas generalizações muito contribuiu para que o uso da álgebra não se desse de forma "mecanizada". Experiências pedagógicas anteriores nos permitem afirmar que são comuns questionamentos feitos por alunos quanto à finalidade da álgebra em seus currículos, pois veem seus conceitos e aplicações de forma bastante limitada. Porém, tal fato não foi observado no decorrer das atividades desenvolvidas.

Utilizar o pensamento algébrico nas mais diferentes situações que se apresentam, abstraindo conceitos até então só trabalhados aritmeticamente, é um desafio a estudantes dessa faixa etária. Também o é aos professores que precisam propor uma prática diferenciada para que obtenham êxito.

3.6 Atividade 6: relação entre os triângulos de Sierpinski e de Pascal no Geogebra

Durante a realização da pesquisa, que teve como fonte a *internet,* percebeu-se grande dificuldade dos alunos em estabelecerem critérios de análise e seleção dos dados que encontravam. Além disso, precisavam sintetizar o que liam e reelaborar conceitos de forma própria, estabelecendo relações entre o que já sabiam e o que lhes era novo.

Durante a socialização da pesquisa realizada pela turma, fez-se necessária, por parte dos alunos, a organização do conhecimento adquirido, verbalizando-o de forma simples, visando ao melhor entendimento dos colegas. No momento em que eles conseguiram identificar, por exemplo, a aplicação das diferentes propriedades do Triângulo de Pascal e não apenas nos locais demarcados na fonte de pesquisa, eles demonstraram compreensão dos dados coletados. O registro desses dados ocorreu por meio de cartazes, como mostra a Figura 38.

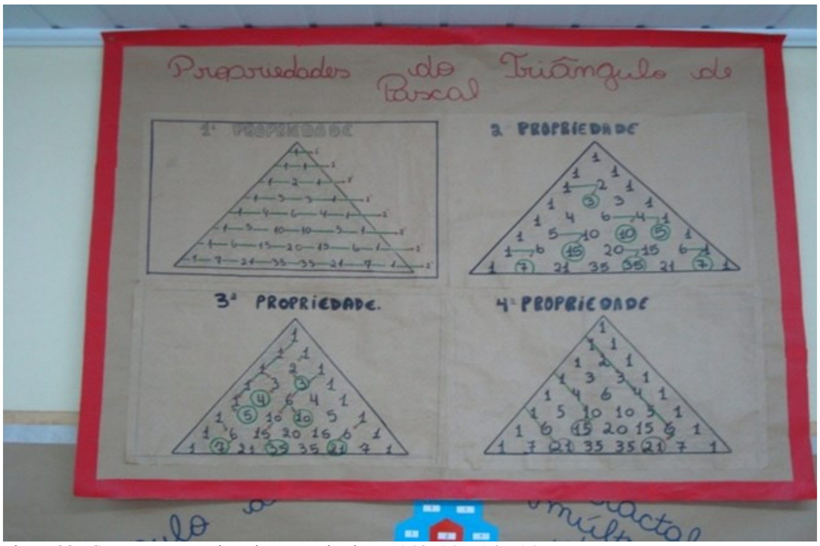


Figura 38– Cartaz apresentado pelo grupo de alunos A10, A17, A4 e A1.
Fonte: Cartaz confeccionado pelos Alunos A10, A17, A4 e A1 (2012).

Na continuidade das atividades, a turma construiu o Triângulo de Pascal partindo do Triângulo de Sierpinski e com o uso do *software* Geogebra. Vejamos na Figura 40 como ficaram as construções feitas pelos alunos:

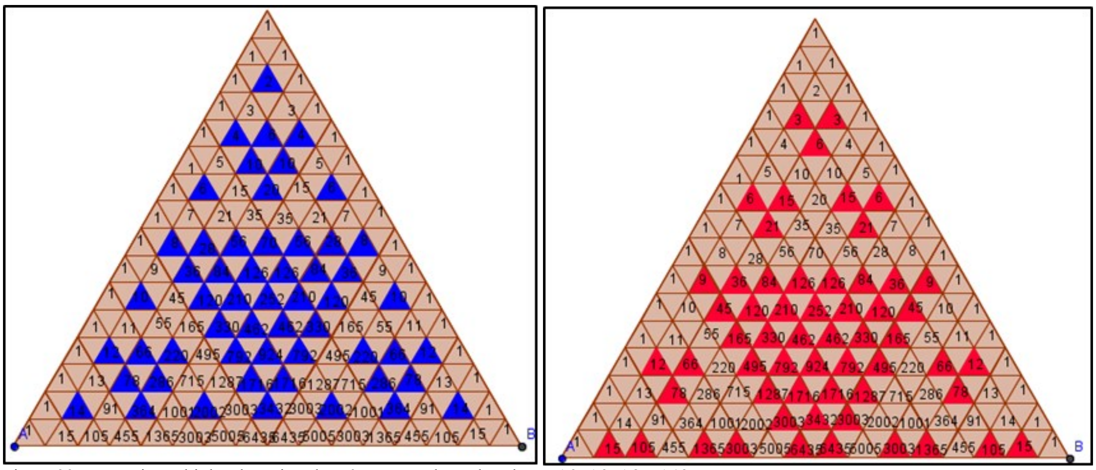


Figura 39 – Fractais Múltiplos de Dois e de Três construídos pelos alunos A2, A3, A8 e A12.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pelos Alunos A2, A3, A8 e A12 (2012).

Ao identificarem os múltiplos de dois com cor diferenciada, conforme mostrado na Figura 40, os alunos entenderam que ao somarem dois números ímpares obtinham um número par e, ao somarem dois pares, o resultado era também par. Na sequência, perceberam que a imagem acabava criando triângulos equiláteros autossimilares, caracterizando assim o fractal. Até a linha quatro, compreendemos a iteração 1; até a oito, a iteração 2 e até a dezesseis, a iteração 3. Os alunos, por iniciativa própria, demonstrando envolvimento e entusiasmo com a atividade, foram imaginando como seria a imagem da próxima iteração sem mesmo a terem feito, apenas partindo do princípio iterativo de um fractal.

Ao colorirem os múltiplos de três no Triângulo de Pascal, novamente foi identificada a presença de triângulos equiláteros, embora com padrões diferenciados do fractal dos múltiplos de dois. A iteração 1 pode ser percebida até a linha nove e a dois não foi concluída, pois precisariam ter ido até a dezoito para visualizá-la por inteiro, mas, como já haviam compreendido o processo iterativo, não tiveram dificuldade de imaginá-la.

Em processo de construção similar, seguem os outros Triângulos de Pascal com os múltiplos pintados de cores diferenciadas:

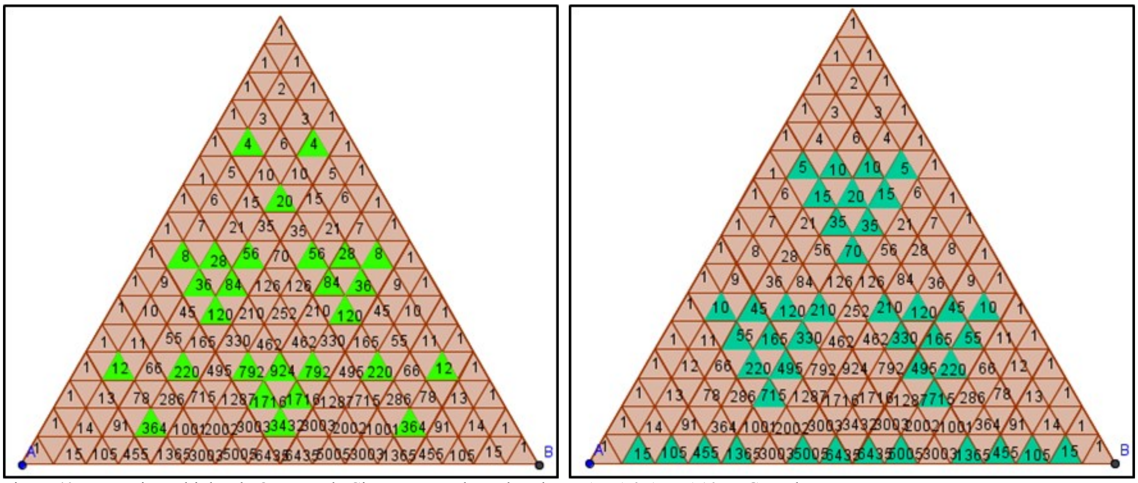


Figura 40 – Fractais Múltiplos de Quatro e de Cinco construídos pelos alunos A5, A6, A7 e A10 no Geogebra
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pelos Alunos A5, A6, A7 e A10 (2012).

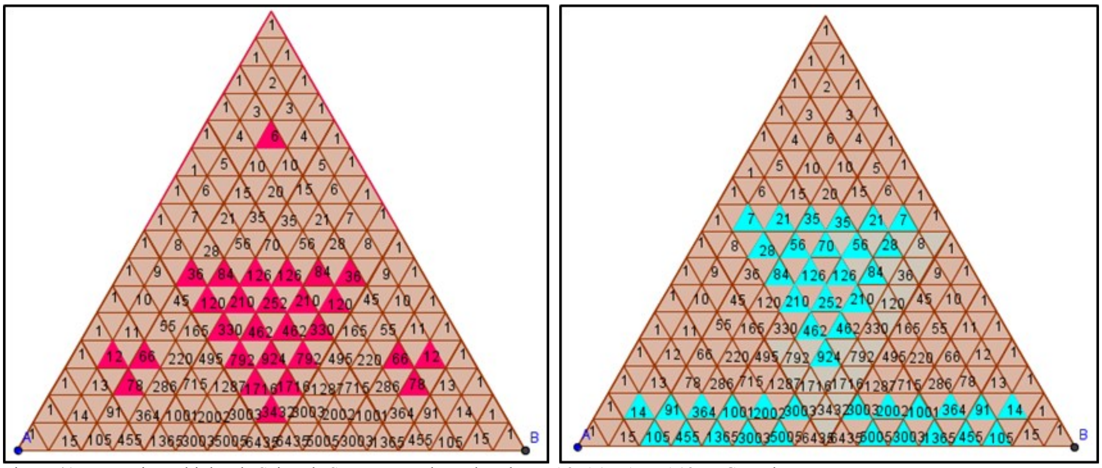


Figura 41 – Fractais Múltiplos de Seis e de Sete construídos pelos alunos A9, A17, A7 e A13 no Geogebra.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pelos Alunos A5, A6, A7 e A12 (2012).

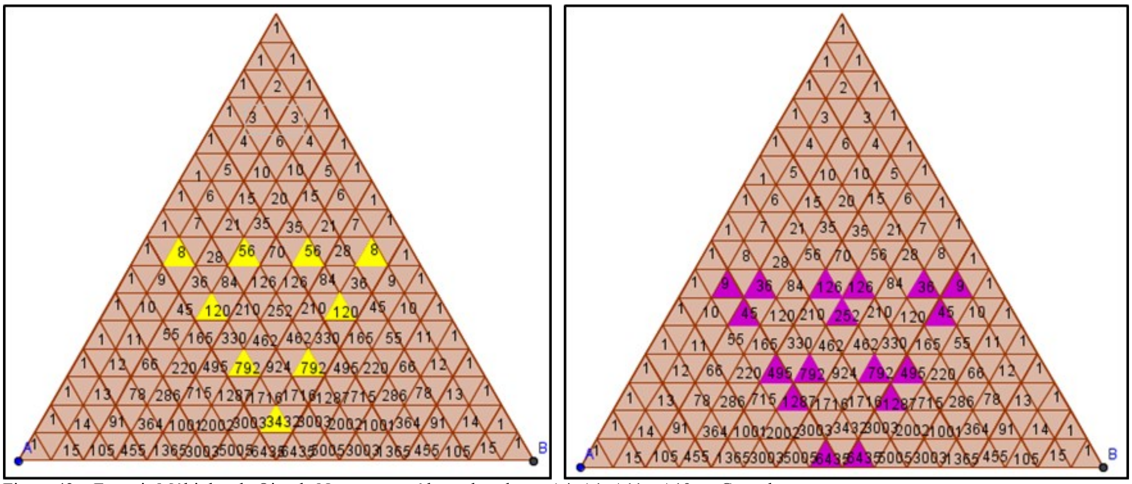


Figura 42 – Fractais Múltiplos de Oito de Nove construídos pelos alunos A4, A1, A11 e A19 no Geogebra.
Fonte: Interface do Geogebra com atividade produzida pelos Alunos A4, A1, A11 e A19 (2012).

Ao observarem a configuração dos múltiplos de seis e dez, os alunos não identificaram um padrão repetido que pudesse caracterizar o fractal. A realização dessa atividade proporcionou uma retomada dos critérios de divisibilidade, que nem sempre são recordados por todos. Contudo, não utilizaram os critérios de identificação de todos os múltiplos, pois alguns julgaram que o processo mais rápido seria realizar o cálculo ao invés de aplicar o critério.

3.7 Atividade 7: carpete de Sierpinski no Geogebra

O procedimento adotado para dividir o lado do quadrado em três partes iguais foi o mesmo que os alunos utilizaram na construção do fractal Curva de Koch. A maioria lembrou, mas houve os que, nesta etapa, necessitaram de ajuda. Ao construírem a macro ferramenta que foi mencionada no roteiro descrito, alguns conseguiram que ela já realizasse a iteração seguinte com a representação em forma de pintura da parte retirada; outros, ao concluí-la e utilizá-la, percebiam que ela não pintava a parte central conforme o desejado.

Nesse momento, então, solicitaram o auxílio da professora e dos colegas, pois tinham dificuldade em identificar o erro cometido na construção da ferramenta que fez com que esta não agisse eficazmente. Mesmo perante os obstáculos, os discentes não desistiram da realização da atividade, demonstraram-se empenhados em desenvolvê-la com sucesso. Esse fato fez com que o término da referida atividade demorasse mais tempo que o previsto. Cabe destacar que as trocas, os diálogos, as tentativas, acertos e erros também possibilitaram aprendizagens não previstas anteriormente.

Após a conclusão da construção do Carpete de Sierpinski no Geogebra, foram propostas as atividades já descritas. Como podemos observar, de acordo com o exemplificado na Figura 44, os alunos conseguiram atingir os objetivos propostos.

Iteração	Número de quadrados	Comprimento do lado de cada quadrado	Área de cada quadrado	Área total
0	$1 = 8^0$	C	A	$1A$
1	8^1	$\frac{1}{3}C$	$\frac{1}{9}A$	$8 \cdot \frac{1}{9}A$
2	8^2	$\frac{1}{3^2}C$	$\frac{1}{9^2}A$	$8^2 \cdot \frac{1}{9^2}A$
3	8^3	$\frac{1}{3^3}C$	$\frac{1}{9^3}A$	$8^3 \cdot \frac{1}{9^3}A$
N	8^n	$\frac{1}{3^n}C$	$\frac{1}{9^n}A$	$8^n \cdot \frac{1}{9^n}A$

Figura 43 – Atividade 7 apresentada pelo aluno.A10.
Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno 10 (2012).

Novamente a observação da atividade apresentada na Figura 44 evidencia aprendizagens de conteúdos, como a potenciação e os números fracionários na representação do número de quadrados e o comprimento de cada um. As medidas de superfície foram retomadas no cálculo da área de cada quadrado e o uso da álgebra para a generalização de cada situação foi consequência natural, visto que os alunos compreenderam sua função e seu significado, atingindo, assim, o nosso propósito inicial.

3.8 Atividade 8: criação de fractais com uso do *software* Geogebra

Podemos constatar no desenvolvimento da atividade que os alunos apresentaram dificuldades para inovar as construções dos fractais. Muitos utilizaram a lei de formação muito próxima das já trabalhadas. Contudo, alguns conseguiram distanciar-se dos modelos já vistos, como podemos observar na Figura 44.

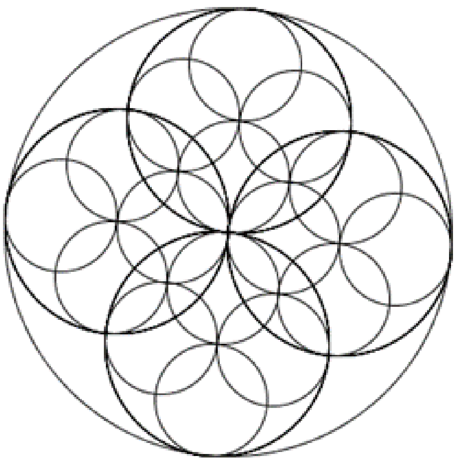


Figura 44 – Fractal criado pelo aluno A8 no Geogebra
Fonte: Interface do Geogebra com fractal construído pelo Aluno A8 (2012).

Quanto à explanação das características que identificavam cada fractal, não houve dificuldades, o que deixa claro que os alunos compreenderam a definição, atendendo às atividades que lhes foram propostas em toda a sequência de atividades até aqui relatadas.

3.9 Atividade 9: construção de cartões fractais

Alguns alunos demonstraram dificuldades no final da construção à medida que as dobras e recortes iam diminuindo gradativamente. Nesse momento, os colegas que tinham maior facilidade auxiliavam os demais junto com a professora, num clima de cooperação.

No momento do término do cartão, quando os alunos visualizaram o efeito estético oriundo das dobras e cortes, percebemos um entusiasmo coletivo, pois todos aplaudiram o resultado do trabalho de forma espontânea. Vários alunos trouxeram, no dia seguinte, outro cartão confeccionado em casa com mais iterações que as realizadas em aula, mostrando entusiasmo e superação da dificuldade com as dobras e recortes menores, pois em casa eles não tiveram quem os auxiliasse. A aprendizagem se tornou divertida e os conceitos que pretendíamos explorar foram compreendidos por todos, como podemos observar na resposta apresentada por um aluno na Figura 45.

1) Que propriedades dos fractais podemos visualizar no cartão fractal construído?

Podemos visualizar a propriedade da auto-similaridade, pois cada parte se parece com o todo. Além disso, repetimos um mesmo padrão várias vezes.

Figura 45 – Atividade 9A apresentada pelo aluno A3.
Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A3 (2012).

Quanto ao uso da potenciação para representar a quantidade de novos paralelepípedos e a respectiva generalização, foi possível observar nos registros dos alunos que eles conseguiram atingir as metas propostas. A Figura 46 comprova tal afirmação.

Iteração	Número de paralelepípedos novos
0	$1 = 3^0$
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
3	$27 = 3^3$
4	$81 = 3^4$
...	...
N	3^n

Figura 46 – Atividade 9B apresentada pelo aluno A5.
Fonte: Atividade apresentada pelo Aluno A5.

3.10 Atividade 10: Construção de fractais com sólidos geométricos

Um aspecto a destacar, no desenvolvimento da atividade, foi o trabalho de equipe, necessário e importante para que o produto final agradasse a todos, visto que o fractal foi construído em grupo para agilizar o seu término e evitar que a tarefa se tornasse maçante e cansativa.

O trabalho coletivo – fundamental para o êxito da atividade mencionada - é sempre um desafio, haja vista que cada componente do grande grupo precisava dar sua parcela de contribuição. Houve reclamações, por parte de alguns, em relação ao fraco comprometimento de colegas com a estética do trabalho, o que comprometia a aparência final deste.

A realização das atividades propostas ampliou a visão de geometria que os alunos tinham, despertando-lhes a visualização e apreciação de belas formas geométricas por meio da Geometria Fractal. O desenvolvimento do raciocínio algébrico, associado ao geométrico, possibilitou a consolidação e a construção de aprendizagens significativas.

A empolgação e a motivação da turma foram percebidas durante o desenvolvimento de todas as atividades, pois, mesmo diante dos obstáculos, não desistiam e se empenhavam a fim de manipular, analisar os padrões presentes nos fractais e em aprender a construí-los.

4. Algumas produções

Figura 47: Esponja de Menger confeccionada pelos alunos.
Fonte: Arquivo pessoal.

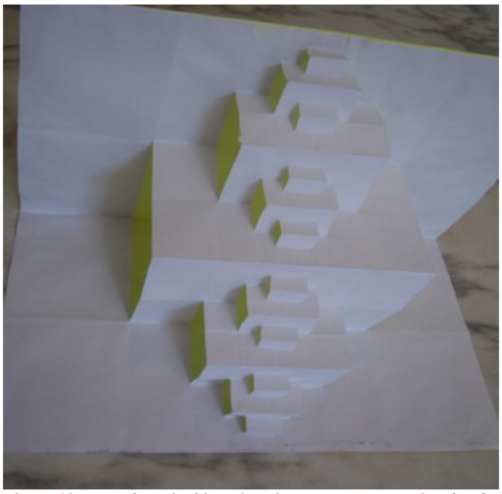


Figura 48: Fractal produzido pelos alunos e exposto no Seminário Escolar que acontece todos os anos.

5. O aproveitamento e os depoimentos de alunos, professores, coordenação e familiares

5.1Considerações feitas por alunos participantes da prática pedagógica relatada

Todos os alunos afirmaram nunca terem visto nada sobre o assunto em momento algum que antecedesse ao da realização da intervenção pedagógica realizada. Quanto ao empenho apresentado na realização das atividades, afirmam tê-lo demonstrado mesmo nos momentos em que encontravam dificuldades. O interesse que a temática despertou na turma foi apontado como fator propulsor do esforço para que todos concluíssem as atividades com êxito, como podemos observar na colocação feita pelo aluno A2: *"Eu acho que o meu empenho foi bom, porque achei interessante o tema de fractais."* Todos reconheceram ter construído aprendizagens importantes, destacando a questão da novidade, para eles, da existência dos fractais. Fazer uso de medições com certa exatidão foi outro aspecto ressaltado por muitos como podemos perceber nas transcrições que seguem:

> *"Sim, aprendi muito como medir certinho, aprendi como construir um fractal."* (A3)
>
> *"Sim, sabendo lidar com medidas exatas, fazer tudo com atenção."* (A7)
>
> *"Sim foi muito importante porque trabalhamos como medir e a concentração também foi muito usada, e eu acredito que esse trabalho trouxe algo importante."* (A9)
>
> *"Eu acho que eu consegui montar no computador alguns fractais e aprendi muita coisa que eu nem fazia ideia que existia."* (A1)

Em relação às dificuldades encontradas no que se refere ao uso do *software* Geogebra, a principal citada por eles foi a pouca precisão que tinham quando desejavam marcar um ponto em determinado lugar na tela. Apontaram como empecilho o pouco discernimento tido no momento da escolha da ferramenta adequada para atender ao que desejavam. Este, portanto, é um aspecto que consideramos positivo, pois estabelecer critérios de escolha durante as construções era um objetivo que almejávamos, visto que a dificuldade não consistia no pouco esclarecimento da função desempenhada por cada ícone, mas no planejamento e execução das etapas da construção do fractal.

Ademais, a turma, de um modo geral, considerou não ter encontrado maiores obstáculos e ressaltou que as explicações fornecidas pelo programa para a execução das ferramentas foi um elemento facilitador. Podemos observar a afirmação feita no registro do aluno A13: *" Nenhuma por que o programa era simples e explicava para que servia cada ferramenta e ainda nos possibilitava criar outras ferramentas para facilitar o nosso trabalho em cima dos fractais"*.

No que se refere à descrição das contribuições do *software* Geogebra no processo de aprendizagem, transcrevemos as respostas dadas pelos alunos na íntegra, visando uma maior fidelidade e veracidade das informações.

"Foi muito importante porque se não houvesse o software Geogebra o trabalho iria se tornar mais difícil, porque iríamos ter que medir tudo e dividir as peças cada vez mais pequenas. Mas o computador adiantou tudo para nós". (A1)

"Sim, importante, pois ele contribuiu muito, facilitou nas construções dos fractais". (A2)

"Foi muito importante para mim que aprendi novos jeitos de trabalhar, novos trabalhos geométricos, e também foi bem legal, nós trabalhamos todos em grupo. Foi importante também que ao desenvolver esse trabalho nós tivemos a visita de uma pessoa muito especial a professora da professora Teresinha". (A3)

"Aprendi a usar o software Geogebra, também tive o conhecimento de como montar um fractal. Aprendi a fazer ferramenta". (A4)

"Que é fácil, mais divertido, no computador se você fizesse certo dava exato os fractais, etc.." (A5)

"Na hora de fazer um fractal o software foi uma ajuda e tanto, pois se não tivéssemos ele, teríamos que usar régua e fazer os fractais com medição perfeita". (A6)

"Aprendi a fazer fractais, aprendi que fractais tem infinitas iterações, que pode-se fazer fractais de figuras geométricas e de algumas partes do corpo". (A7)

"Foi importante porque deu para fazer criar ferramenta e não precisou medir, foi muito mais prático". (A8)

"O software Geogebra ajudou muito no processo de aprendizagem sobre os fractais, fiz trabalhos bonitos que eu não imaginava que poderia fazer". (A9)

"Eu consegui saber a importância que a matemática tem em nossas vidas, conheci mais sobre as formas geométricas e como podemos nos divertir com os fractais". (A10)

"Porque se a gente não tivesse feito no software Geogebra a gente perderia muito tempo desenhando, medindo e fazendo outras coisas, assim já é mais rápido". (A11)

"Foi muito importante, pois sem ele teríamos que fazer a mão e seria mais difícil para fazer as medidas corretamente". (A12)

"Foi mais fácil e sem o software ia ser impossível desenhar um fractal porque ia ser muito complicado e fractal tem que ser medida certa". (A13)

"Sim. Eu aprendi novas coisas, que se um objeto for repetido várias milhares de vezes forma um fractal". (A14)

"Se não existisse o software Geogebra ia ser muito difícil realizar as atividades, pois íamos ter muito trabalho e ia ser muito demorado para fazer todos os processos pedidos". (A15)

"Foi importante porque quando nós recebíamos a folha para preencher nas tabelas era ali que eu encontrava minhas dificuldades, mas foi importante para nossa capacidade de aprender criar um fractal". (A16)

"Ele ensinou como fazer iterações com ferramentas adequadas, para que

quando nós construíssemos desse certo”. (A17)

“Contribuiu na criatividade, fez com a gente aprendesse a usar o software Geogebra, fez com que a gente aprendesse a ajudar os colegas com o que eles não conseguiam fazer e fez com que a gente pensasse e racionasse mais”. (A18)

“Foi bom porque eu não conhecia o software Geogebra e ele nos poupou muito trabalho manual, todos nós iríamos demorar muitas horas até dividir todas aquelas iterações etc..” (A19)

Novamente salientamos a precisão das medidas nas manifestações dos alunos como uma das contribuições do uso do *software* no desenvolvimento das atividades propostas. Outro aspecto muito presente nas colocações foi a rapidez proporcionada pelo uso do *software* na realização das iterações fractais A possibilidade de realização de atividades que, por meio de outros recursos costumeiramente usados seriam mais complicadas, pareceu-nos ser uma das grandes vantagens do computador como ferramenta no ensino.

Ao opinarem sobre a metodologia utilizada para trabalhar o tema, percebemos apenas posicionamentos positivos. A interação entre os colegas nos momentos de trocas e ajuda aos que apresentavam dificuldades foi um aspecto mencionado. A utilização do *software* Geogebra foi reiterada pela maioria da turma como um facilitador nas construções fractais. A diversificação da metodologia por meio das construções dos sólidos e dos cartões foi outro ponto destacado por muitos discentes, além dos relevantes comentários de apreciação a beleza dos fractais construídos.

Assim, concluímos que a prática pedagógica desenvolvida propiciou envolvimento positivo dos alunos, que se empenharam para realizar as atividades propostas. A temática dos fractais e o uso do recurso computacional foram aspectos importantes destacados por significativo número de educandos.

5.2 Considerações feitas pela coordenação pedagógica da escola

Atualmente, levando em conta o contexto educacional que se apresenta, pode-se afirmar que ações diferenciadas aplicadas na escola influenciam positivamente na aprendizagem dos educandos, bem como na inserção de conteúdos escolares elencados no plano de ensino de determinadas disciplinas.

Considera-se que a realização do trabalho de construção de fractais, valendo-se do *software* Geogebra, proposto para os alunos da 7ª série do Ensino Fundamental de nossa instituição, foi algo diferenciado e significativo. Assim, também se afirma que o desenvolvimento dessa intervenção pedagógica uniu conteúdos de geometria e álgebra, isso tudo de maneira motivadora e desafiadora para os alunos, promovendo a construção de sua aprendizagem acerca de tais conteúdos matemáticos.

5.3 Considerações feitas pelos pais

A escola realiza todos os anos um Seminário escolar onde os alunos apresentam trabalhos que produziram durante o ano letivo. Neste ano obtivemos uma presença muito grande de pais dos alunos da 7ª série que vieram ver o trabalho sobre fractais que tanto eles comentavam em casa e que eles acompanhavam a empolgação. Todos demonstraram estar maravilhados. Um deles disse: *"Eu gostei que minha filha fez o trabalho de fractais, porque ela aprendeu a se concentrar mais. Por que este trabalho exige concentração e dedicação. No começo ela achou difícil, mas depois valeu a pena quando ficou pronto. O trabalho ficou muito bonito."*

Perceber a admiração dos pais por algo que eles produziram foi gratificante a todos os alunos e os motivou a empenharem-se mais nos estudos.

6. Os resultados mais relevantes obtidos por meio da experiência

O uso da tecnologia trouxe significativas contribuições ao desenvolvimento de nossa proposta. Com uma interface de fácil entendimento, o *software* Geogebra ofereceu condições para que os alunos manipulassem os diferentes componentes das figuras construídas, permitindo a exploração e a realização de conjecturas de forma a embasar a construção de conceitos geométricos e algébricos. A possibilidade de visualizar os diferentes níveis de cada fractal, mesmo após terem concluído a construção, proporcionando uma espécie de *feedback,* foi outra vantagem da utilização desse recurso.

A precisão das medidas, ao passo que as iterações fractais iam aumentando, foi uma das contribuições obtidas com o *software* Geogebra. O uso de recursos convencionais, como régua e compasso para fazer medições em intervalos de espaço muito pequenos é uma tarefa que requer muita habilidade. Assim, o ambiente computacional proporcionou exatidão aos traçados e otimizou o tempo gasto que despenderíamos com o fazer manual dos fractais.

A exploração da Geometria Fractal encantou e desafiou os alunos, possibilitando-lhes estabelecer relações entre o referido conteúdo e os elementos da natureza que os rodeavam. A apreciação da beleza presente nas figuras fractais despertou interesse e os motivou a se empenharem na realização das atividades propostas, sem que isso significasse algum descaso aos conhecimentos matemáticos envolvidos no processo.

Contemplar os aspectos harmoniosos e observar as regularidades nas próprias irregularidades de cada fragmento fractal permitiu que os alunos percebessem o condicionamento destes aos aspectos algébricos e geométricos, favorecendo a exploração de tais conhecimentos. Desse modo, a generalização das regularidades observadas em cada fractal contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos discentes. Percebemos uma evolução da turma na apropriação da simbologia algébrica nos registros e verbalizações realizadas. A abordagem da Geometria Fractal, nesse caso, foi um aspecto que facilitou o progresso observado, visto que tornou a aprendizagem prazerosa e significativa, vinculando a álgebra a questões reais e não a meros exercícios mecânicos.

A associação da geometria fractal e da euclidiana, além de ter proporcionado descobertas fascinantes e ampliado o campo de visão geométrica, favoreceu o desenvolvimento de conteúdos típicos desta, como a construção e classificação de triângulos e ângulos, quadriláteros, retas, semirretas, ponto, paralelismo, simetria, semelhanças e diferenças, entre outros, reforçando, assim, essa fusão.

As construções fractais também possibilitaram o desenvolvimento intenso de conteúdos, como área, volume, perímetro, potenciação e frações. Vinculada a estes, tivemos sempre presente a álgebra como forma de representarmos as diferentes generalizações. Apropriar-se de conhecimentos algébricos, nesse caso, facilitou o aprendizado, visto que não foram exercícios mecânicos, era perceptível como os alunos faziam uso dela de maneira natural, já que compreendiam seu significado.

7. A argumentação sobre a importância de divulgação da experiência

Diante de tantas transformações pelas quais a sociedade tem passado é, no mínimo, sugestivo que a escola repense questões como, dentre outras, a revisão de conteúdos nas grades curriculares. Neste paradigma, a inserção da Geometria Fractal seria um complemento enriquecedor, haja vista sua ligação com as representações da natureza e sua crescente aplicabilidade em várias áreas.

Dessa forma, esperamos que a divulgação da experiência possa contribuir para despertar o interesse de professores por esta temática, que contempla aspectos relevantes ao ensino da matemática, e instigá-los na inserção do tema em suas aulas. Contudo, sabemos que esta é apenas uma dentre tantas alternativas possíveis de encaminhamento e reflexões a respeito do assunto.

A Geometria Fractal é um tema de grande potencial que muito ainda precisa ser explorado, objetivando uma abordagem nos diferentes níveis da Educação Básica. Com enfoques diferenciados e coerentes com o nível em que se encontram os estudantes, ela pode contribuir para ampliar o significado dos conteúdos construídos e ser desencadeadora de muitos outros conceitos matemáticos.

Não apenas a crescente evolução tecnológica e seus reflexos nos modos de vida, mas também a facilidade de acesso coloca a escola na condição irrefutável de fazer uso desses recursos para aprimorar o ensino. Nessa perspectiva, acreditamos que ainda há muitas outras formas de explorar, não apenas o *software* Geogebra que apresentamos neste relato, mas outras ferramentas disponíveis e de livre acesso que podem ser utilizadas para promover a aprendizagem de forma diferenciada e que podem ser instigadas ao uso a partir da divulgação deste relato.

8. Referências Bibliográficas

ALMEIDA, T. B.; MARTINELLI, R. O. M.; RODRIGUES, V. M.; SILVA, A. M. M. **Fractais no Ensino Fundamental:** explorando essa nova geometria. s/d. Disponível em: <http://www.leoakio.com/cariboost_files/fractais_20no_20ensino_20fundamental.pdf>. Acesso em: 15 de fev. 2012.

CCAPITALIA. **Fractales en la naturaleza**. Disponível em: <http://www.ccapitalia.net/?cat=146>. Acesso em 14/02/2012.

GOMES, A. S. **Motivação do estudo de áreas e perímetros de figuras geométricas através de fractais**. Monografia. Universidade Federal do Paraná. PR, 2007.

MACEDO, J. S. K.; FRANCO, V. S. **Fractais** – uma abordagem em sala de aula com o auxílio de softwares geométricos. s/d. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2204-6.pdf. Acesso em 20/04/2011>. Acesso em: 14 jul. 2011.

SOUZA, R. S. **Fractais geométricos**. (Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Alfenas. Alfenas. MG. 2010.