

Artigo Teórico



O Conjunto dos Números Inteiros Como Campo Experimental Para Introdução da Álgebra na Educação Básica

*José Luiz Magalhães de Freitas¹
Anete Valeria Masson Coimbra de Lima²
Maysa Ferreira da Silva³*

Resumo

Nesta sinopse de trabalhos realizados com pré-vestibulandos de dois grupos de níveis socio-econômicos diferentes são analisadas produções e dificuldades de alunos diante de situações-problema envolvendo conteúdos de divisibilidade, paridade e padrões em sequências numéricas, tomando como base de cálculo o conjunto dos números inteiros. Para o desenvolvimento experimental foram elaboradas sequências de atividades desenvolvidas em encontros semanais com os participantes. De modo geral, os alunos se envolveram nas atividades, o que permitiu analisar dificuldades, conceitos mobilizados e indícios de aprendizagens, não só quanto à forma de apresentação das produções escritas, mas também quanto aos níveis de conhecimento dos conteúdos aritméticos e algébricos estudados.

Palavras-chave: números inteiros; regularidades; álgebra; pré-vestibulandos.

Introdução

Este estudo visou essencialmente apresentar uma reflexão sobre possibilidades de exploração do conjunto dos números inteiros como campo experimental, na introdução ao estudo de propriedades e generalizações em aritmética e álgebra, por alunos da educação básica. Para tanto, analisamos algumas atividades que possibilitam a exploração de aspectos experimentais e teóricos que podem contribuir para a construção de conhecimentos nesses dois campos da matemática. Buscamos ainda, na medida do possível, apresentar

situações-problema de diferentes níveis de dificuldade.

A escolha dos números inteiros se deve, primeiramente, ao fato de ser esse conjunto – ou ao menos a parte dos naturais – familiar aos alunos, tornando-o acessível como base experimental de cálculos, permitindo compor e decompor números, efetuar operações e mobilizar propriedades das operações básicas. Além disso, na interface entre esses dois campos há uma grande variedade de problemas envolvendo temas como paridade, divisibilidade e sequências que permitem aos alunos identificar regularidades de

¹Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. E-mail: joseluizufms2@gmail.com

²Classe A Vestibulares. E-mail: valeriacoimbralima@terra.com.br

³Fundamental Escola de Governo de Mato Grosso do Sul. E-mail: mavfsil@hotmail.com

diferentes tipos, conjecturar e produzir justificativas. Observa-se que, de modo geral, os enunciados de propriedades e de conjecturas com números inteiros são fáceis de compreender, favorecendo tentativas de validação aritmética experimental pelos alunos e a introdução ao mundo da álgebra, podendo conduzi-los a um percurso de estudos e descobertas, num campo da “aritmética generalizada”.

Algumas experimentações realizadas com alunos pré-vestibulandos (Freitas e Lima, 2008; Silva e Freitas, 2010) mostraram que, diante de situações-problema ou de conjecturas no conjunto dos números inteiros, eles se envolvem na busca de soluções, inicialmente investigados por meio de tentativas empíricas, mas evoluindo para a mobilização de propriedades, formulações, descobertas e procedimentos de validação e tornando-se capazes de identificar padrões, elaborar conjecturas e produzir provas. Nesse percurso de estudos em aritmética e álgebra, uma etapa importante é a identificação de alguma regularidade e também sua representação, que deve tender a se tornar simbólica.

Segundo o Grupo Azarquiel (1993, p. 31), “o processo de

generalização requer três passos bem diferenciados: (a) visão da regularidade, a diferença, a relação; (b) sua expressão verbal; (c) sua expressão escrita, da maneira mais concisa possível”. Nesses processos, as letras podem assumir estatutos diferentes segundo o contexto matemático e os correspondentes significados associados à sua representação simbólica. Pode-se considerar como os três principais estatutos da letra os de *incógnita*, de *número indeterminado* e de *variável*.

Caracteriza-se a letra como *incógnita* quando representa um número específico, porém desconhecido, sendo possível operar com ela para determiná-lo. É o caso, por exemplo, da letra x na equação $2x + 3 = 5$. Considera-se que a letra possui o estatuto de *número indeterminado* quando pode assumir valores quaisquer, em conjuntos numéricos não definidos. É o caso do uso de letras no cálculo literal como, por exemplo, na identidade algébrica $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Nessa identidade, as letras podem ser números quaisquer, por exemplo, números naturais, como $(31)^2 = (30 + 1)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 1 + 1^2 = 961$, decimais, como em $(2,5)^2 = (2 + 0,5)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times (0,5) + (0,5)^2 = 6,25$, ou de outro conjunto numérico. Considera-se a letra

como *variável* quando é utilizada para representar a lei de definição de uma função, havendo nesse caso uma relação entre dois conjuntos de valores, sendo que ela varia num conjunto pré-determinado, denominado *domínio* da função – como, por exemplo, na função definida por $f(x) = 2x - 1$, onde a letra x , assumindo valores no conjunto dos números reais, é denominada *variável* “real”.

A seguir, apresentamos concisamente análises de atividades que desenvolvemos com alunos de ensino médio e pré-vestibulandos sobre possibilidades de utilização do conjunto dos números inteiros como campo experimental para exploração de conteúdos de aritmética e álgebra, visando contribuir com estudos e reflexões por parte de professores de matemática que atuam na educação básica. As atividades foram realizadas em duas instituições de ensino, com turmas pequenas e em sessões semanais. A primeira experimentação foi centrada na análise de *conjecturas e provas* produzidas pelos alunos; na segunda, focamos o tema *divisibilidade*.

Conjecturas e provas

Essa experimentação visou estudar a produção de provas por alunos

do 3.º ano do ensino médio na resolução de problemas envolvendo conjecturas no conjunto dos números inteiros. Foram analisadas descobertas, formulações, validações, representações matemáticas utilizadas e tipos de prova produzidos. O grupo de participantes foi constituído por 10 alunos de 3.º ano do ensino médio, de um colégio particular da cidade de Campo Grande, MS, que participaram de forma voluntária.

A experimentação foi realizada em 10 sessões semanais, cada uma com duração aproximada de 2 h, fora do horário de aulas. Em cada sessão, ao término de cada atividade, num tempo variando de 5 a 10 min, o professor-pesquisador realizava com a turma uma breve discussão sobre as produções e as dificuldades encontradas, buscando socializar e sistematizar os conhecimentos por eles mobilizados. Os conteúdos das sessões eram variados, incluindo, por exemplo, paridade, números figurados, múltiplos e sequências.

Foram identificadas várias provas do modelo de Balacheff (1988), como as do tipo *empirismo ingênuo*, nas quais os alunos se satisfazem com a verificação da validade para poucos casos particulares; as do tipo *experiência crucial*, em que, após verificar a validade para casos

**O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS COMO CAMPO EXPERIMENTAL
PARA INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

particulares, o aluno não se convence e verifica um caso que considera diferente, antes de aceitar como válida a conjectura; e as de nível conceitual mais elevado, baseadas em propriedades gerais e apresentadas por meio de um discurso dedutivo organizado, preciso e conciso.

Para dar ideia do trabalho realizado, descrevemos a seguir a solução apresentada pelo aluno LN⁴ numa das atividades iniciais, que pedia para verificar e justificar a veracidade da afirmação: “A

soma de dois números pares é sempre par” (Figura 1).

Observamos que esse aluno não se contentou em verificar a validade para dois números *pequenos*, ou seja, não ficou convencido com a produção de uma prova do tipo *empirismo ingênuo* e, ao verificar com números de maior *ordem de grandeza*, produziu uma prova que consideramos do tipo *experiência crucial*.

O aluno BR produziu uma prova de nível conceitual mais elevado, que

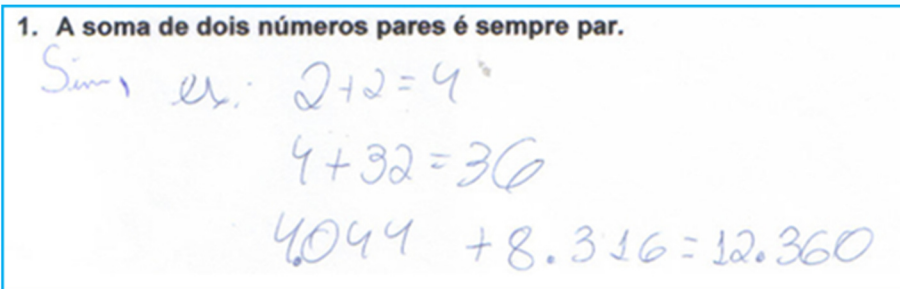


Figura 1: Produção do aluno LN.
Fonte: Protocolo de Experimentação.

Observa-se que, para justificar a validade da afirmação, BR afirma que “Se um número inteiro

n é par, ele pode ser escrito na forma $n = 2a$, onde $a = n/2$ e $a \in \mathbb{Z}$ ” e que “ $n_1 + n_2 + n_3 = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 2 \times (a_1 + a_2 + a_3)$ ”. Note-se seu cuidado em usar índices diferentes, indicando haver percebido que os números pares poderiam ser distintos.

podemos denominar de *algébrica*, na qual fez uso da letra com os estatutos de *variável* e também de *número*

generalizado (Figura 2).

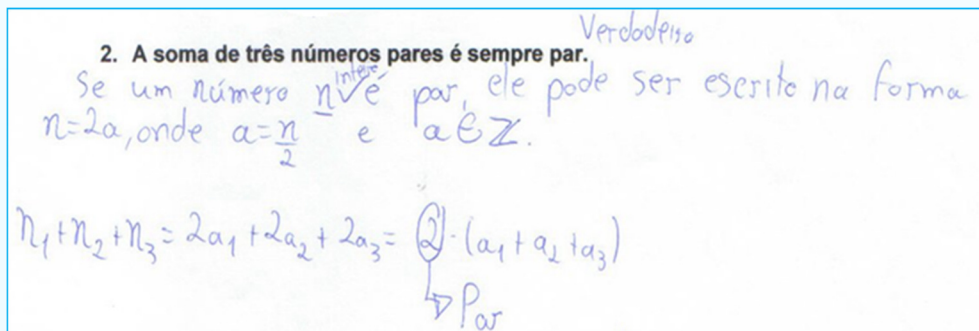


Figura 2: Produção do aluno BR.
Fonte: Protocolo de Experimentação.

Para esta atividade, quase todos os demais alunos apresentaram respostas do tipo sim ou não, seguidas de exemplos. Houve casos, como o de LN, em que percebemos que o aluno não permaneceu no

⁴Indicamos os alunos por duas letras maiúsculas.

empirismo ingênuo, mas chegou à *experiência crucial*, na terminologia de Balacheff.

Apresentamos a seguir enunciados de algumas conjecturas que foram trabalhadas noutras sessões dessa experimentação:

1. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras e apresente justificativas matemáticas para cada uma das respostas.
 - a) A soma de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de três?
 - b) A soma de quatro números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de quatro?
 - c) A soma de cinco números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de cinco?
2. Joãozinho disse que encontrou 5 números inteiros cuja soma é igual a 20. Ele pode estar dizendo a verdade? Por quê?
3. É possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois?
4. Um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de quatro? E de oito? Justifique sua resposta.
5. Uma sequência de mosaicos de forma quadrangular é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do

mesmo tamanho, conforme figura a seguir:

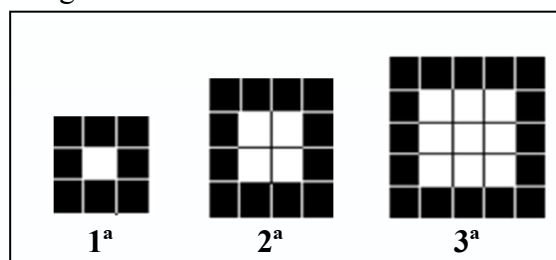


Figura 3: Sequência de mosaicos.
Fonte: Protocolo de Experimentação.

O primeiro mosaico é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos e assim sucessivamente. Como calcular a quantidade de azulejos brancos e pretos para o mosaico de ordem n dessa sequência? E o total de azulejos? Justifique a validade da regra geral para calcular a quantidade de azulejos brancos, pretos e o total de azulejos.

Essas atividades estão localizadas na articulação entre aritmética e álgebra, e acreditamos que podem contribuir para que os alunos atribuam significado para notações e expressões algébricas. Elas possibilitam desde a realização de tentativas com números inteiros até soluções que utilizam linguagem algébrica mais elaborada, que exigem conhecimentos matemáticos de nível mais elevado. Entendemos que atividades desse tipo possam ser exploradas tanto com alunos dos anos finais do ensino fundamental como do ensino médio, cabendo ao professor decidir.

Divisores de um número

A atividade apresentada a seguir foi realizada com um grupo de alunos de um curso preparatório para o vestibular, idealizado num contexto de ações afirmativas, conforme Silva e Freitas (2010). Esse curso tem por finalidade possibilitar acesso e permanência no ensino superior de diversos grupos étnicos de baixa renda (afrodescendentes, indiodescendentes, portadores de necessidades especiais e brancos). Os alunos participantes da pesquisa (aproximadamente 10) eram voluntários. As sessões foram semanais, realizadas fora do horário de aulas.

Em cada sessão, os participantes, em grupos de dois ou três, foram desafiados a resolver situações-problema sobre divisibilidade. Trabalhamos com três tipos de atividades que envolviam resto da divisão; múltiplos e divisores; e quantidade de divisores de um número. Para ilustrar esse trabalho experimental, apresentamos a seguir uma atividade do terceiro tipo (quantidade de divisores de um número), envolvendo a questão: “Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores?”.

Uma estratégia inicial de resolução dessa atividade consistiu em fatorar e em seguida determinar a quantidade de divisores de cada um dos números meno-

res que 1000 (999, 998, 997 e assim por diante) até encontrar o maior número menor que 1000 que possua 10 divisores. Após fatorar o número 999 e representá-lo por $3^3 \times 37$, eles aplicaram a propriedade, já vista, pela qual se obtém o número de divisores de número expresso como produto de fatores primos, cujo enunciado é: “Seja p a decomposição de um número $a > 1$ nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética. Então o número de divisores positivos de a é dado por $n(a) = (n_1 + 1) \times \dots \times (n_k + 1)$ ”. Assim, para $3^3 \times 37$, os alunos adicionaram 1 a cada expoente da decomposição e efetuaram o produto $(3+1) \times (1+1) = 8$, descobrindo que a quantidade de divisores de 999 é 8.

Utilizando essa propriedade, determinaram o número de divisores de mais alguns números menores que 1000, mas logo perceberam que essa maneira de resolver era muito demorada e que deveria existir outro modo. Diante desse entrave por eles manifestado, entrevistamos perguntando: “Quais os números naturais que multiplicados resultam no número 10?”. Após essa intervenção, retomaram a busca da solução, mas expirou o tempo da sessão. Pedimos que tentassem terminar em casa a resolução do problema, que seria analisada no encontro seguinte.

**O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS COMO CAMPO EXPERIMENTAL
PARA INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Na semana seguinte, ao retomarmos o problema, uma estudante nos relatou verbalmente que, para solucioná-lo, levou cinco dias e que durante aquela semana, sempre que podia, voltou a pensar nele, até conseguir uma solução que a deixasse satisfeita. Perguntamos se ela havia retomado a estratégia utilizada no encontro anterior, que consistia em encontrar os divisores dos números imediatamente menores que 1000. Respondeu-nos que não e apresentou por escrito a seguinte descrição:

Comecei o exercício de acordo com o encontro anterior, que para um número dar 10 divisores, um número qualquer fatorado em primo, os expoentes terão que ser um 4 e outro 1, pois pela regra para se encontrar a quantidade divisores de um número, [basta] somar 1 ao expoente e multiplicá-los, e o resultado será a quantidade de divisores. Então a primeira tentativa foi pegar o menor primo e elevar 4 [à 4.^a potência] e o próximo passo foi encontrar outro primo elevando a 1 que multiplicado por 16, que é 2 elevado a quarta, daria próximo de um número maior e menor 1000.

A descrição revela que a primeira estratégia consistiu em encontrar os divisores de 999, de 998 e assim por diante, mas que, embora a estratégia também levasse à solução, foi abandonada. No entanto, foi necessário que a aluna retomasse a tarefa e descobrisse uma estratégia de resolução menos trabalhosa, usando adequadamente a propriedade que fornece o número de divisores de um

número decomposto em fatores primos. Nessa busca da solução, o primeiro passo foi encontrar possíveis expoentes que, ao se lhes somar 1 e realizar o produto, davam resultado 10 (Figura 4).

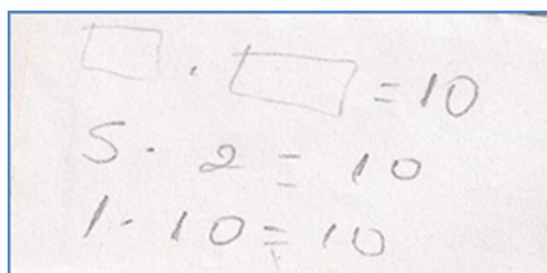


Figura 4: Identificação de possíveis expoentes.
Fonte: Protocolo de Experimentação.

A representação escrita (Figura 4) mostra como ela descobriu que os expoentes só podem ser 4 e 1 ou 9 e 0, pois ao somar 1 a esses expoentes e efetuar o produto, obtém-se $(4 + 1) \times (1 + 1) = 10$ ou $(9 + 1) \times (0 + 1) = 10$. Após identificar os possíveis expoentes, ela deu início à investigação das possíveis bases, analisando primeiramente a possibilidade de o expoente ser 9, ou seja, $2^9 = 512$ e $3^9 = 19\ 683$. Excluiu a possibilidade de 3^9 por ser um valor maior que 1000 e também 2^9 por ser bem menor que 1000. Com essa exclusão, concluiu que os expoentes deveriam ser 4 e 1.

A Figura 5 mostra algumas tentativas dessa aluna, envolvendo cálculos.

Quando lhe perguntamos sobre sua principal dificuldade em descobrir a

O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS COMO CAMPO EXPERIMENTAL
PARA INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

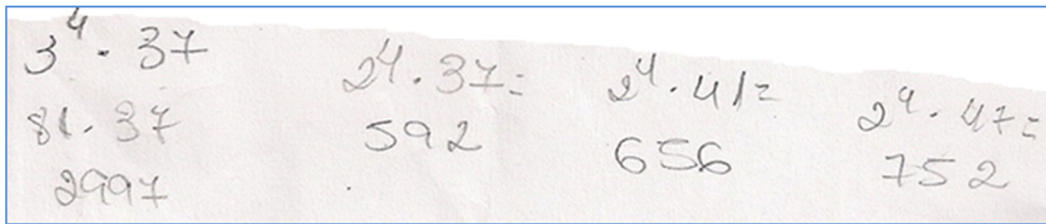


Figura 5: Cálculos com diferentes bases para expoentes 4 e 1.
Fonte: Protocolo de Experimentação.

solução do problema, ela respondeu que foi a de encontrar o número primo, pois este apresentava um valor que ela considerava alto. Acrescentou que estava habituada a trabalhar com números primos menores que 30 e que uma grande dificuldade foi identificar se um fator com expoente 1 era primo ou não. Esta principal dificuldade persistiu até que a aluna encontrasse o número procurado: $2^4 \times 61 = 976$.

Ao questionarmos outros alunos que também trabalharam na realização da tarefa durante a semana, detectamos que encontrar o número primo 61 foi a principal dificuldade encontrada pelo grupo.

Considerações finais

Nas experimentações que realizamos em sala de aula, observamos que os alunos se envolveram em atividades desafiadoras com números inteiros, o que nos permitiu analisar conceitos aritméticos e algébricos mobilizados, bem como dificuldades e indícios de aprendizagens, tanto na utilização de representações simbólicas quanto nos níveis de conhecimentos aritméticos e algébricos envolvendo proprie-

dades ou regularidades. Acreditamos

que, para trabalhar com atividades como as que apresentamos aqui, é necessário que elas sejam adequadas ao nível de escolaridade e conhecimentos aritméticos e algébricos dos alunos. Cabe ao professor identificar o nível de conhecimentos matemáticos de seus alunos e escolher ou adaptar atividades para que eles as enfrentem e aprendam mais. A introdução ao mundo da álgebra nos anos finais do ensino fundamental não é tarefa fácil, como pesquisas e avaliações vêm mostrando. Dentre as principais dificuldades, destacamos o trabalho com os diversos *estatutos da letra*, entre eles o de *incógnita*, *número indeterminado* e *variável*, bem como a mobilização adequada de *propriedades*, a identificação de *regularidades* e o processo de *generalização*.

Os estudos e experimentações que realizamos nos fizeram crer que o conjunto dos números inteiros é um campo experimental fértil para introdução da álgebra elementar, possibilitando descobertas e utilização de propriedades básicas das operações. Acreditamos que atividades do tipo que apresentamos poderiam ser mais exploradas pelos livros didáticos

O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS COMO CAMPO EXPERIMENTAL
PARA INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

de matemática voltados à educação básica.

Esperamos que este relato possa contribuir para estudos e reflexões sobre o tema, por parte dos professores de matemática que atuam no ensino fundamental e médio.

Referências

BALACHEFF, N. *Une étude des processus de preuve en Mathématique chez les élèves de collège*. 1988. Tese de Doutorado. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança**: explorando notações. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FREITAS, J. L. M.; LIMA, A. V. M. C. Produções de alunos do ensino médio diante de conjecturas no conjunto dos números inteiros. Recife-PE: *Anais do 2.º SIPEMAT*. Recife: UFPE, 2008.

GRUPO AZARQUIEL. **Ideas y actividades para enseñar algebra**. Madrid: Síntesis, 1993.

SILVA, M. F.; FREITAS, J. L. M. Estudos de um grupo em fase preparatória pra o vestibular sobre divisibilidade. Campo Grande: *Anais do IV SESEMAT*, 2010.



Biblioteca em Educação Matemática



**Acesse já!!
Variados recursos
que poderão lhe
ajudar em sala de
aula!!**



Veja mais em www.sbembrasil.org.br