Artigo Teórico

"Aprendendo" a Fazer Modelagem Matemática: A Vez do Aluno

Karina Alessandra Pessôa da Silva[6]
Lourdes Maria Werle de Almeida[7]
Ângela Maria Lourenção Gerôlomo[8]

Resumo

A inclusão de atividades de Modelagem Matemática nas aulas de Matemática, de modo geral, representa um desafio para professores e alunos. Essas atividades colocam os alunos em contato com práticas que, de forma geral, não lhes parecem corriqueiras na sala de aula, como é o caso do envolvimento com uma situação-problema e, em muitos casos, com a própria definição de um problema. O enfrentamento da situação em que é preciso sair da estabilidade em que o professor explicitamente orienta as ações dos alunos requer "colocar a mão na massa", experimentar o novo e saber como esse novo funciona. Assim, neste trabalho apresentamos uma configuração para a introdução da Modelagem Matemática nas aulas em que o foco é a familiarização do aluno com este tipo de atividade. Indicamos, desse modo, que o aluno pode "aprender" a fazer modelagem, integrando-se nas atividades de forma gradativa e associamos essa familiarização do aluno a três momentos distintos.
Palavras-chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Momentos de familiarização.

A inclusão de atividades de Modelagem Matemática nas aulas de Matemática, de modo geral, representa um desafio para professores e alunos. É muito provável que esse desafio seja decorrente do fato de que a modelagem se fundamenta numa perspectiva em que a proposta é aprender – aprender matemática – por meio de situações-problema e em cujas aulas há uma dinâmica diferenciada em que o professor não traz problemas prontos ou encaminhamentos pré-definidos para as resoluções.

As indicações para a introdução de atividades de modelagem nas aulas, entretanto, têm sido bastante divulgadas. Alguns trabalhos dão ênfase à possibilidade de tratar de relações entre a matemática e a vida das pessoas, enfatizando a questão da aplicabilidade da Matemática. Outros tratam da possibilidade de desenvolver posturas críticas em relação à presença da matemática na sociedade. Outros ainda associam o uso da Modelagem Matemática mais diretamente com aspectos relativos à aprendizagem dos

karinapessoa@gmail.com – Aluna de Doutorado - UEL – Londrina -Paraná
lourdes.maria@sercomtel.com.br – Docente - UEL –Londrina – Paraná
angela-matematica@uol.com.br – Professora da Educação Básica – Apucarana - PR

alunos. Há também os que colocam o foco na formação do professor para o uso de atividades de modelagem na sala de aula.

Neste texto nos dedicamos a falar sobre o papel do aluno no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e o seu "aprender" a fazer modelagem nas aulas de Matemática. Assim, inicialmente apresentamos o que consideramos características essenciais de uma atividade de modelagem e a seguir nos referimos ao que denominamos a "familiarização dos alunos" com a Modelagem Matemática, indicando que esta pode se dar por meio de três momentos.

Modelagem Matemática – como caracterizar

Sem a pretensão de definir precisamente o que é uma atividade de Modelagem Matemática, consideramos que ela pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Uma característica essencial neste contexto é a possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática, caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema.

Assim, no âmbito da sala de aula a Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não essencialmente matemático.

Ainda que não se possa falar em etapas bem definidas, é possível identificar elementos que caracterizam a Modelagem Matemática: o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são pré-definidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução (Figura 1).

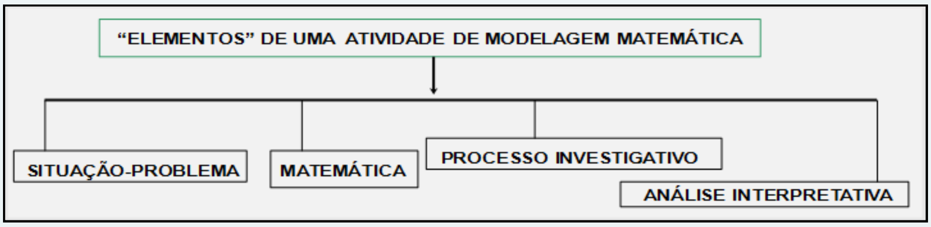

Figura 1: Elementos associados a uma atividade de Modelagem Matemática
Fonte: ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012.

Levando em consideração que o "sujeito" que temos em mente nesse caso é o aluno e que as suas ações relativas aos "elementos" da atividade de modelagem não são previamente indicadas por um professor, mas decorrem da definição de caminhos que são definidos por ele mesmo, discutimos aqui o "aprender a fazer" modelagem dos alunos.

A "familiarização" dos alunos com a Modelagem Matemática

Atividades de Modelagem Matemática colocam os alunos em contato com práticas que, de forma geral, não lhes parecem corriqueiras na sala de aula, como é o caso do envolvimento com uma situação-problema e, em muitos casos, com a própria definição de um problema. O enfrentamento da situação em que é preciso sair da estabilidade em que o professor explicitamente orienta as ações dos alunos requer "colocar a mão na massa", experimentar o novo e saber como esse novo funciona.

Neste enfrentamento do novo, o aluno precisa se familiarizar com mecanismos de ação e de reflexão. Mas não estaria a estruturação desses mecanismos apoiada também na experiência? Nas palavras de Bondía (2002), "experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca" (p. 21). Todavia, a experiência dos alunos, no caso de atividades de modelagem, não se constituirá baseada em um professor que "guia" suas ações por meio de esquemas prévios. E, nesse sentido, Bondía (2002) também coloca que "[...] ninguém pode aprender da experiência de outro, a menos que essa experiência seja de algum modo revivida e tornada própria" (p. 27). Isso indica que o aluno precisa viver experiências com atividades de Modelagem Matemática a fim de "aprender" a desenvolvê-las e fazer com que o desenvolvimento da atividade seja orientado pela busca de uma solução para a situação-problema e seja ele próprio o "resolvedor" principal. O aluno tem, portanto, papel central no que se refere à articulação entre definição, investigação e resolução, essencial em uma atividade de modelagem. Assim, consideramos, a partir de Almeida e Dias (2004), que a familiarização do aluno com a modelagem pode ser realizada gradativamente, caracterizando três diferentes "momentos".

O 1º momento

Na situação que denominamos 1º momento, o aluno tem acesso a uma situação-problema em que os dados e as informações necessárias, bem como o problema matemático a ser investigado lhe são informados por alguém. De modo geral, o próprio professor apresenta essas informações e os alunos realizam a investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, assessorados pelo professor. Aos alunos, que podem ser reunidos em grupos, cabem ações como a definição de variáveis e de hipóteses, a simplificação, a obtenção e validação do modelo matemático, bem como o seu uso para a análise da situação. O professor, em certa medida, faz algumas indicações e avaliza essas ações. Ainda que os alunos estejam reunidos em grupos, de modo geral, o encaminhamento para a resolução do problema é o mesmo para todos os alunos.

Um exemplo de atividade que foi desenvolvida com alunos no Ensino Médio caracterizada como do 1º momento, diz respeito a um acidente radiológico ocorrido na cidade de Goiânia e que foi um dos mais graves episódios de contaminação por radiatividade que aconteceu no Brasil. Neste caso, foi fornecido aos alunos um texto apresentando a problemática conforme mostra o quadro 1. O problema tratado na aula de Matemática, diz respeito à questão da extensão que esta contaminação ainda poderia atingir e na realização de uma previsão da concentração do césio-137 para anos futuros.

No dia 13 de setembro de 1987, dois sucateiros encontraram um aparelho de radioterapia em um prédio abandonado da Santa Casa de Misericórdia de Goiânia, capital do Estado de Goiás. Eles, então, levaram o aparelho desconhecido para a casa de um deles onde o desmontaram. Durante a desmontagem do aparelho, os sucateiros expuseram no ambiente 19,26 g de cloreto de césio-137 (CsCl), pó branco semelhante ao sal de cozinha, que brilha no escuro com uma coloração azulada.
O acidente somente foi diagnosticado 15 dias após, depois de muitas pessoas apresentarem sintomas de contaminação radioativa. Nos trabalhos de descontaminação dos locais afetados foram produzidos 13,4 t de lixo contaminado com césio-137: roupas, utensílios, plantas, restos de solo e materiais de construção. Este lixo está armazenado em cerca de 1.200 caixas, 2.900 tambores e 14 *contêineres* em um depósito construído na cidade de Abadia de Goiás, vizinha a Goiânia, onde deverá ficar pelo menos 180 anos. Um olhar externo, no ano de 2007, cerca de 20 anos depois do acidente, ainda revela uma situação preocupante: muito sofrimento social, vítimas, preconceito, ações no Ministério Público, estudos na academia científica.
Segundo a Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN), um elemento radioativo se transmuta a uma velocidade que lhe é característica. Meia-vida é o tempo necessário para que a sua atividade seja reduzida à metade da atividade inicial. A meia-vida do césio-137 é de cerca de 30 anos.

Quadro 1: Informações sobre o acidente em Goiânia e sobre o césio-137
Fonte:Texto elaborado pelas autoras.

As simplificações foram realizadas com a finalidade de possibilitar uma abordagem matemática da situação naquela aula e conduziram às hipóteses: H_1 :A quantidade de césio-137 remanescente na cidade depende do ano; H_2 : A meia-vida do césio-137 é de 30 anos. Além disso, era preciso considerar que a quantidade inicial de césio-137 é de 19,26 g e o fato de que o problema aconteceu no ano de 1987. A análise da situação envolve duas variáveis: variável independente: $t \rightarrow$ tempo (anos); variável dependente: $Q \rightarrow$ quantidade (gramas) de césio-137. As informações e as hipóteses conduziram a construção dos dados da tabela 1, realizada nesse caso conjuntamente entre professor e alunos.

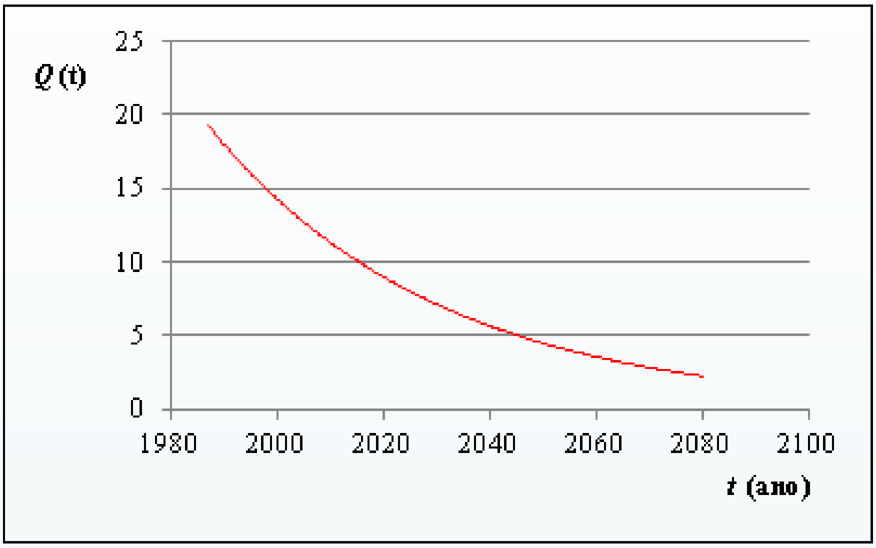

Figura 2: Representação produzida pelos alunos
Fonte: : Relatório entregue pelos alunos

O modelo matemático obtido para esta situação é

$$Q(t) = 19{,}26.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-1987}{30}}$$

onde $Q(t)$ corresponde à quantidade t de césio-137 num ano qualquer a partir de 1987.

Para fazer uma representação gráfica do modelo, conforme Figura 2, os alunos usaram a planilha Excel. As estimativas para anos futuros podem ser realizadas usando esse modelo:

Tempo (ano)	Valor de n	Quantidade de césio-137 (gramas)
1987	$n = 0$	$Q_0 = 19{,}26 = \frac{Q_0}{2^0} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 .Q_0$
2017 (1987+30)	$n = 1$	$Q_1 = 9{,}63 = \frac{19{,}26}{2} = \frac{Q_0}{2^1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 .Q_0$
2047 (1987+60=1987+30.2)	$n = 2$	$Q_2 = 4{,}815 = \frac{19{,}26}{4} = \frac{Q_0}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 .Q_0$
2077 (1987+90=1987+30.3)	$n = 3$	$Q_3 = 2{,}4075 = \frac{19{,}26}{8} = \frac{Q_0}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 .Q_0$
⋮	⋮	⋮
1987+30. n	n	$Q_n = \frac{Q_0}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n .Q_0 \Rightarrow Q_n = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Quadro 2: Quantidade de césio-137 de acordo com o ano
Fonte: : Relatório entregue pelos alunos

O 2º momento

Considerando o processo de familiarização dos alunos com essa alternativa pedagógica – a Modelagem Matemática – caracterizamos um 2º momento com os alunos. Neste caso uma situação-problema é sugerida aos alunos que, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação, realizam a definição de variáveis e a formulação das hipóteses simplificadoras, e chegam a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência dos alunos no que se refere ao uso ou obtenção de dados bem como à definição de procedimentos extra matemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação

Como, de modo geral, os alunos também podem trabalhar em grupos, é possível que diferentes grupos conduzam suas atividades por diferentes hipóteses, usem diferentes "matemáticas", cheguem mesmo a diferentes modelos, mas que ainda assim podem apresentar soluções razoáveis para a situação-problema em estudo. É neste sentido que a criatividade, o direito à diversidade, começam a servir de orientação para as ações dos alunos na atividade de modelagem.

Para ilustrar esta configuração do 2º momento, nos referimos a uma atividade em que foram discutidas com alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio informações relativas ao consumo anual de cigarros por uma pessoa conforme descrito em Almeida, Silva, Vertuan (2012). A partir daquelas informações foi construído pelo professor junto com os alunos o quadro3 relativo aos dados quantitativos apresentados na descrição da atividade.

Ano (*t*)	Número de cigarros
1950	702
1990	1062
2000	916
2010	813

Quadro 3: Consumo anual de cigarros por pessoa por ano. Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012)

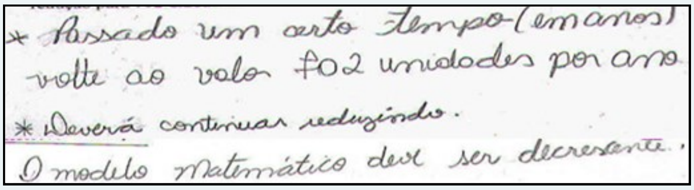

Figura 3: Dados do relatório dos alunos de um grupo
Fonte: : Relatório entregue pelos alunos

A partir dos dados do quadro 3, os alunos distribuídos em grupos iniciaram suas conjecturas, como, por exemplo, aquela da figura 3 obtida do relatório de um grupo de alunos, para orientar a construção do modelo com vistas a responder a questão: em que época o número de cigarros consumidos por ano por pessoa volta a se aproximar, pelo menos, da quantidade consumida no ano de 1950? Podemos observar que os alunos, a partir desses dados, perceberam uma característica do fenômeno que certamente a abordagem matemática deveria abarcar: trata-se de um fenômeno decrescente.

Os grupos, no entanto, construíram seus modelos usando diferentes "matemáticas". Um grupo (G1) de alunos usou como hipótese que o decrescimento no decorrer do tempo é linear e, assim, chegou às respostas conforme mostra a Figura 4. Já no grupo G2 os alunos decidiram, a partir de suas suposições e representações iniciais, que o decrescimento é exponencial e construíram seu modelo e a reposta para a questão como mostra a Figura 5.

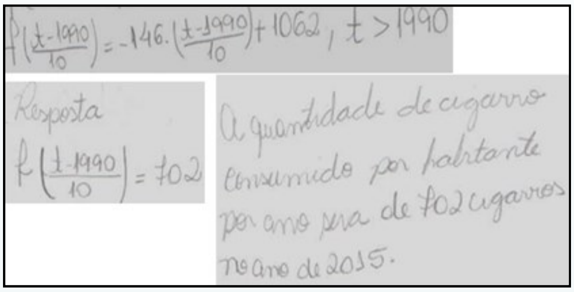

Figura 4: Resolução do grupo G1
Fonte: : Relatório entregue pelos alunos

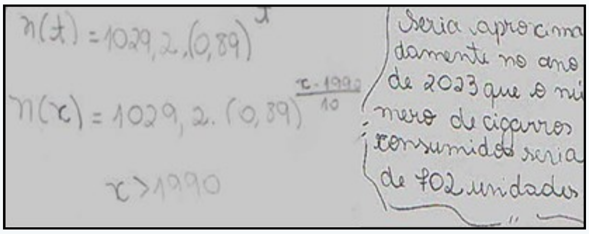

Figura 5: Resolução do grupo G1
Fonte: : Relatório entregue pelos alunos

Alunos de outro grupo ainda, (G3), iniciaram seus estudos com a hipótese de que uma função quadrática seria adequada para o estudo da situação. Todavia, o grupo, nesse caso, se surpreendeu com a resposta cuja indicação é que o consumo não se reduzirá a ponto de chegar aos 702 cigarros anuais consumidos por pessoa no ano de 1950 (Figura 6).

Neste caso o número mínimo de cigarros consumidos por pessoa em cada ano não seria inferior a 735 cigarros.

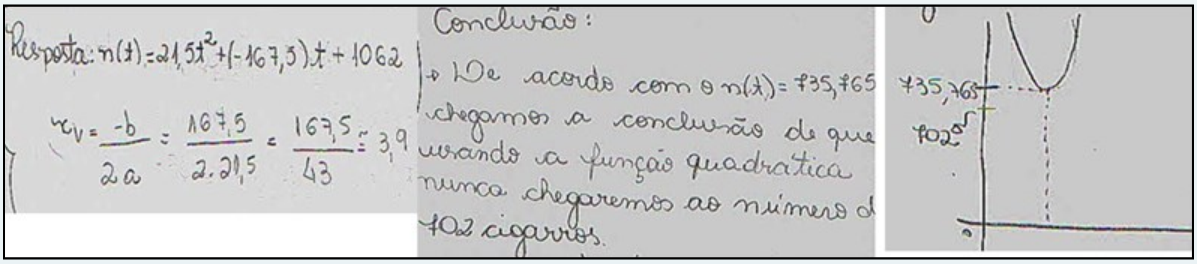

Figura 6: Resolução do grupo G3
Fonte: : Relatório entregue pelos alunos

Certamente numa atividade como essa é fundamental a intervenção do professor no sentido de analisar e validar (ou não) as respostas dos alunos, bem como intervir com a finalidade de formalizar conceitos ainda não usuais para eles e que podem ter emergido naquela atividade. No caso dessa atividade, foi essencial que o professor tratasse do problema, buscando explicações para as diferentes respostas e sua importância em relação ao problema em estudo.

Com esta configuração, o segundo momento já oportuniza aos alunos (e requer deles) uma participação maior no que se refere à autonomia, à realização de suposições e sua testagem, representando um momento de adaptação com um processo de tentativa-erro - acerto relevante para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

O 3º momento

As atividades desenvolvidas pelos alunos numa perspectiva como caracterizado no 1º e no 2º momentos, ao mesmo tempo em que os fez realizar escolhas, tomar decisões, "criar" modelos para resolver um problema, também lhes proporcionou o desenvolvimento da autoconfiança no que se refere a sua capacidade de formular problemas.

Assim, podemos conjecturar que agora, nos termos que nos diz Bondía (2002), o aluno tem uma experiência vivida e esta incorpora-se à sua postura de aluno como "aprendedor" do enfrentamento e da resolução de situações-problema. Deste modo, no terceiro momento, os alunos são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e análise dos dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar. Ou seja, nesse caso, os alunos, para além de resolver uma situação problema, irão resolver uma situação definida por eles mesmos. O professor neste momento já pode atuar como alguém que orienta, que sugere ponderações, ou simplesmente aquele que atende quando é solicitado.

As nossas práticas escolares enquanto professores podem nos requerer nesse momento também a busca de consensos em relação à definição de temas, de procedimentos e ao uso de conceitos matemáticos. O comportamento do aluno, entretanto, deve ser denotativo de que não se trata de fazer o que o professor espera que ele faça, mas de fazê-lo conforme suas orientações ou as orientações de um grupo no qual está inserido.

Considerações finais

A intenção deste texto é tratar do papel do aluno nas atividades de Modelagem Matemática. Ainda que muitas vezes nos tenhamos deparado com textos que relatam o interesse, os sucessos dos alunos, outros revelam que eles ainda continuam “mudos” e não se assumem como aqueles capazes de definir hipóteses, de fazer conjecturas, de tomar decisões e não colocam em cena a criatividade para a resolução de problemas.

Não podemos ignorar que a introdução da Modelagem Matemática também exige mudanças de postura nos alunos. O aluno, todavia, precisa se adaptar, se familiarizar com estas mudanças e construir, assim, sua experiência, numa perspectiva que considera que o progresso é mediado por tentativas e experiência, mais uma vez parafraseando Bondía, é “o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca”.

É isto que fundamenta esta nossa argumentação indicando a familiarização gradativa do aluno com a modelagem, caracterizando estes três momentos. Com base em experiências pessoais enquanto professoras e enquanto alguém que tem se envolvido com alunos e professores de diferentes níveis de escolaridade que se interessam por modelagem, podemos afirmar que vale a pena inserir a modelagem nas aulas. Esta integração gradativa é uma possibilidade.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**.São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, ano 17, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre ‘como fazer’ Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L; BISOGNIN, E.**Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina, PR: Eduel, p. 19-43, 2011.

BONDÍA, J. L. W. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. Tradução de João Wanderley Geraldi. **Revista Brasileira de Educação**. N. 19, p. 20-28, jan/fev/mar/abr. 2002.