EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA
ISSN 2317-904X

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Uma Proposta de Aula para Promoção do Pensamento Funcional na Educação Básica

A Class Proposal for Promotion Functional Thinking at Basic Education

Carolina Bueno Silvestre[1]
André Luis Trevisan[2]
Jader Otavio Dalto[3]

Resumo

Este artigo apresenta uma proposta de tarefa voltada para a sala de aula de Matemática, no intuito de auxiliar/orientar o professor na promoção de discussões coletivas na Educação Básica, com foco nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Para o seu desenvolvimento, utilizamos a Trajetória Hipotética de Aprendizagem como suporte metodológico para a organização do planejamento da aula proposta. Pretendemos analisar como o trabalho com discussões coletivas em sala de aula pode contribuir para a promoção do pensamento algébrico com os alunos, principalmente no que tange ao pensamento funcional. Esperamos contribuir para a prática docente em sala de aula, com possíveis orientações para os professores, de modo a auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Tarefas matemáticas. Discussões coletivas. Pensamento Funcional.

Abstract

This article presents a task proposal aimed at a Mathematics classroom, intended to assist/guide the teacher in promotion of collective discussion in Basic Education, focusing on the Elementary and Secondary Education. For its development, we use the Hypothetical Learning Trajectory as methodological support for the organization of the proposed lesson planning. We intend to analyze how working with collective discussion in the classroom can contribute to the promotion of algebraic thinking with students, especially with regard to functional thinking. We hope to contribute to the teaching practice in the classroom, with possible guidance for teachers, in order to assist in the teaching and learning processes of mathematical content.

Keywords: Mathematics teaching. Mathematical tasks. Collective discussions. Functional Thinking.

Introdução

Os professores, muitas vezes, deparam-se com uma diversidade de respostas dos alunos nas tarefas que são propostas, porém não conhecem maneiras de usá-las para orientar a classe em direção a um entendimento mais profundo da Matemática (STEIN *et al.*, 2008).

[1] Mestranda em Ensino de Matemática (PPGMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Contato: carolinabuenosilvestre@gmail.com.
[2] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Docente da UTFPR – campus Londrina. Contato: andrelt@utfpr.edu.br
[3] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Docente da UTFPR – campus Cornélio Procópio. Contato: jaderdalto@utfpr.edu.br.

Convidar os alunos a apresentarem, de forma sistemática, as suas diversas estratégias de resoluções nas tarefas matemáticas, atrelado a outras ações como guiar/apoiar em suas explicações, informar/sugerir conceitos e desafiar a "ir além", são possibilidades na prática do professor, que podem apoiar o desenvolvimento do seu raciocínio matemático (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019; TREVISAN; VOLPATO, 2022). Trata-se de organizar e orquestrar de uma discussão matemática (STEIN *et al.*, 2008), um tipo de "debate científico que é introduzido e orquestrado pelo professor em torno de um objeto matemático comum, para alcançar uma conclusão partilhada sobre o objeto do debate" (BUSSI *apud* PONTE, 2008, p. 35).

Ao discutir as tarefas matemáticas que os professores propõem aos estudantes, Ponte (2005, p. 1, inserção nossa) lembra-nos que o "que os alunos aprendem resulta de dois factores principais: a actividade que realizam [a partir das tarefas] e a reflexão que sobre ela efectuam". Assim, "[...] não basta seleccionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula" (PONTE, 2005, p. 2).

Assumindo essa premissa, este artigo apresenta uma proposta de tarefa voltada para a sala de aula de Matemática, no intuito de auxiliar e/ou orientar o professor na promoção de discussões coletivas na Educação Básica, com foco nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Para o seu desenvolvimento, utilizamos a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) (SIMON, 1995; SIMON; TZUR, 2004) como suporte metodológico para a organização do planejamento da aula proposta, buscando orientar e direcionar o professor em como "orquestrar" essas discussões (STEIN *et al.*, 2008).

Pensamento Funcional e Tarefas Matemáticas

Uma das principais funções do ensino de Matemática é a promoção do raciocínio matemático dos alunos. Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782) apontam: "[...] para que o professor possa promover o raciocínio matemático na sala de aula, é, antes de mais, necessário um conhecimento sobre o próprio raciocínio matemático e os processos de raciocínio dos alunos". A fim de tentar compreender o raciocínio dos alunos, Lithner (2008) destaca que suas caracterizações subjacentes emanam de uma perspectiva da psicologia cognitiva, mas se estendem para considerações socioculturais ao abordar possíveis causas e consequências. Segundo o autor,

> [...] ao tentar explicar as origens dos diferentes tipos de raciocínio, a abordagem (Fig.1) é separar a *sequência de raciocínio* dos *processos de pensamento* que a criaram. Para entender porque diferentes processos de pensamento são ativados ou não, esse referencial os vê como guiados e limitados pelas *competências do aluno* que se formam em um *meio* sociocultural (LITHNER, 2008, p. 256, tradução nossa, "grifos nossos").

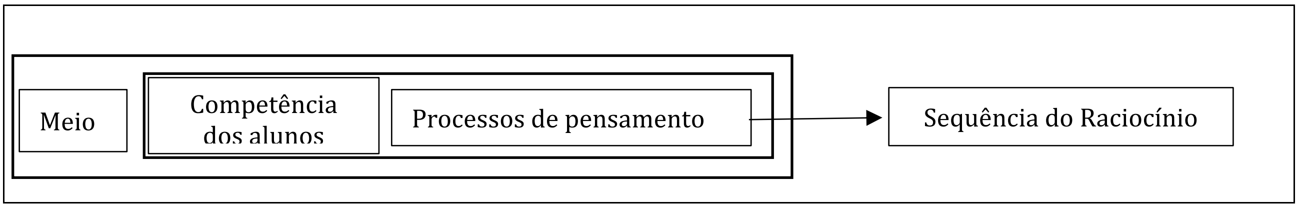

Figura 1 - A origem do raciocínio
Fonte: Lithner (2008, p. 256, tradução nossa)

Dentre os vários tipos de pensamento, destacamos o pensamento algébrico que pode ser caracterizado como o "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade" (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, tradução nossa).

No que diz respeito às orientações curriculares para o ensino da Matemática na Educação Básica, respaldamo-nos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2019), organizada em cinco temáticas que devem permear o trabalho dessa disciplina desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística). Destacamos que a

> [...] unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2019, p. 270).

Uma das vertentes do pensamento algébrico, identificada por Blanton (2008), é o pensamento funcional. Trata-se de um processo de construção, descrição do raciocínio sobre e com funções, podendo estabelecer três formas distintas de analisar as relações entre as variáveis: (1) o pensamento recursivo; (2) o pensamento covariacional e (3) o pensamento por correspondência. O pensamento recursivo envolve a análise da variação de valores sucessivos, relacionando um valor anterior com o próximo a ser determinado em uma sequência. O pensamento covariacional envolve estabelecer relações entre como as duas quantidades relacionadas variam simultaneamente. Por fim, o pensamento por correspondência relaciona-se à compreensão da relação existente entre as variáveis envolvidas.

Com a finalidade de compreender ou clarificar o pensamento funcional dos alunos e considerando o papel do meio sociocultural, apontado por Lithner (2008) nesse processo, reconhecemos a promoção de discussões coletivas em sala de aula de Matemática como uma

> [...] abordagem pedagógica com fortes potencialidades para a aprendizagem dos alunos, na medida em que estes são chamados a apresentar diversas estratégias de resolução de tarefas matemáticas ricas, a justificar os raciocínios usados, a argumentar sobre os raciocínios dos colegas e a sistematizar os principais conceitos resultantes dessa discussão (RODRIGUES; PONTE; MENEZES, 2018, p. 2).

Stein *et al.* (2008) propõem um modelo com *cinco práticas* para organizar e orquestrar uma discussão coletiva, sendo elas: (1) *antecipar,* em que o professor, antes de iniciar uma discussão coletiva com os alunos, deve estar preparado com a antecipação das possíveis respostas a que eles podem chegar nas tarefas, de prováveis dificuldades que podem ocorrer no momento de elaboração das resoluções e das estratégias de como auxiliá-los a ultrapassar suas dificuldades; (2) *monitorar,* na qual, durante a fase de exploração da tarefa matemática, o professor acompanha o trabalho dos alunos e identifica os conceitos, as dificuldades, os diálogos dos alunos em pequenos grupos, as habilidades que cada aluno desempenha, ou seja, monitora as respostas dos alunos às tarefas matemáticas observando, podendo ajudar, com pequenas intervenções, os alunos a progredirem na tarefa; (3) *selecionar,* em que o professor seleciona os alunos específicos para apresentar suas respostas matemáticas no momento de discussão coletiva, escolhendo estratégias de resoluções que têm potencial para serem apresentadas em coletivo; (4) *sequenciar,* que é o momento em que o professor organiza a sequência de apresentações dos alunos, de modo que envolva os alunos nas ideias que pretende analisar, facilitando o processo de aprendizagem, e (5) *conectar,* em que, no momento das discussões coletivas dos alunos, o professor estabelece conexões entre as respostas dos alunos, relacionando as representações e promovendo comparações entre as diferentes estratégias, fazendo com que ocorram a argumentação e a sistematização dos conteúdos matemáticos envolvidos na tarefa.

Portanto, o desenvolvimento do trabalho do professor de Matemática em sala de aula requer a elaboração de um planejamento detalhado de todos os procedimentos a serem desenvolvidos durante as discussões matemáticas em uma tarefa. Partindo dessa ideia, e considerando as possibilidades de tarefa matemática para a sala de aula, no intuito de favorecer o envolvimento tanto dos alunos quanto do professor na promoção do ensino e da aprendizagem de conceitos matemáticos, elencamos a THA como um suporte metodológico, que orienta e direciona os procedimentos a serem tomados em sala de aula.

Para Gómez e Lupiañez (2007, p. 81), há dois usos diferentes da THA: "como uma ferramenta de pesquisa e como uma ferramenta de planejamento". Portanto, nosso artigo pretende utilizar uma tarefa matemática na THA como uma ferramenta de planejamento, voltada para as discussões coletivas em sala de aula, buscando contribuir para a elaboração do pensamento funcional.

Com base nos trabalhos de Simon (1995) e Simon e Tzur (2004), Rossetto (2016, p. 90), destaca que

> [...] uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem é um planejamento (programa) bem detalhado do caminho, ou caminhos, da aprendizagem do estudante. O professor estabelece objetivos que quer que o estudante alcance, seleciona tarefas que farão que esses objetivos sejam alcançados e, por fim, hipotetiza como o estudante desenvolverá a tarefa para atingir os objetivos. Essas hipóteses são variadas e podem ser modificadas.

As principais características de uma THA, segundo Simon e Tzur (2004), são:

> As tarefas são selecionadas com base em hipóteses acerca do processo de aprendizagem; as hipóteses sobre o processo de aprendizagem se baseiam nas tarefas propostas.
> Esse construto se fundamenta nos seguintes pressupostos:
> 1.A construção de uma THA se baseia na compreensão do conhecimento atual dos estudantes aos quais será oferecido um dado ensino.
> 2.Uma THA é o veículo para planejar a aprendizagem de um determinado conceito matemático.
> 3.As tarefas matemáticas proporcionam as ferramentas para promover a aprendizagem de um determinado conceito matemático e, portanto, são elemento chave do processo de ensino.
> 4.Dada a natureza hipotética e inerentemente incerta deste processo, o professor ver-se-á obrigado a modificar sistematicamente cada aspecto da THA (SIMON; TZUR, 2004, p. 93, tradução nossa).

Para elaborar uma THA, de acordo com Simon (1995), o professor define o(s) objetivo(s) de aprendizagem, constrói as tarefas e desenvolve, de forma "hipotética" (porque a trajetória real de aprendizagem não é conhecida previamente), como elas serão resolvidas, supondo as possíveis dúvidas e as diferentes maneiras dos alunos ao pensarem na resolução.

Assim, o presente artigo tem como objetivo orientar o professor na aplicação de uma tarefa de matemática, mostrando toda a construção de uma THA, por meio do uso de uma proposta que visa o desenvolvimento do pensamento funcional, voltado para a Educação Básica. Nossa intenção é estimular e/ou instigar o professor para que, durante uma aula convencional de Matemática, possa trabalhar com uma dinâmica diferente no processo de ensino de conceitos matemáticos, envolvendo os alunos em discussões coletivas, por meio do levantamento de hipóteses de respostas, promovendo a socialização e a interação entre eles, por meio da troca e do diálogo.

Construindo a THA

Este artigo é uma proposta de aula que teve sua origem no contexto da disciplina "Ensino de Variação de Grandezas", do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federadl do Paraná (UTFPR) – campus Cornélio Procópio e Londrina, no 1º semestre de 2020, da qual a primeira autora é estudante regular; o segundo autor, docente da disciplina; e o terceiro autor é o orientador da estudante.

A disciplina teve por objetivo criar um espaço de reflexão, discussão e problematização a respeito de variações de grandezas e implicações pedagógicas associadas aos temas. Para isso, foi proposta a seguinte tarefa: organizar um plano de aula com tarefas que contemplem o tópico matemático de representação e análise gráfica, com respaldo na literatura envolvendo pensamento funcional e na promoção de discussões coletivas.

A tarefa matemática na THA

Inicialmente, procuramos uma tarefa que possibilitasse a exploração do conteúdo "função do 2º grau", voltada para a interpretação do ponto de máximo da função e do estabelecimento da relação das grandezas envolvidas no enunciado. Precisávamos, então, de uma tarefa com o potencial para promover as discussões coletivas em sala de aula (PONTE, 2005; RODRIGUES; PONTE; MENEZES; 2018; STEIN *et al.*, 2008), que envolvesse possibilidades de representação e análise gráfica desse tipo de função. Como aponta Ponte (2005, p. 12), a

> [...] planificação de uma unidade não se reduz à seleção de umas tantas tarefas, exigindo que o professor pondere muitos fatores que podem indicar ênfases maiores ou menores em certos tipos de tarefa, certos modos de trabalho, certos materiais.[...] Toda a planificação pressupõe a definição (explícita ou implícita) de uma estratégia de ensino, onde sobressaem sempre dois elementos, a atividade do professor (o que ele vai fazer) e a atividade do aluno (o que ele espera que o aluno faça), e se estabelece um horizonte temporal para a respectiva concretização (um certo período de tempo ou número de aulas).

Assim, encontramos na dissertação de Hanke (2008) a tarefa da *Economia aérea* com potencialidades conforme os objetivos que tínhamos proposto, com enunciado apresentado na Figura 2.

Leia atentamente o problema proposto:

"Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia aérea cobrou de cada passageiro R$800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago no vôo. Qual deve ser o número de passageiros para que a companhia tenha lucro máximo?"

Responda aos questionamentos abaixo:

1) Caso o avião faça a viagem completo, ou seja, com todos os lugares ocupados, qual será o montante arrecadado pela empresa?
2) E tendo apenas um lugar vago, terá uma arrecadação maior ou menor que a anterior?
3) Faça o cálculo agora, para 98 lugares ocupados.
4) O que você fez para efetuar esse cálculo?
5) Agora, complete a tabela abaixo:

Total de lugares	Total de lugares vagos	Total de passageiros	Valor pago por passageiro	Total arrecadado pela empresa
100	0	100	800,00	
100	1	99	810,00	
100	2			
100	3			
100	4			
100	5			
100	...			

6) Você consegue estabelecer uma relação entre o total arrecadado pela empresa e o número de lugares vagos no vôo? Explique seu raciocínio.
7) Com essa relação, é possível responder ao problema mencionado? Explique.

Figura 2 - Atividade 13 - Economia aérea
Fonte: Hanke (2008, p. 180)

A partir da tarefa proposta por Hanke (2008) e da nossa experiência enquanto docentes da Educação Básica, realizamos uma antecipação das possíveis respostas a que os estudantes poderiam chegar, das prováveis dificuldades que poderiam ocorrer no momento de elaboração das resoluções e das estratégias de como auxiliá-los a ultrapassar suas dificuldades (STEIN *et al.*, 2008), optando por fazer algumas adaptações no enunciado original (Figura 3), tais como:

- trocamos a palavra "*problema"*, do enunciado original, por "*situação"* para que os alunos leiam sem julgar antecipadamente que se trata de um "problema".
- também retiramos a pergunta "*Qual deve ser o número de passageiros para que a companhia tenha lucro máximo?"* do enunciado original para que os alunos explorassem a construção de tabela e, a partir dela, elaborassem um raciocínio para a generalização da relação entre as quantidades envolvidas;. Além disso, não é possível se falar em lucro da empresa, mas apenas no total arrecadado como função do número de passegeiros. O cálculo do lucro, efetivamente, envolveria um estudo das despesas fixas e variáveis, o que não é o caso aqui.
- como, na tabela original da tarefa, a terceira coluna, *"Total arrecadado pela empresa"*, não apresenta a descrição do cálculo envolvido, resolvemos apresentar o cálculo desenvolvido pelo menos nos dois primeiros valores atribuídos para orientar os alunos na elaboração do raciocínio.
- optamos por inserir linhas na qual a quantidade de lugares vagos envolve quantidades maiores, levando o aluno a observar que o total arrecadado nem sempre é crescente, bem como a existência de simetrias.

Tarefa: *Economia aérea*

Leia atentamente a situação proposto:

"Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia aérea cobrou de cada passageiro R$800,00 mais R$ 10,00 para cada lugar vago no vôo".

Responda aos questionamentos abaixo:

1) Caso o avião faça a viagem completo, ou seja, com todos os lugares ocupados, qual será o montante arrecadado pela empresa?

2) E tendo apenas um lugar vago, terá uma arrecadação maior ou menor que a anterior?

3) Apresente em detalhes os cálculos necessários para terminar a arrecadação na empresa no caso de 98 lugares ocupados.

5) Agora, complete a tabela abaixo, conforme o total de lugares vagos indicados:

Total de lugares	Total de lugares vagos	Total de passageiros	Valor pago por passageiro	Total arrecadado pela empresa
100	0	100	800	= 100 x 800 = 80.000
100	1	99	810	= 99 x 810 = 80.190
100	2			
100	3			
100	9			
100	10			
100	11			
100	50			
100	60			
100	99			

6) Você consegue estabelecer uma relação entre o total arrecadado pela empresa e o número de lugares vagos no vôo? Explique seu raciocínio.

7) Qual deve ser o número de passageiros para que a companhia tenha a maior arrecadação em dinheiro? Explique seu raciocínio.

Figura 3 - Proposta de tarefa
Fonte: Adaptado de Hanke (2008)

Procedimentos em sala de aula

Como uma proposta de aula, elaboramos o Quadro 1 com algumas orientações metodológicas a fim de guiar e/ou auxiliar o professor no planejamento do trabalho com a tarefa (Figura 3), descrevendo os conteúdos abordados, segmento de ensino a ser aplicado, as habilidades que a tarefa contempla conforme o documento da BNCC (BRASIL, 2018), a metodologia a ser utilizada, material a ser utilizado e o tempo previsto para a sua realização.

Orientações Metodológicas	
Objetos de conhecimento	Relação entre grandezas
Conteúdos abordados	Expressões algébricas; Equação do 2º grau; Função do 2º grau;

Segmento	9ºano do Ensino Fundamental e/ou 1º ano do Ensino Médio[4]
Habilidades (BNCC) *Requisitos prévios*	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. (EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas. (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Habilidades (BNCC)	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
Dinâmica da aula	Trabalho em grupos com 3 ou 4 alunos.
Recursos (materiais e didáticos)	• Folha com a atividade proposta aos alunos; • Lousa, giz e apagador; • Cadeiras e carteiras arrumadas em grupos para os alunos; • Lápis, caneta, borracha e régua para os alunos; • Folha de papel quadriculada para os alunos (gráfico);
Tempo previsto	4 horas/aula (2 encontros de 100 minutos): 1º e 2º momentos (2horas/aula); 3º e 4º momentos (2horas/aula)

Quadro 1 - Orientações Metodológicas
Fonte: Elaborado pelos autores

Essa tarefa possibilita que o professor explore diferentes estratégias de resolução e, a partir delas, promova discussões coletivas com intervenções nos pequenos grupos e, também, em plenária envolvendo toda a turma.

[4] Retomada de conteúdo do Ensino Fundamental – Anos Finais

No intuito de incorporar a tarefa a uma THA, sugerimos quatro momentos para a sua aplicação em sala de aula:

- ✓ *1º momento* - Para a resolução da tarefa proposta, é necessário que os alunos já tenham o conhecimento de requisitos prévios de conteúdos, como: saber resolver uma equação do 2º grau, compreender a fatoração de expressões algébricas, relacionar as grandezas, identificar a relação das grandezas, escrever expressões algébricas. O professor pode dividir a turma em grupos, com 3 ou 4 alunos e, logo após o primeiro contato com a tarefa, o professor pode esclarecer as possíveis dúvidas quanto ao enunciado da tarefa; em seguida, deve solicitar e disponibilizar um tempo de cerca de 40 minutos para que os grupos trabalhem.
- ✓ *2º momento* - O professor deve circular pelos grupos e observar a produção e discussões geradas monitorando e selecionando as respostas para serem socializadas – Stein *et al.* (2008). Nesse momento, o professor pode e deve estimular os alunos por meio de questionamentos, como:

  - “Essa ideia serve para qualquer quantidade de passageiros no avião?”;

  - “Vocês conseguem encontrar outras formas para resolver esta questão?”;

  - “O total arrecadado aumenta com o número de lugares vagos?”

  - “Em que situação ter lugares vagos deixa de ver vantajoso para empresa? Por que isso ocorre”?

  - “Vocês percebem alguma relação entre a quantidade de lugares vagos no avião e o valor total arrecadado pela empresa?”;

  - “Que conhecimento matemático você imagina que seja necessário para resolver a tarefa?”.
- ✓ *3º momento* - Realizar uma plenária envolvendo toda a turma, sequenciando as soluções que foram escolhidas para serem discutidas. Nesse momento, o professor deve aproveitar para levantar questionamentos necessários e dúvidas que possam surgir quanto à resolução da tarefa, instigando e estimulando os alunos a compartilharem suas estratégias, deixando espaço para que os alunos dialoguem uns com os outros, respeitando o espaço, o tempo e o raciocínio de cada um.
- ✓ *4º momento* - O professor, após a plenária, pode fazer as considerações finais, aproveitando o momento para estabelecer conexões entre as respostas dos alunos, relacionando as representações e promovendo comparações entre as estratégias

diferentes, fazendo com que ocorra a argumentação e a sistematização dos conteúdos matemáticos envolvidos na tarefa (STEIN *et al.*, 2008).

A seguir, apresentamos algumas possíveis respostas e possibilidades para a promoção de discussão a partir delas.

Hipóteses de resolução da tarefa – preenchimento da tabela

Quanto aos resultados esperados na resolução da tabela, acreditamos que os alunos não apresentariam dificuldades para resolvê-la, visto que o conhecimento envolvido requer dos alunos as habilidades de conhecimentos prévios das operações básicas, como a adição, subtração e multiplicação; mas poderiam surgir dúvidas na formulação da generalização do total arrecadado pela empresa e sua representação por meio de um produto notável, ou na forma de equação do 2ºgrau.

1ª solução: relação de correspondência

Fazendo a tabela do enunciado:

Total de lugares	***Total de lugares vagos***	***Total de passageiros***	***Valor pago por passageiro***	***Total arrecadado pela empresa***
100	0	100	800	80.000
100	1	99	810	80.190
100	2	98	820	80.360
100	3	97	830	80.510
100	....	....	...	...
100	$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{100 - \boldsymbol{n}}$	$\mathbf{800 + 10.\boldsymbol{n}}$	$\mathbf{(100 - \boldsymbol{n}).(800 + 10\boldsymbol{n}) = -10\boldsymbol{n}^2 + 200\boldsymbol{n} + 80.000}$

Nessa 1ª solução, esperamos que os alunos desenvolvam a relação de correspondência entre as variáveis do total de passageiros e o valor pago por passageiro, aprimorando o pensamento funcional para chegar à generalização de (100 – n), que é o total de passageiros, e (800 + 10.n), correspondente ao valor pago por passageiro, para poder atribuir (100-n).(800+10.n) como o total arrecadado pela empresa.

2ª solução: padrão recursivo

Fazendo a tabela do enunciado:

Total de lugares	***Total de lugares vagos***	***Total de passageiros***	***Valor pago por passageiro***	***Total arrecadado pela empresa***
100	0	100	800	= 100 x 800 = 80.000
100	1	99	800 + 10	= 99 x (800+10) = 80.190
100	2	98	800 + 10 + 10	= 98 x (800+10+10) = 80.360
100	3	97	800 + 10 +10+10	= 97 x (800+10+10+10) = 80.510
100	...	...	...	...
100	$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{100} - \boldsymbol{n}$	$\mathbf{800} + \mathbf{10}.\boldsymbol{n}$	$= (\mathbf{100} - \boldsymbol{n}).(\mathbf{800} + \mathbf{10}\boldsymbol{n})$ $= -\mathbf{10}\boldsymbol{n}^2 + \mathbf{200}\boldsymbol{n} + \mathbf{80.000}$

Nesta 2ª solução, esperamos que os alunos reconheçam o padrão recursivo, ou seja, verifiquem que o valor pago por passageiro está relacionado com o anterior, conforme varia o total de passageiros, desenvolvendo o pensamento funcional para chegar às generalizações de cada informação apresentada.

3ª solução: pensamento covariacional

Fazendo a tabela do enunciado:

Total de lugares vagos	0	1	2	3	...	n
Total arrecadado pela empresa	80.000	80.190	80.360	80.510	...	$= (\mathbf{100} - \boldsymbol{n}).(\mathbf{800} + \mathbf{10}\boldsymbol{n})$ $= -10n^2 + 200n + 80.000$

Nessa 3ª solução, esperamos que os alunos verifiquem a relação covariacional entre as variáveis, ou seja, que os alunos consigam reconhecer que, à medida que varia o total de lugares vagos, acontece também uma variação no total arrecadado pela empresa e vice-versa.

Hipóteses de resolução da tarefa – obtenção do lucro máximo

Após chegar à função do 2º grau , $\mathrm{T(n)} = -10\mathrm{n}^2 + 200\mathrm{n} + 80.000$, temos:

- ✓ ***Variáveis independentes****: quantidade de lugares vago (n)*
- ✓ ***Variáveis dependentes:*** *Total arrecadado pela empresa (T)*
- ✓ ***Domínio da função:*** *D(T(n)):* $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^{+}$; $\{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}/\mathbf{0} \leq \boldsymbol{n} \leq \mathbf{100}\}$
- ✓ ***Imagem da função:*** *Im(T(n)):* $\mathbb{Z}^{+}$

1ª solução

Fazendo $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{0}$ para encontrar as raízes da função e aplicando a fórmula resolutiva de equações do 2º grau, temos:

$$-\mathbf{10}\boldsymbol{n}^2 + \mathbf{200}\boldsymbol{n} + \mathbf{80.000} = \mathbf{0}$$

$\Delta = \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}.\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}$

$\Delta = (\mathbf{200})^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}.(-\mathbf{10}).\ \mathbf{80.000}$

$\Delta = \mathbf{3.240.000}$

$$\boldsymbol{n} = \frac{-\boldsymbol{b} \pm \sqrt{\Delta}}{\mathbf{2}.\boldsymbol{a}}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{-\mathbf{200} \pm \sqrt{\mathbf{3240000}}}{\mathbf{2}.(-\mathbf{10})} = \frac{-\mathbf{200} \pm \mathbf{1800}}{-\mathbf{20}}$$

Temos duas raízes, no caso $\boldsymbol{n}_{\mathbf{1}} = -\mathbf{80}$ e $\boldsymbol{n}_{\mathbf{2}} = +\mathbf{100}$. Porém, a raiz negativa é descartada, pois o domínio da função inclui apenas uma parte do conjunto dos números naturais. Assim, quando houver 100 lugares vagos, a empresa não recebe nada. A abscissa do vértice, representada pelo símbolo $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{V}}$, indica o número de passageiros que possibilita a arrecadação da empresa é a média aritmética simples das duas raízes, ou seja:

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{v}} = \frac{-\mathbf{80} + \mathbf{100}}{\mathbf{2}} = \frac{+\mathbf{20}}{\mathbf{2}} = +\mathbf{10}$$

2ª solução

Fazendo $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \mathbf{0}$ para encontrar as raízes da função e usando os produtos notáveis de polinômios chegando à mesma conclusão que no caso anterior. Desenvolvendo os cálculos, temos:

$(\mathbf{100} - \boldsymbol{n}).(\mathbf{800} + \mathbf{10}\boldsymbol{n}) = \mathbf{0}$ (para que o produto entre dois números seja zero, temos que pelo menos um dos fatores seja igual a zero)

$(\mathbf{800} + \mathbf{10}\boldsymbol{n}) = \mathbf{0}$ (aplicando o princípio da igualdade de equação)

$\mathbf{10}\boldsymbol{n} = -\mathbf{800}$

$$\boldsymbol{n}_{\mathbf{1}} = \frac{-\mathbf{800}}{\mathbf{10}}$$

$\boldsymbol{n_1 = -80}$

$(\boldsymbol{100 - n}) = \boldsymbol{0}$ (aplicando o princípio da igualdade de equação)

$\boldsymbol{-n = -100}$

$\boldsymbol{n_2 = \dfrac{-100}{-1}}$

$\boldsymbol{n_2 = +100}$

3ª solução:

Fazendo por tentativa e erro, com base no domínio, ou seja, os valores para $\boldsymbol{n}$ variam de zero (0) até cem (100) lugares vagos no avião. Com isso, a tabela é construída entre esses valores para investigar a ocorrência de um ponto de máximo.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{T(n) = -10n^2 + 200n + 80.000}$	$\boldsymbol{T(n)}$
0	$\boldsymbol{T(0) = -10 \times 0^2 + 200 \times 0 + 80.000}$	80.000
1	$\boldsymbol{T(1) = -10 \times 1^2 + 200 \times 1 + 80.000}$	80.190
5	$\boldsymbol{T(5) = -10 \times 5^2 + 200 \times 5 + 80.000}$	80.750
8	$\boldsymbol{T(8) = -10 \times 8^2 + 200 \times 8 + 80.000}$	80.960
10	$\boldsymbol{T(10) = -10 \times 10^2 + 200 \times 10 + 80.000}$	81.000
11	$\boldsymbol{T(11) = -10 \times 11^2 + 200 \times 11 + 80.000}$	80.990
12	$\boldsymbol{T(12) = -10 \times 12^2 + 200 \times 12 + 80.000}$	80.960
....	....	.....
50	$\boldsymbol{T(50) = -10 \times 50^2 + 200 \times 50 + 80.000}$	65.000
59	$\boldsymbol{T(59) = -10 \times 59^2 + 200 \times 59 + 80.000}$	56.990
80	$\boldsymbol{T(80) = -10 \times 80^2 + 200 \times 80 + 80.000}$	32.000
86	$\boldsymbol{T(86) = -10 \times 86^2 + 200 \times 86 + 80.000}$	23.240
90	$\boldsymbol{T(90) = -10 \times 90^2 + 200 \times 90 + 80.000}$	17.000
100	$\boldsymbol{T(100) = -10 \times 100^2 + 200 \times 100 + 80.000}$	0

Calculando o vértice da função

Pela fórmula do vértice, temos:

$$X_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-200}{2.(-10)} = \frac{-200}{-20} = +10$$

$$Y_v = \frac{-\Delta}{4.a} = \frac{-3.240.000}{4.(-10)} = \frac{-3.240.000}{-40} = +81.000$$

Portanto, a função tem o ponto crítico de coordenadas $(\mathbf{10}; \mathbf{81.000})$. Como na função do 2º grau, o coeficiente $\boldsymbol{a}$ negativo representa a concavidade do gráfico voltada para baixo, conclui-se que se trata de um ponto de máximo.

Gráfico da Função

Fazendo a análise do gráfico da função (Figura 4), podemos observar que é um modelo discreto e com domínio definido no conjunto dos números naturais. Logo, o gráfico é formado por pontos sobre uma parábola. Esse gráfico da função não pode ser representado por uma linha contínua por causa do domínio (não tem como ter um lugar e meio vago, por exemplo).

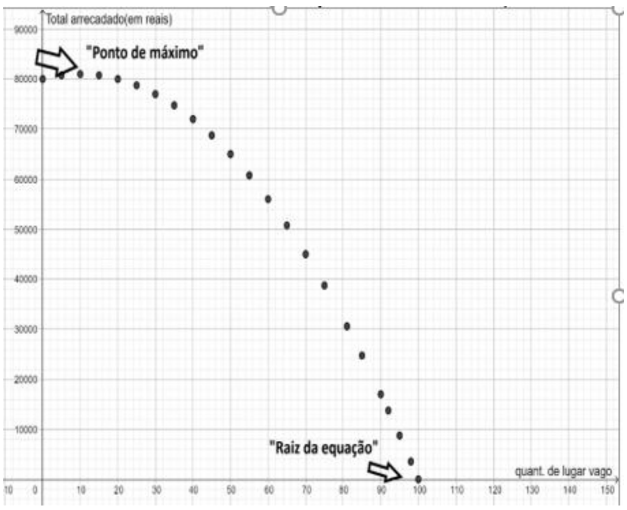

Figura 4 - Gráfico da função
Fonte: Elaborado pelos autores

Elementos para uma discussão coletiva da tarefa

Para as discussões coletivas em sala de aula, propusemos a utilização do modelo de Stein *et al.* (2008), com cinco práticas para organizar e orquestrar uma discussão: (1) antecipar, (2) monitorar, (3) selecionar, (4) sequenciar e (5) conectar, que têm a função de orientar e/ou auxiliar a prática docente. Assim, no uso da ferramenta de planejamento da THA para a preparação de uma discussão coletiva em sala de aula, o professor pode antecipar hipóteses de possíveis dificuldades que os alunos poderão apresentar no momento dessas discussões, como, por exemplo, a utilização da linguagem algébrica ou a obtenção imediata de uma expressão para a função $\boldsymbol{T(n)}$. Nesse caso, o professor pode, com base nas resoluções apresentadas pela turma e a partir da promoção de questionamentos, explorar alguns elementos necessários à elaboração dessa fórmula, como:

- considerar uma letra qualquer, como, por exemplo: a letra "$\boldsymbol{n}$" como sendo uma variável que indica a quantidade de lugar vago no avião;
- reconhecer que a quantidade de passageiros é composta pelo total de passageiros que pode transportar o avião menos a quantidade de lugares vagos $(\mathbf{100}-\boldsymbol{n})$;
- reconhecer que o valor pago para cada passageiro é igual a R$ 800 acrescido de R$10 para cada lugar vago no avião $(\mathbf{800}+\mathbf{10}\boldsymbol{n})$;
- reconhecer que o total arrecadado pela empresa é o produto da quantidade de passageiros no voo pelo valor que paga cada passageiro, ou seja, $(\mathbf{100}-\boldsymbol{n}).(\mathbf{800}+\mathbf{10}\boldsymbol{n})$;
- aplicar a propriedade da distributiva no produto notáveis $(\mathbf{100}-\boldsymbol{n}).(\mathbf{800}+\mathbf{10}\boldsymbol{n}) = -\mathbf{10}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}+\mathbf{200}\boldsymbol{n}+\mathbf{80.000}$;
- os alunos podem acreditar que, se todos os lugares no avião estiverem ocupados por passageiros, a empresa tem o maior lucro, devido à associação com a "venda total de um produto"; por isso, é preciso tomar o cuidado de indicar a tabela com a representação dos valores arrecadados conforme a quantidade de passageiros para poder ilustrar a situação do valor da passagem segundo a quantidade de passageiros;
- pode-se também explorar a representação gráfica da função para fazer a análise dos pontos críticos e, a partir dela, definir o domínio e a imagem, verificar o comportamento das coordenadas e explorar a simetria. No gráfico de uma função do 2º grau, há várias características que podem levar os alunos a cometerem erros de conceitos matemáticos, pois a transposição do conceito para a representação gráfica

requer do aluno o entendimento mais elaborado de transposições de linguagens: aritmética para a representacional (símbolos).

Todos esses elementos podem gerar questionamentos que surgiriam tanto no monitoramento do trabalho das equipes quanto na plenária com toda a turma. Por isso, antecipar essas possibilidades pode auxiliar o professor nesse monitoramento, nas seleções das resoluções dos alunos, seu posterior sequenciamento e o estabelecimento de conexões, oferecendo, assim, oportunidades para o desenvolvimento do pensamento funcional.

É fundamental que o professor, ao monitorar o trabalho desenvolvido nos grupos, não forneça a resposta das questões e não induza os alunos a respostas específicas. Nesse momento, o professor deve ter o papel de mediador no diálogo com os alunos, encorajando-os a explorarem a situação e formularem suas próprias hipóteses de resolução.

> Esta prática é particularmente exigente, por ter em vista tornar os conceitos matemáticos compreensíveis aos alunos. Para tal, o questionamento do professor é fundamental, ao contribuir para que os alunos clarifiquem e aprofundem os seus raciocínios [...]. O professor deve ter consciência de que na dinamização da discussão em sala de aula pode ser surpreendido com ideias diferentes das antecipadas, tendo de ser capaz de decidir se são importantes para seguir ou devem ser abandonadas (RODRIGUES; PONTE; MENEZES, 2018, p. 3).

No momento da plenária, em que ocorre a apresentação das resoluções dos grupos selecionados, o professor deve sequenciar aquelas resoluções que sejam propícias para promover a construção do pensamento funcional, encorajando os alunos a compartilharem suas próprias resoluções e ideias.

Algumas considerações finais

Este artigo busca orientar e colaborar para a formação dos professores na sua prática em sala de aula, possibilitando reflexões sobre seu planejamento, a fim de promover o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos no trabalho com tarefas matemáticas. Como destacado por Trevisan, Ferreira e Aguiar (2021), o trabalho com o pensamento funcional em sala de aula, inclusive desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, assume um papel crítico e importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático e também possibilita a introdução de ideias a respeito de funções.

Assim, buscamos apresentar uma tarefa matemática que possibilite ao professor trabalhar em sala de aula com as hipóteses de resoluções e foco na elaboração do pensamento funcional, de modo a envolver os alunos numa discussão coletiva, promovendo o diálogo e a troca de ideias. Na tarefa matemática apresentada, pretendemos fazer com que os alunos compreendam o uso dos conceitos matemáticos, de modo que identifiquem e façam a transposição da linguagem matemática formal para a linguagem escrita com palavra numa situação do cotidiano; a fim de envolver os alunos na busca da construção do significado dos conceitos matemáticos.

Assumimos que as discussões coletivas de tarefas matemáticas em sala de aula contribuem para a elaboração desse tipo do pensamento, potencializada pela orquestração conforme as *cinco práticas* propostas por Stein *et al*. (2008), a constar: *antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar* e *conectar.*

Infelizmente, em nossa prática, temos observado que a realização de discussões coletivas não é uma prática pedagógica comum em sala de aula, devido a diversos fatores, mas essa prática é fundamental quando se pensa no desenvolvimento do raciocínio matemático e, em especial, do pensamento funcional. Compreendemos que toda a movimentação da sala de aula requer do professor habilidade e esforço maior para trabalhar com a dinamização das discussões coletivas. Não é uma tarefa fácil, porém é importante que o professor incorpore em sua prática estratégias para promover a argumentação e o diálogo entre os alunos. Quando isso é conseguido, obtém-se êxito nos resultados em termos de aprendizagem.

Referências

ARAMAN, E. M. O., SERRAZINA, M. L., PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 2, n. 2, p. 466-490, 2019.

BLANTON, M. L. Functional Thinking in the Elementary Grades. *In:* BLANTON, M. L. **Algebra and the Elementary Classroom:** Transforming Thinking, Transforming Practice. Portsmouth, NH: HEIMANN, 2008, p. 30-55.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom 23rofesso That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, NCTM, Reston, USA, v. 36, n.5, p. 412-446, 2005.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. **Educação é a base.** Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2019.

GÓMEZ, P.; LUPIÁÑEZ, J. L. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje em la formación inicial de 23rofessores de matemáticas de secundaria. **PNA**, Oporto, Portugal, v. 1, n. 2, p. 79-98, 2007.

HANKE, T. Ap. F. **Padrões de Regularidades:** Uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

LITHNER, J. A research framework for creative and imitative reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Science, Suíça, v. 67, n. 3, p. 255-276, 2008.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, SP, v.32, n.62, p. 781-801, 2018.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

PONTE, J. P. Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. In: GTI (Ed.). **Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** Lisboa: FCT- Fundação para a Ciência e Tecnologia, 2008. P. 33-55.

RODRIGUES, C; PONTE, J. P.; MENEZES, L. Prática de discussão coletiva de uma professora em Álgebra. **Zetetiké,** Campinas, SP, v. 26, n. 3, 20 p., set./dez. 2018.

ROSSETTO, H. H. P. **Trajetória hipotética de aprendizagem sob um olhar realístico.** 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SIMON, M. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, NCTM, Reston, USA, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

SIMON, M.; TZUR, R. Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Trajectory. **Mathematical Thinking and Learning,** Londres, v. 6, n. 2, p. 91-104.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M.; HUGHES. E.K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning,** Londres, v. 10, n.4, p. 313-340, out. 2008.

TREVISAN, A. L.; FERREIRA, M. C. N.; AGUIAR, M. O pensamento funcional nas disposições curriculares e possibilidades para o ensino. *In:* Marcelo Navarro da Silva; Simone Bueno. (Org.). **Estudos sobre currículos na Educação Matemática**. 1ed.São Paulo: Livraria da Física, 2021, v. 1, p. 91-114.

TREVISAN, A. L.; VOLPATO, M. A. Discussões matemáticas em aulas de Cálculo e as ações do professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, 2022, no prelo.

Recebido em: 14 de abril de 2021

Aprovado em: 08 de março de 2022