



O Retângulo de Prata e o mundo que nos cerca

The Silver Rectangle and the world around us

João Luzeilton de Oliveira¹

Carlos Ian Bezerra de Melo²

Resumo

Este artigo indica caminhos e sugere possibilidades de se trabalhar a Matemática de forma interdisciplinar com diversas áreas do conhecimento humano, mostrando como a mesma está presente em nossas vidas, no nosso dia a dia, embora, muitas vezes, não a enxergamos. Tem como objetivos principais mostrar que a Matemática está presente no mundo que nos cerca, em especial, na Arquitetura e na indústria gráfica, e indicar algumas conexões de interdisciplinaridade e contextualização, através de propriedades do retângulo de prata e suas relações com a razão de prata. Sua discussão sinaliza a importância de o professor conhecer bem o que ensina e, além disso, conhecer um pouco sobre outras áreas para facilitar a aprendizagem do aluno e aperfeiçoar cada vez mais o seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Matemática. Interdisciplinaridade. Contextualização. Retângulo de Prata. Razão de Prata.

Abstract

This article indicates paths and suggests possibilities of working Mathematics in an interdisciplinary way with different areas of human knowledge, showing how it is present in our daily lives, although, many times, it is not seen by us. Its main objectives are to show that Mathematics is present in the world around us, especially in Architecture and the printing industry, and to indicate some connections of interdisciplinarity and contextualization, through properties of the silver rectangle and its relations with the silver ratio. Its discussion points to the importance of the teacher knowing well what he teaches and, in addition, knowing a little about other areas to facilitate student learning and to improve more and more his own knowledge.

Keywords: Mathematics. Interdisciplinarity. Contextualization. Silver rectangle. Silver ratio.

Introdução

Estudar Matemática buscando enxergá-la no mundo que nos cerca, isto é, procurando áreas do conhecimento com as quais dialogar, é fundamental nas respostas a determinadas perguntas, como “professor, para que serve isso?”, “por quê precisamos estudar isso?” ou “onde vou utilizar isso?”. Além de respostas para essas perguntas, essa prática possibilita ao professor incentivar os alunos com a possibilidade de se executar trabalhos interdisciplinares levando-os a uma contextualização da Matemática,

¹ Doutor em Engenharia de Teleinformática com Ênfase em Computação Quântica. Universidade Estadual do Ceará (UECE), Quixadá-CE, Brasil. E-mail: joao.luzeilton@uece.br.

² Mestre em Educação. Universidade Estadual do Ceará (UECE), Quixadá-CE, Brasil. E-mail: carlosian.melo@uece.br.

contribuindo para a aprendizagem do estudante e, sobretudo, para a sua própria formação profissional (SARMENTO, 2020).

Compreender não apenas *que*, mas *como* a Matemática se faz presente no cotidiano é de fundamental importância, pois, além de perceber sua aplicabilidade em outros campos do conhecimento, podemos ver também como pesquisas nessas áreas levam a relações com a Matemática. Olhar para a fronteira da Matemática, tentando conhecer para além do que ensinamos, é um relevante exercício na proposição de atividades interdisciplinares.

Nesse sentido, corroboram Franco, Freitas e Mello (2020, p. 7), ao afirmarem que

A interação entre as áreas do conhecimento é muito mais do que o ato de usar saberes isolados de uma área para representar um conteúdo. Há a necessidade de buscarmos a interação entre diferentes áreas do conhecimento, pois, essencialmente, todo conhecimento está interligado.

Isso contribui sobremaneira para enxergarmos o mundo a nossa volta, visto que, como aponta Morin (2000), a contextualização é a busca por significados do conhecimento a partir de contextos do mundo ou da sociedade em que estamos inseridos, tendo como foco levar o aluno a compreender o quanto relevante é aplicar o conhecimento que se aprendeu, entendendo, dessa maneira, fatos e fenômenos do mundo que nos cerca. Contextualizar é, ainda mais, o poder que tem o professor de fazer uma relação entre os processos de ensinar e aprender, criando, assim, condições para que ele, juntamente com os alunos, possa experimentar a curiosidade e se encantar com a descoberta, satisfazendo o desejo de se construir o conhecimento com autonomia (FREIRE, 2011).

Os estudos de Matemática podem parecer isolados para quem os enxerga do ponto de vista da Matemática pela Matemática, ou seja, quando se olha para o seu centro. Contudo, na perspectiva de Freire (2011), para quem os enxerga sob o ponto de vista prático (olhando para a fronteira), é possível perceber como o pensamento matemático contribui para que conhecimentos matemáticos possam ser usados em outras áreas, pois promove o ensino contextualizado e, por isso, a busca pela inseparabilidade e pelas interrelações entre o fenômeno e seu contexto deve ser trabalho constante.

Nesse entendimento, a interdisciplinaridade pode ser entendida, nas palavras de Pombo, Guimarães e Levy (1994, p. 13), como a “combinação entre duas ou mais disciplinas com vista à compreensão de um objeto, a partir da confluência de pontos de vista diferentes e tendo como objetivo final a elaboração de uma síntese relativamente ao objetivo comum”. Tarefa essa nada fácil, uma vez que

A Matemática distingue-se das outras ciências não só pelo seu caráter formal e abstrato, como também pelo seu rigor na precisão dos conceitos e do raciocínio.

Adicionada à especificidade da própria ciência, sua importância, sob o ponto de vista da concepção fenomenológica, mostra-se presente na cultura de um povo, na política, em sua legislação, em suas teorias, a escola e na rua. Por sermos matemáticos, evidentemente enfatizamos e valorizamos ainda mais tal distinção (FUJITA; RODRIGUES, 2016, p. 5).

Embora, em muitos casos, ainda invisível, a Matemática ocupa um papel cada vez mais significativo no mundo que nos cerca, e relaciona-se aos mais diversos campos do conhecimento. Como na interlocução com a Medicina, por exemplo, conforme evidencia os estudos de Silva (2018b) e Melo e Silva (2019) sobre tomografia computadorizada e aplicações matemáticas no Ensino Médio. Como na relação estabelecida entre a Matemática e a Música, evidenciada em diversas pesquisas, como as de Kappraff (2001, 2002), Cabral (2015), Rodrigues (2017), Henschel e Baier (2020), Almeida (2021) e Santos (2021). Ou, ainda, no diálogo com as Engenharias, a Arquitetura, o Design, o Cinema e a Arte, estabelecido por, dentre outros, Ávila (1985), Watts e Watts (1987), Stakhov (2009), Silva (2018a), Paulino, Santos e Oliveira (2021).

Considerando, assim, que “a interdisciplinaridade tem sido um tema, cada vez mais, recorrente quando se fala sobre questões de metodologia, ensino e aprendizagem de Matemática” (MELO; SILVA, 2019, p. 83), mostraremos como essa ciência, através do retângulo de prata e de sua relação com a razão de prata, está presente no mundo que nos cerca. Além disso, apontaremos como essa relação contribui para que possamos enxergar Matemática nas folhas de papel da família A, especialmente, o papel A4, que é usado nos trabalhos do nosso dia a dia e, também, na Arquitetura, através do octógono regular.

Iniciando a discussão, na seção seguinte definiremos o retângulo de prata e a razão de prata, e estabeleceremos as relações que os envolvem.

A razão de prata (número de prata) e o retângulo de prata (retângulo romano)

Nossas considerações, nesta seção, serão feitas com fundamentos na Matemática da Harmonia que, segundo Stakhov (2009), é uma disciplina que se baseia em princípios da Harmonia e da razão de ouro. É de grande importância interdisciplinar, pois está na base das ciências, incluindo Matemática, Física Teórica e Ciência da Computação. Em outras palavras, a Matemática da Harmonia é uma disciplina que usa a razão de ouro para mostrar como a Matemática está presente em diversas áreas do conhecimento humano.

O número $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, conhecido como razão de ouro (número de ouro), tem relação com o retângulo de ouro (retângulo áureo) e pode ser encontrado na Natureza e em

algumas áreas do conhecimento humano, como Engenharias, Arquitetura, Design, Música, Arte Renascentista e Cinema, por exemplo, emprestando harmonia e beleza a essas áreas (PAULINO; SANTOS; OLIVEIRA, 2021). O número de ouro tem uma estreita relação com a sequência definida pela recorrência $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, chamada sequência de Fibonacci. Em Ávila (1985), mostra-se que $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

Outro número, também de grande importância em Matemática, que tem conexões com a própria Matemática, com a Arquitetura Romana e com a indústria gráfica, é o número $\delta = 1 + \sqrt{2}$, conhecido pelos romanos desde os séculos I e II. Este número, juntamente com o número $\sqrt{2} = \delta - 1$, foi usado como base de um sistema de proporções, na Arquitetura, pelos romanos, e, além de satisfazerem padrões matemáticos, satisfaziam também padrões de estética e beleza, trazendo harmonia a essas proporções. É sabido, pois, que

a história da proporção na arte e na arquitetura tem sido uma busca pela chave da beleza. É a beleza de uma pintura, um vaso ou um edifício devido a alguma qualidades intrínsecas à sua geometria, ou é devido inteiramente ao ofício do artista e aos olhos de quem a vê? (KAPPRAFF, 2001, p. 29).

Diferentemente de φ , o número $\delta = 1 + \sqrt{2}$ é pouco explorado em textos que contemplem suas propriedades matemáticas, sua relação com o mundo a nossa volta e, conseqüentemente, que tragam contribuições para o Ensino de Matemática. Assim, para além da Matemática e de suas propriedades, é necessário que se realize estudos interdisciplinares, mostrando como ele aparece, por exemplo, na Arquitetura, já que essa área têm como base a Matemática.

Nesse contexto, alguns matemáticos e arquitetos estudaram o número δ com o intuito de observar suas propriedades e relacioná-las com o Design e a Arquitetura, visto que sua presença foi observada em algumas construções românicas e ruínas de templos antigos. Após escavações feitas entre 1938 e 1942, perto da foz do rio Tibre, no antigo porto romano de Óstia, nas Casas Jardim, foram encontrados vestígios do uso do Sistema Romano de Proporções, isto é, fortes evidências do uso de um sistema baseado no número θ (KAPPRAFF, 2001). Segundo Watts e Watts (1987), as Casas Jardim de Óstia eram um complexo urbano desenvolvido, consistindo de apartamentos, lojas e jardins, planejado e executado por volta do ano 128 da era cristã. Possuíam um padrão geométrico baseado em um quadrado e na maneira particular de dividi-lo, chamada *corte sagrado*, o que assegurava relações proporcionais entre as partes do complexo e o complexo todo.

Recentemente, ao número δ foi dado um tratamento do ponto de vista do Design, mostrando o quanto pode ser importante para a Matemática, através de suas propriedades e possibilidades de aplicação. Conforme aponta Stakhov (2009), Vera Martha Winitzky de Spinadel (matemática argentina, 1929-2017), no ano de 1998, em um artigo sobre *Metallic Means Family*, generaliza a sequência de Fibonacci, obtendo uma família de números, chamados *números metálicos*.

Spinadel obteve os números positivos da forma $\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, que são raízes da equação $x^2 - px - q = 0$, com p e q inteiros positivos. Observe, nessa expressão, que quando $p = 1$ e $q = 1$, a mesma coincide com $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de ouro) e, quando $p = 2$ e $q = 1$, com $\delta = \frac{2+\sqrt{8}}{2}$ ou $\delta = 1 + \sqrt{2}$, batizado por Spinadel como *número de prata (razão de prata)*, em alusão ao número de ouro. Nessa família, o primeiro membro é o número de ouro φ e, o segundo, o número de prata δ , tendo ainda outros membros, como os números de cobre, bronze, níquel, platina, etc., os quais não exploraremos nesta escrita.

Assim, como o número φ , que está relacionado com a sequência de Fibonacci, o número δ está relacionado com a sequência definida pela recorrência $p_0 = 1, p_1 = 2$ e $p_n = p_{n-2} + 2p_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, chamada sequência de Pell, em referência ao matemático inglês John Pell (1611-1685) (em Oliveira (2021) mostra-se que $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_{n-1}}$). Observe que, calculando-se o quociente entre dois termos consecutivos da sequência de Pell, e considerando uma aproximação de 3 casas decimais, temos que, para $n \geq 6$, o algarismo da terceira casa decimal de $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ é sempre 4 (Tabela 1).

Tabela 1: Quociente de um número da sequência de Pell pelo seu anterior

$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{29}{12}$	$\frac{70}{29}$	$\frac{169}{70}$	$\frac{408}{169}$	$\frac{985}{408}$	$\frac{2378}{985}$	$\frac{5741}{2378}$	$\frac{13860}{5741}$	$\frac{33461}{13860}$	$\frac{80782}{33461}$	$\frac{195025}{80782}$
2,000	2,500	2,400	2,416	2,413	2,414	2,414	2,414	2,414	2,414	2,414	2,414	2,414	2,414

Fonte: Elaborada pelos autores.

Motivados pela beleza e pelas curiosidades que envolvem o número δ , bem como a certeza de contribuição para o ensino de Matemática, considerando esta como uma ferramenta para compreensão do mundo, definiremos o retângulo de prata (retângulo romano) e a razão de prata, mostrando a ligação entre ambos³, e a relação com a série de papel A, em especial, o papel A4. Apresentaremos, também, as conexões da razão de prata

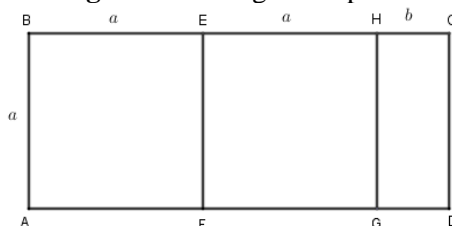
³ Para as construções da razão de prata e do retângulo de prata cf. Oliveira (2021).

com o octógono regular, e como este pode ser construído a partir de um *corte sagrado* e que está presente no *cimborrio*⁴ da Catedral de Burgos, na Espanha.

Um retângulo ABCD (Figura 1) será chamado *retângulo de prata* (*retângulo romano*) se dele forem suprimidos dois quadrados, como ABEF e EFGH, restando um retângulo, HGDC, semelhante ao retângulo original. Isto significa que se $2a + b$ e a , $a > b$, são as medidas dos lados do retângulo original, então

$$\frac{a}{2a+b} = \frac{b}{a}. \quad (1)$$

Figura 1: Retângulo de prata



Fonte: Elaborada pelos autores.

Se os pontos C e D sobre um segmento de reta \overline{AB} são tais que $AC = CD > DB$ e satisfazem a igualdade

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DB}{AC}, \quad (2)$$

então $\frac{AC}{AB}$ é chamada *razão de prata* (*número de prata*).

Figura 2: Segmento de prata



Fonte: Elaborada pelos autores.

Se $C, D \in \overline{AB}$ são tais que $AC = CD = a$, $DB = b$ e $AB = 2a + b$, $a > b$, então (2) pode ser escrita como $\frac{a}{2a+b} = \frac{b}{a}$, e assim, as relações (1) e (2) são equivalentes, de modo que os segmentos AC e CD (ou AB e AC), na Figura 2, são os lados de um retângulo de prata. Ainda, de $\frac{a}{2a+b} = \frac{b}{a}$, segue que $a^2 - 2ba - b^2 = 0$. Daí, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$, e, assim, $\frac{a}{b} = \delta$ é uma raiz positiva da equação $\delta^2 - 2\delta - 1 = 0$.

Observe que a equivalência entre (1) e (2) nos dá uma relação entre o retângulo de prata e a razão de prata: um *retângulo de prata* é um retângulo em que a razão entre o lado maior e o lado menor deste é igual à *razão de prata*: $\frac{a}{b} = \delta$.

⁴ Em português, zimbório: parte mais alta e exterior da cúpula, em forma de torre, em geral circular ou octogonal, das igrejas, templos, castelos e edifícios de grande dimensão.

O retângulo de prata (retângulo romano) e o papel A4

Apresentaremos agora algumas propriedades do retângulo de prata e suas relações com o papel A4. Um quadrado de lados na proporção 1:1, será indicado por Q(1:1) (ou Q); um retângulo de lados na proporção $\delta:1$, será indicado por RR($\delta:1$) (ou RR). Por QR($\sqrt{2}:1$) (ou QR), indica-se um retângulo de lados na proporção $\sqrt{2}:1$. Dessa maneira, considerando que Q tem lado a , RR tem lados $a\delta$ e a , e QR, lados a e $a\delta^{-1}$, temos, conforme a Figura 1, que $Q + Q + RR = RR$, $Q + RR = QR$, $QR + Q = QR$, $QR - Q = Q$ e $RR - Q = QR$. Mostraremos a seguir que qualquer folha de papel da família A é um retângulo do tipo QR e pode ser obtido a partir de um retângulo do tipo RR pela supressão de um quadrado Q.

Os papéis da série A têm os seguintes tipos de folhas A0, A1, A2, A3, A4, ..., cujo primeiro membro, A0, tem área igual a $1m^2$. Com lados medindo $1189mm$ e $841mm$, a proporção entre ambos é igual $1189:841 = 1,41... \cong \sqrt{2}:1$. Os demais membros desta série, as folhas A1, A2, A3, A4, ..., são obtidas dividindo-se o maior lado da folha anterior ao meio, e assim, essas folhas são retângulos do tipo QR($\sqrt{2}:1$), e que

$$A0 \rightarrow 2^0 = 1, A1 \rightarrow 2^1 = 2, A2 \rightarrow 2^2 = 4, A3 \rightarrow 2^3 = 8, A4 \rightarrow 2^4 = 16, \dots \quad (3)$$

Para determinar os lados de uma folha qualquer dessa família, digamos da folha A_k , com $k = 0,1,2,3, \dots, 10$ (a partir disso não faz mais sentido), inicialmente usaremos a notação $A0(h, l)$ em que h e l , com $h > l$, são os lados da folha A0. Como A0 tem área $1m^2$ e tem lados na proporção $\sqrt{2}:1$, temos que $h \cdot l = 1$ e $h = l\sqrt{2}$ e, portanto, $h = 2^{\frac{1}{4}}$ e $l = 2^{-\frac{1}{4}}$. Assim, de (3), para $k = 0,1,2,3, \dots, 10$, tem-se a sequência

$$\rightarrow A1\left(\frac{h}{2}, l\right) \rightarrow A2\left(\frac{h}{2}, \frac{l}{2}\right) \rightarrow A3\left(\frac{h}{4}, \frac{l}{2}\right) \rightarrow A4\left(\frac{h}{4}, \frac{l}{4}\right) \rightarrow \dots \rightarrow A_k(h_k, l_k) \rightarrow \dots \quad (4)$$

formada pelos demais membros dessa série com suas respectivas alturas e bases, mostrando que cada folha é obtida da anterior dividindo o maior lado dessa ao meio. Dessa maneira, a área de uma folha qualquer dessa família é a metade da área da folha anterior. Após k operações, $k = 0,1,2,3, \dots, 10$, obtém-se a folha $A_k(h_k, l_k)$, de altura h_k e base l_k , cuja área é igual a $\frac{1}{2^k}$, ou seja, $h_k \cdot l_k = \frac{1}{2^k}$. Como $h_k = l_k\sqrt{2}$, tem-se $h_k = 2^{\frac{1-2k}{4}}$ e $h_k = 2^{-\frac{1+2k}{4}}$ e, portanto,

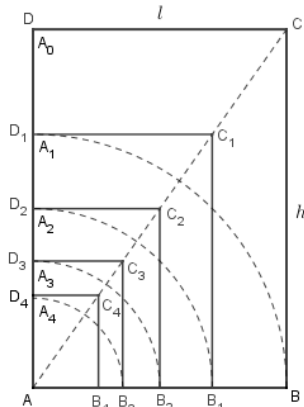
$$A_k\left(2^{\frac{1-2k}{4}}, 2^{-\frac{1+2k}{4}}\right), \quad (5)$$

Foi visto acima que os papéis da série A são retângulos do tipo QR e se originam de um RR pela remoção de um quadrado Q. O papel A4, em especial, comum nos trabalhos diários de escolas e escritórios, e utilizado em vários países, é obtido a partir do conceito de razão de prata. Para a folha A4, tem-se, por (4), que $h_4:l_4 = 2^{-\frac{3}{4}}:2^{-\frac{5}{4}} = \sqrt{2}:1$.

O papel A4, como um retângulo do tipo QR, é obtido pela remoção de um quadrado Q de um retângulo do tipo RR, restando um retângulo RR; equivalentemente, o papel A4 é formado pela junção de um retângulo do tipo RR e um quadrado Q. Quando QR é dobrado ao meio, obtém-se dois papéis de mesmas proporções e metade da área do que foi dobrado. Se do RR forem removidos dois QR restará um RR, como em (3).

Para construir os papéis A1, A2, A3, A4, ..., a partir do papel A0, consideremos um retângulo ABCD de lados l e h , tais que $h \cdot l = 1$ e $h = l\sqrt{2}$ (formato A0). Com centro em A e raio $AB = l$, construa o segmento $AD_1 = l$, $D_1 \in AD$. Por D_1 , construa $\overline{D_1C_1} \parallel \overline{AB}$, com $C_1 \in \overline{AC}$ e, por C_1 construa $\overline{C_1B_1} \perp \overline{AB}$, com $B_1 \in \overline{AB}$. Assim, o retângulo $AD_1C_1B_1$ tem formato A1. Com procedimento análogo, constróem-se os demais formatos (Figura 3).

Figura 3: Papéis da série A



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na próxima seção faremos a construção do octógono regular e o estudo de algumas de suas propriedades, apresentando evidências de como o número δ ocorre na Arquitetura e que relações possui com as proporções encontradas na construção de templos antigos.

O Corte Sagrado, o Octógono Regular e o Cimborrio da Catedral de Burgos

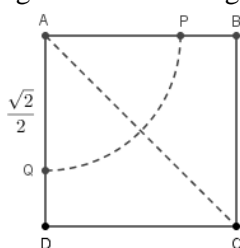
Além da beleza e harmonia nas proporções, há também interesse pelos aspectos matemáticos e padrões que aparecem nos mesmos, como, por exemplo, propriedades geométricas que tornam figuras bem proporcionadas, emprestando à Arquitetura beleza e valor estético. Estudar a história dessas proporções e suas relações com a Arquitetura, além

de uma busca pela chave da beleza, mostra como é possível fazer interdisciplinaridade com a Matemática, evidenciando algumas propriedades do Sistema Romano de Proporções, afinal, a Arquitetura baseia-se em sistemas de proporções que têm sido usados ao longo dos tempos, na construção de templos, tendo também como base a Matemática, especialmente a Geometria.

Estudaremos o *corte sagrado* e como a partir deste, constrói-se um octógono regular, um octógono regular estrelado, e sua relação com o *cimborrio* da Catedral de Burgos, destacando suas propriedades geométricas. Como veremos, é o *corte sagrado* que empresta harmonia para os detalhes geométricos dessas construções, como fachadas, mostrando algumas proporções bem particulares. O *corte sagrado* é a divisão de um dos lados de um quadrado por um ponto, de modo que a razão da maior parte nessa divisão para o referido lado é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Para a construção de um *corte sagrado*, vamos considerar um quadrado ABCD de lado 1. Com centro em A e raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, constrói-se um semicírculo que intercepta os lados AB e AD nos pontos P e Q, respectivamente, em que $AP = AQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, um arco de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e centro em um dos vértices de um quadrado de lado 1, determina sobre um de seus lados um ponto que o divide em duas partes, de modo que a razão da maior parte para o referido lado é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$: esse ponto de secção é chamado de *corte sagrado*. No quadrado ABCD (Figura 4), o ponto $Q \in \overline{AD}$ é um *corte sagrado*.

Figura 4: O corte sagrado

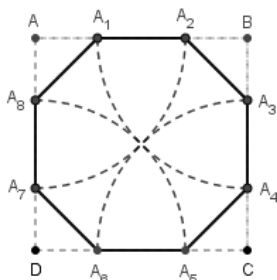


Fonte: Elaborada pelos autores.

A construção do octógono regular a ser realizada aqui, será feita a partir de oito cortes sagrados, que determinam os vértices desse octógono. A partir de um quadrado ABCD de lado 1, com centro em A e raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, determinam-se os pontos A_2 e A_7 sobre AB e AD, respectivamente. Repetindo essa construção, agora, com centros em B, C e D, determinam-se A_1 e A_4 , A_3 e A_6 , A_5 e A_8 sobre \overline{AB} e \overline{BC} , \overline{BC} e \overline{CD} , \overline{CD} e \overline{AD} ,

respectivamente. O polígono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ abaixo (Figura 5) é um octógono regular.

Figura 5: Construção do octógono regular a partir do corte sagrado



Fonte: Elaborada pelos autores.

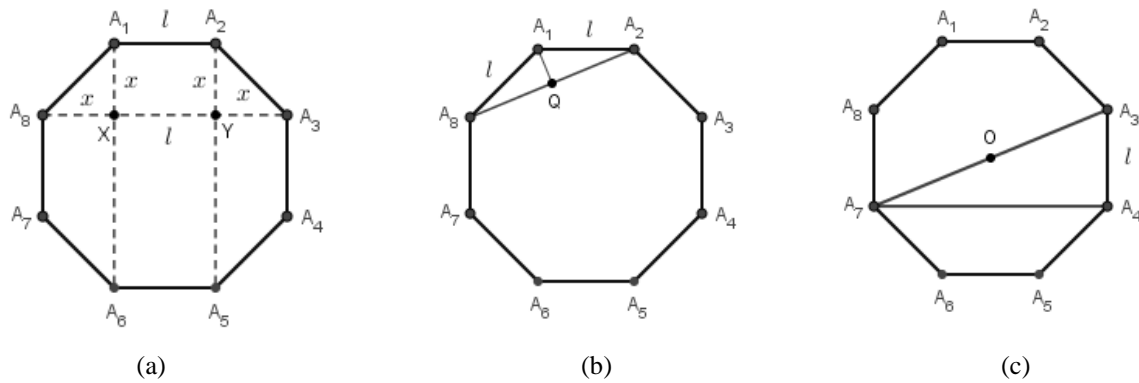
Como $A_1B = AA_2$ (por construção), temos que $AA_1 = A_2B$. De maneira análoga, mostra-se que $AA_8 = A_7D = DA_6 = A_5C = CA_4 = A_3B = BA_2 = A_1A$ e, daí, $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = A_7A_8 = A_8A_1$. Portanto, o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ é um octógono regular.

Um octógono possui 20 diagonais e, no caso do octógono regular, podem ser classificadas como segue (Figuras 6, 7 e 8). Sendo l a medida de cada um de seus lados, mostraremos que as diagonais:

- I. $A_1A_6, A_1A_4, A_2A_5, A_2A_7, A_3A_6, A_3A_8, A_4A_7, A_5A_8$ são ambas paralelas aos lados do hexágono e medem $l\delta$.(Figura 6a);
- II. $A_1A_3, A_1A_7, A_2A_4, A_2A_8, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7$ e A_6A_8 medem $l\sqrt{1 + \delta}$, e cada uma delas é a base de um triângulo isósceles cujos vértices são três vértices consecutivos desse octógono (Figura 6b);
- III. A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7 e A_4A_8 passam pelo centro e medem $l\sqrt{1 + \delta^2}$ (Figura 6c).

Estudaremos as relações das diagonais de um octógono regular e de seus lados com o número δ , bem como as relações entre essas diagonais.

Figura 6: Diagonais de um octógono regular (I, II e III)



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na Figura 6a, o quadrilátero $A_1A_2A_5A_6$ é um retângulo, pois, sendo $A_1A_2 = A_5A_6$ e $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_5A_6}$, tem-se $\overline{A_1A_6} \parallel \overline{A_2A_5}$, e assim, $A_1A_6 = A_2A_5$. Segue-se daí, que $\overline{A_3A_8} \parallel \overline{A_1A_2}$ e, portanto, $A_1A_2A_3A_8$ é um trapézio isósceles. Logo, $\widehat{XA_8A_1} = \widehat{YA_3A_2}$ e $\widehat{XA_1A_8} = \widehat{YA_2A_3}$, o que mostra que ΔA_1A_8X e ΔA_2A_3Y são triângulos retângulos isósceles e congruentes, e A_1A_2YX é um retângulo. Fazendo $A_1A_2 = A_8A_1 = A_2A_3 = l$ e $A_8X = YA_3 = x$, temos que $A_3A_8 = 2x + l$. No ΔA_1A_8X , como $A_1A_8 = x$, e assim, $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$. Portanto, $\frac{A_3A_8}{A_1A_2} = \frac{\delta}{1}$, ou seja, qualquer uma das diagonais $A_1A_6, A_1A_4, A_2A_5, A_2A_7, A_3A_6, A_3A_8, A_4A_7, A_5A_8$ do octógono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ e um dos seus lados está na proporção $\delta:1$.

O $\Delta A_1A_2A_8$, na Figura 6b, é isósceles com $\widehat{A_2A_1A_8} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$. Traçando por A_1 , o segmento $\overline{A_1Q} \perp \overline{A_2A_8}$; logo, $QA_2 = \frac{A_2A_8}{2}$ e $\widehat{QA_2A_1} = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$. Assim, no ΔA_1QA_2 , retângulo em Q, temos $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{A_2A_8}{2l}$ e, portanto, $A_2A_8 = l\sqrt{1 + \delta}$. Temos assim, a razão $\frac{A_2A_8}{A_1A_2} = \frac{\sqrt{1+\delta}}{1}$, ou seja, qualquer uma das diagonais $A_1A_3, A_1A_7, A_2A_4, A_2A_8, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7, A_6A_8$ do octógono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ e um dos seus lados estão na proporção $\sqrt{1 + \delta}:1$.

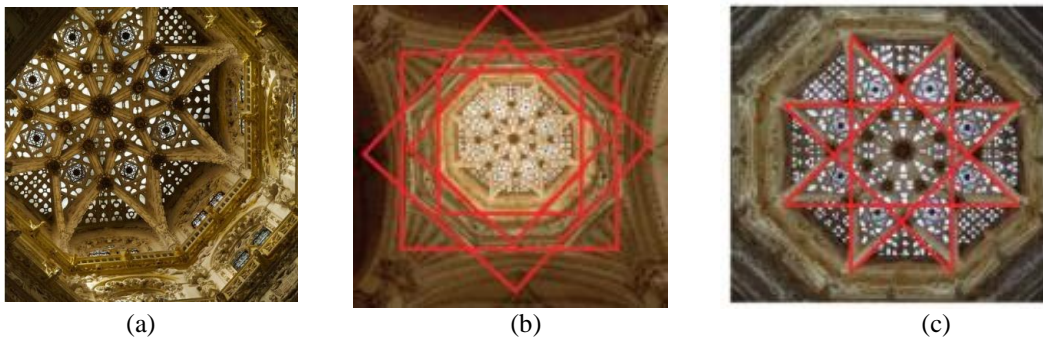
Na Figura 6c, o $\Delta A_7A_3A_4$, retângulo em A_4 , tem catetos $A_3A_4 = l$ e $A_7A_4 = l\delta$, e hipotenusa $\overline{A_7A_3}$, de modo que $A_7A_3 = l\sqrt{2(1 + \delta)}$, e assim, $\frac{A_7A_3}{A_1A_2} = \frac{\sqrt{2(1+\delta)}}{1}$, ou seja, as diagonais $A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8$ (passam pelo centro O do octógono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$) e um dos seus lados estão na proporção $\sqrt{2(1 + \delta)}:1$.

Estudaremos agora algumas propriedades matemáticas envolvidas em algumas construções em estilo românico, com o intuito de investigar como a Matemática, em

algumas situações, se relaciona com a Arquitetura, em especial, mostrar a necessidade de se estudar a Matemática e suas propriedades envolvidas nessas construções. Um exemplo que será mencionado aqui, é o *cimborrio* da Catedral de Burgos, na Espanha que, do ponto de vista geométrico, é um octógono regular que contém vários octógonos regulares estrelados, inclusive, vários quadrados. Esse *cimborrio*, é umas das mais belas cúpulas do Renascimento espanhol, um dos elementos mais importantes da catedral. Além de sua forma octogonal estrelada (Geometria), destacam-se ainda duas características, sua originalidade arquitetônica (Arquitetura) e sua abundância escultural (arte e beleza).

Esses octógonos regulares (estrelados ou não) e os quadrados que estão contidos no *cimborrio* têm seus vértices nas interseções das diagonais do octógono regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, como pode ser visto na Figura 7.

Figura 7: *Cimborrio* da Catedral de Burgos

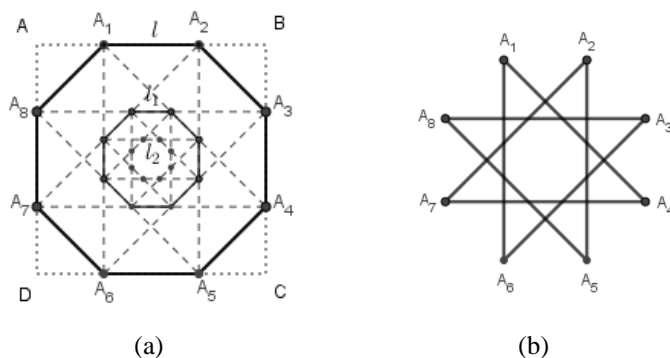


Fonte: Disponível em <http://catedraldeburgos.es/visitacultural/crucero-y-cimborrio/>. Acesso em 15 mar. 2021

Na Figura 8, adiante, tem-se um octógono regular de lado l , cujas diagonais se cruzam de modo que suas interseções são vértices de outros octógonos regulares de lados medindo $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$, tais que $l_1 = l\delta^{-1}, l_2 = l_1\delta^{-1}, \dots, l_n = l_{n-1}\delta, \dots$, ou seja, $\frac{l_1}{l} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_3}{l_2} = \dots = \frac{l_n}{l_{n-1}} = \dots = \delta$, e assim, $l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n, \dots$ formam uma progressão geométrica (P.G.) infinita de razão δ^{-1} .

Veja também que o lado do quadrado ABCD mede δl , e que as diagonais do octógono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ se cruzam de modo que os pontos de interseção são vértices de quadrados de lados $l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n, \dots$, e como $\frac{l}{\delta l} = \frac{l_1}{l} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_3}{l_2} = \dots = \frac{l_n}{l_{n-1}} = \dots = \delta^{-1}$, tem-se que a sequência $\delta l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n, \dots$ é uma P.G. infinita de razão δ^{-1} .

Figura 8: Octógono regular e octógono regular estrelado



Fonte: Elaborada pelos autores.

Essas sequências de octógonos regulares, octógonos regulares estrelados e quadrados podem ser vistas no *cimborrio* (Figura 7), e que as razões entre dois elementos quaisquer desses octógonos e quadrados, têm sempre relação com o número de prata.

Considerações Finais

Esta pesquisa, de natureza teórica, objetivou apresentar textos que mostram alguns detalhes de como a Matemática está presente em diversas áreas, evidenciando a possibilidade de se trabalhar de forma contextualizada, e apontando algumas conexões de interdisciplinaridade e contextualização, através do retângulo de prata no mundo que nos cerca. Intencionamos, ainda, mostrar que a beleza da Matemática pode ser encontrada também nas possibilidades de aplicações que ela nos permite, mas que poucos conhecem, em algumas áreas do conhecimento humano, reafirmando sua presença em toda parte.

É pequeno o número de professores e de alunos que conhecem sobre o número de prata, talvez porque não seja explorado nos livros didáticos. Além de ser possível explorar as propriedades desse número, a partir da generalização da sequência de Fibonacci, nota-se a possibilidade de explorar as propriedades matemáticas do retângulo de prata. Diante disso, este artigo pretendeu mostrar a importância de o professor de Matemática trabalhar a interdisciplinaridade, facilitando a aprendizagem e contribuindo para que seja democrático o acesso ao conhecimento matemático.

Referências

ALMEIDA, M. de C. Neurociência, História da Matemática e Música: Conexões Interdisciplinares. **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Belém, v. 16, p. 1-15, fev. 2021.

ÁVILA, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 6, p. 9-14, jan./jun. 1985.

CABRAL, R. B. **Matemática e Música: Uma Proposta de Aprendizagem**. 2015. 62f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás – UFG, Jataí, 2015.

FRANCO, R. M.; FREITAS, D. P. S. de; MELLO, E. M. B. Interdisciplinaridade e contextualização na formação docente em ciências da natureza sob a perspectiva freireana. **Tear: Revista de Educação Ciência e Tecnologia**, Porto Alegre, v. 9, n. 1, p. 1-17, 2020.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011.

FUJITA, O. M.; RODRIGUES, E. A. N. A interdisciplinaridade e a contextualização na educação básica: a matemática e o uso dos objetos digitais de aprendizagem. *In: Encontro Nacional de Educação Matemática*, XII, 2016, São Paulo. *Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. Anais...* São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2016, p. 13-16. ISSN 2178-034X

HENSCHER, C.; BAIER J. T. Progressões Geométricas e Música no Ensino da Matemática: atividades pedagógicas com violões. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 25, n. 66, p. 201-214, jan./mar. 2020.

KAPPRAFF, J. **Connections: The Geometric Bridge Between Art and Science**. Singapura: World Scientific, 2001.

KAPPRAFF, J. **Beyond Measure: A Guided Tour Through Nature, Myth, and Number**. Singapura: World Scientific, 2002.

MELO, M. F. de; SILVA, A. K. G. da. O problema da Agulha de Buffon: formalização, aplicações e interdisciplinaridade entre a matemática e a medicina. **Educação Matemática em Revista, Brasília**, v. 24, n. 61, p. 83-97, jan./mar. 2019.

MORIN, E. **Os sete saberes necessários à educação do futuro**. São Paulo: Cortez, 2000.

OLIVEIRA, J. L. de. A Razão de Prata. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 103, p. 42-46, jan./jun. 2021.

PAULINO, F. F.; SANTOS, F. W. M.; OLIVEIRA, J. L. de. O Código Da Vinci e o encontro entre Matemática, História e Arte. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 5, n. 11, p. 1-26, abr. 2021.

POMBO, O.; GUIMARÃES, H. M.; LEVY, T. **A interdisciplinaridade, reflexão e experiência**. Lisboa: Texto, 1994.

RODRIGUES, M. S. **Relacionando as funções trigonométricas com música**. 2017. 88f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, Recife, 2017.

SANTOS, J. L. F. dos. **Conexão entre Matemática e Música no contexto da BNCC à luz do conhecimento especializado do professor de matemática**. 2021. 90f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Mato Grosso – UNEMAT, Barra do Bugres, 2021.

SARMENTO, A. K. C. Práticas Docentes Universitárias e a Formação de Professores de Matemática. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 25, n. 67, p.21-38, abr./jun. 2020.

SILVA, M. M. **Desmistificando o conjunto dos números irracionais**. 2018. 76.f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central – FECLESC, Universidade Estadual do Ceará – UECE, Quixadá, 2018a.

SILVA, S. M. T. da. **Tomografia Computadorizada: uma proposta para a aplicação da Matemática no Ensino Médio**. 2018. 75. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF, Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Rio Grande, 2018b.

STAKHOV, A. **The Mathematics of Harmony**: from Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. Singapura: World Scientific, 2009.

WATTS, C. M.; WATTS, D. J. Geometrical Ordering of the Garden Houses at Ostia. **Journal of the Society of Architectural Historians**, n. 3, v. 46, p. 265-276, sep. 1987.

Recebido em: 22 de abril de 2021.

Aprovado em: 23 de agosto de 2021.