

Artigo Teórico



Construindo Árvores de Possibilidades para Compreensão de Relações Combinatórias

Rute Elizabete S. Rosa Borba⁶

Juliana Azevedo⁷

Universidade Federal de Pernambuco⁸

Resumo

No presente artigo, defende-se que o uso de árvores de possibilidades pode ser um rico meio de entendimento de diferentes situações combinatórias. Apresenta-se um software que constrói árvores, permitindo que os alunos reflitam sobre importantes relações combinatórias, de *escolha* e de *ordenação* de elementos, nos diferentes problemas de *produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*. Árvores de possibilidades são, portanto, representações válidas para diferentes tipos de problemas combinatórios e podem ser uma ferramenta para ampliação do conhecimento matemático dos estudantes, em particular, no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

Palavras-chave: Combinatória; Árvores de possibilidades; *Software*.

Introdução

Dentre os problemas matemáticos, os combinatórios se destacam pela variedade de possíveis contextos (escolha de peças de vestiário, levantamento de números construídos a partir de certos algoritmos, constituição de equipes, alocação de assentos, dentre muitos outros), pelos significados presentes em distintas situações (*de produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* ou *permutação*) e pelos

diversificados registros simbólicos (listagens, desenhos, quadros, diagramas, algoritmos, fórmulas e outros). Dessa forma, o trabalho com a Combinatória⁹ possibilita um rico trabalho de resolução de problemas, nos quais é necessário analisar as situações apresentadas com muito cuidado para identificar quais os elementos a serem escolhidos e de que forma devem ser combinados.

⁶Líder do Geração – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco e docente do EDUMATEC – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. E-mail: resrborba@gmail.com

⁷Participante do Geração – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco e discente do EDUMATEC – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. E-mail: azevedo.juliana1987@gmail.com.

⁸Os estudos do Geração receberam os seguintes financiamentos: Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (Facepe – APQ 1095-7.08/08) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (MCT/CNPq – 476665/2009-4).

⁹No presente texto Combinatória e Análise Combinatória são consideradas sinônimos.

**CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES
PARA COMPREENSÃO DE RELAÇÕES COMBINATÓRIAS**

Embora no cotidiano nem sempre precisemos enumerar todos os possíveis casos de uma dada situação, saber quantas são as possibilidades se faz necessário quando se deseja determinar a probabilidade de um evento. Assim, o estudo da Combinatória auxilia no desenvolvimento de uma forma própria de pensar e no aprendizado de conceitos estatísticos relacionados à probabilidade.

Situações combinatórias são, portanto, aquelas nas quais, dados determinados conjuntos, se deve agrupar seus elementos, de modo a atender critérios específicos e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. As relações combinatórias presentes nessas situações são de *escolha* (de elementos de um único conjunto ou de dois ou mais conjuntos), de *ordenação* (se a ordem de apresentação dos elementos constitui, ou não, possibilidades distintas), de *repetição* (se é permitido, ou não, a repetição de elementos), de *posicionamento* (se determinado(s) elemento(s) devem ocupar uma posição fixa) e de *proximidade* (se certos elementos devem se posicionar próximos, ou não).

Pela grande variedade de contextos e situações possíveis, no estudo da Combinatória o uso de representações

simbólicas poderosas (no sentido de auxiliar a entender a situação posta e na ajuda da escolha de procedimentos de resolução) é de extrema importância. Árvores de possibilidades são diagramas que podem, em muito, auxiliar no levantamento de todas as possibilidades de uma dada situação. Elas podem ser construídas manualmente pelos professores e seus alunos, mas no presente artigo será descrito um software que constrói árvores, possibilitando que os aprendizes concentrem suas atenções nas relações combinatórias das situações e na escolha de possibilidades válidas, a partir das situações apresentadas.

Defende-se, portanto, que o uso de árvores de possibilidades pode ser um meio de entendimento das diferentes situações combinatórias, pois permite sistematicamente observar quais as possíveis combinações e selecionar os casos válidos para cada situação enunciada. O uso de software também pode ser motivador e aliviar o trabalho mecânico, possibilitando ao aluno refletir sobre as particularidades de cada problema apresentado.

O software aqui discutido denomina-se *Diagramas de Árbol*; mas, antes de apresentá-lo, serão discutidos os variados problemas combinatórios que

CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES
PARA COMPREENSÃO DE RELAÇÕES COMBINATÓRIAS

podem ser explorados por meio da construção de árvores de possibilidade, em particular com uso de recurso tecnológico. Salienta-se que os problemas aqui tratados são os mais simples dentro da Combinatória e, portanto, sem repetição e não condicionais (ou seja, sem restrição(ões) de posicionamento(s) ou proximidade(s) de elementos). Árvores de possibilidades, entretanto, são também válidas para problemas com repetição e condicionais.

Tipos de problemas combinatórios

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) apresentam problemas combinatórios como um tipo de problema multiplicativo e recomendam que desde os anos iniciais do ensino seja tratada uma variedade de situações combinatórias. Defende-se que o trabalho com situações combinatórias, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, poderá auxiliar a abordagem posterior no Ensino Médio – no qual ocorre uma maior formalização da Combinatória.

Pessoa e Borba (2009), a partir da concepção de articulação de conceitos apresentada por Vergnaud (1986), e amparadas por resultados de investigação empírica, argumentam que se deve trabalhar em todos os níveis e

modalidades de ensino com problemas de *produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*. Há relações básicas de Combinatória contidas nestes quatro tipos de problemas e o contato com uma variedade de situações pode possibilitar um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório. Recomenda-se, assim, um trabalho contínuo com as quatro situações e não uma ênfase inicial em um único tipo de problema combinatório (o produto cartesiano que é o problema explicitamente trabalhado nos anos iniciais) e, posteriormente, quando do estudo da Análise Combinatória, o trabalho com outras situações (*permutação*, *arranjo* e *combinação*).

O que caracteriza um produto cartesiano, diferentemente de outras situações combinatórias, é que devem ser combinados elementos de dois ou mais conjuntos distintos. Pode-se, por exemplo, solicitar que sejam determinados os possíveis casos de números de dois algarismos com o primeiro algarismo escolhido dentre o conjunto $\{1, 3, 5, 7 \text{ e } 9\}$ e o segundo algarismo dentre o conjunto $\{4, 5, 6 \text{ e } 7\}$. Têm-se, assim, dois conjuntos a partir dos quais se deve combinar um elemento de um conjunto com um de outro. As 20 possibilidades são: 14, 15, 16, 17, 34, 35, 36, 37, 54, 55,

CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES
PARA COMPREENSÃO DE RELAÇÕES COMBINATÓRIAS

56, 57, 74, 75, 76, 77, 94, 95, 96 e 97. Observa-se que, nesse caso, os elementos ‘repetidos’, na realidade, são elementos escolhidos de dois conjuntos distintos.

Problemas de permutação¹⁰ são aqueles nos quais os elementos a serem escolhidos pertencem a um conjunto único (diferentemente dos problemas de produto cartesiano) e todos os elementos compõem cada uma das possibilidades, que se diferenciam pelas ordens em que são dispostos os elementos. Pode-se ter, por exemplo, os números de quatro algarismos gerados a partir dos algarismos 1, 3, 5 e 7. As seis possibilidades iniciadas com o algarismo 1, são: 1357, 1375, 1537, 1573, 1735 e 1753. Iniciando com os demais algarismos (3, 5 e 7) também haverá seis possibilidades para cada um, resultando, assim, em 24 possibilidades no total.

Arranjos e permutações assemelham-se em termos de escolhas a partir de um conjunto único e da ordem dos elementos determinando possibilidades distintas e se diferenciam no sentido que em *permutações* todos os elementos são dispostos em ordens variadas e em *arranjos* têm-se alguns elementos escolhidos dentre o conjunto dado. Como exemplo, podem-se ter as

possibilidades de números de dois algarismos, sem repetição, formados a partir dos algarismos 1, 3, 5, 7 e 9. Iniciando em 1, tem-se: 13, 15, 17 e 19 e em 3 tem-se: 31, 35, 37 e 39. Dessa forma, para cada um dos cinco algarismos há quatro possibilidades distintas e, assim, há 20 possibilidades no total.

Nas *combinações* também são escolhidos alguns elementos do conjunto, mas a ordem de escolha desses elementos não gera possibilidades distintas. Pode-se, por exemplo, solicitar a determinação do número de segmentos de retas possíveis a partir dos pontos A, B, C, D e E. Salienta-se que os segmentos AB e BA não constituem segmentos distintos e, dessa forma, a ordem de apresentação dos elementos não gera diferentes possibilidades. Seriam 20 as possibilidades se a ordem dos elementos gerasse novas possibilidades, mas não sendo, há apenas 10 possíveis segmentos de reta formados a partir de 5 pontos: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE e DE.

A seguir será descrito como o software *Diagramas de Árbol*, desenvolvido por Aguirre (2005)¹¹ e utilizado nos estudos descritos em Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007),

¹⁰Permutações podem ser consideradas como casos particulares de *arranjos* nos quais o número de elementos do conjunto de escolha (n) é igual ao número de elementos escolhidos (p).

**CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES
PARA COMPREENSÃO DE RELAÇÕES COMBINATÓRIAS**

Ferraz, Borba e Azevedo (2010) e Azevedo, Costa e Borba (2011), pode ser utilizado para exploração de situações combinatórias por meio da construção de árvores de possibilidades. O software permite o levantamento de *produtos cartesianos*, *arranjos*, *combinações* e *permutações*, utilizando cores para destacar possibilidades viáveis.

O software *Diagramas de Árbol*

Na Figura 1 pode-se observar a tela de abertura do software, com comandos referentes a instruções de uso, exemplos e biblioteca de situações previamente salvas. A partir do comando *Creo um árbol* (criar uma árvore), são escolhidos os níveis e elementos da situação combinatória a ser resolvida.

Na Figura 2, pode-se observar a entrada de dados para um problema de produto cartesiano: Numa lanchonete há quatro tipos de suco (laranja, graviola, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes se pode tomar um suco?



Figura 1 - Tela de abertura do software *Diagramas de Árbol*.



Figura 2 - Telas de definição de um problema de produto cartesiano.

¹¹O software *Diagramas de Árbol* foi disponibilizado para uso do Geração - Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação – UFPE.

**CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES
PARA COMPREENSÃO DE RELAÇÕES COMBINATÓRIAS**

O usuário perceberá que são duas escolhas a serem efetuadas (denominadas de *níveis* no software): a escolha do tipo de suco, em função das quatro diferentes frutas, e a escolha do tamanho do copo, em um dos três tamanhos oferecidos.

Uma vez definidos os níveis e elementos, bem como havendo dado um título para a árvore, o próprio software gera o diagrama desejado, como se pode observar na Figura 3.

Para visualizar todas as possibilidades (12 nesse caso) podem-se utilizar recursos de zoom (indicados pelas lupas com sinais + e -) e de subir e descer na tela (indicado pelas quatro setas). Há ainda o recurso de colorir as possibilidades que se deseja destacar. Este recurso (melhor discutido a seguir) é utilizado nas situações de *permutação*, *arranjo* e *combinação*, uma vez que, nessas situações é necessário selecionar os casos válidos.

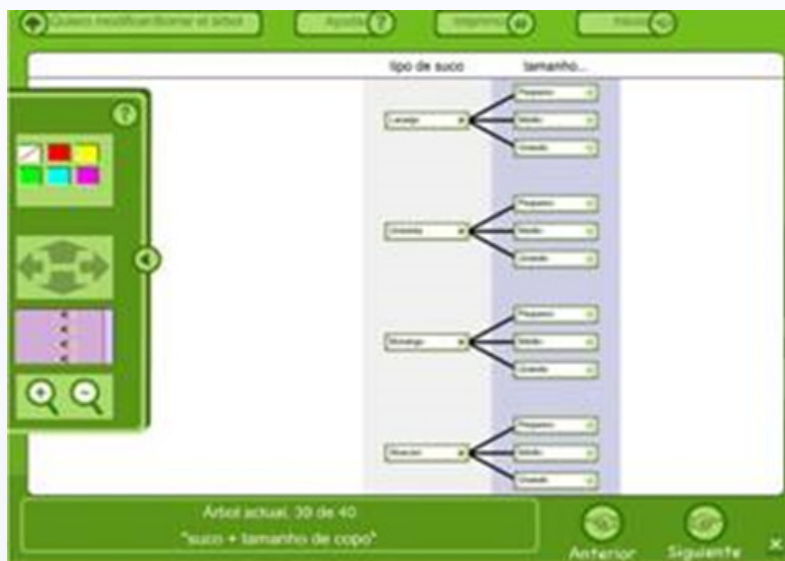


Figura 3 - Tela de árvore gerada para um problema de produto cartesiano.

No caso de *permutações*, *arranjos* e *combinações* a entrada de dados é diferente, uma vez que para esses significados combinatórios há apenas um conjunto base a partir do qual os elementos devem ser escolhidos. Deve-se, nesses casos, designar os níveis de escolha dentro do conjunto dado. A seguir tem-

se um exemplo de *permutação*, em que os níveis de escolha do conjunto dado são as posições das pessoas na fila do banco.

Na Figura 4, pode-se observar a tela de entrada de dados e a tela do diagrama gerado para um problema de *permutação*: De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicio-

nar-se numa fila do banco? A partir do diagrama gerado, podem-se visualizar todas as possibilidades da situação e enumerarem-se os casos válidos, uma vez que o software gera todas as possibilidades, sem diferenciar os casos possíveis dos válidos. Nesta situação de *permutação*, por exemplo, um dos casos gerados pelo software é

**CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES
PARA COMPREENSÃO DE RELAÇÕES COMBINATÓRIAS**

a fila formada por ‘Maria, Maria, Maria’; Entretanto, não é um caso possível, uma vez que Maria não pode ocupar os três lugares da fila. Procedimento semelhante é utilizado nos problemas de arranjo,

como pode ser visualizado na situação da Figura 5, em que devem ser escolhidos entre três participantes o primeiro e o segundo colocado.



Figura 4: Tela de definição e tela da árvore gerada para um problema de permutação.



Figura 5: Tela de definição e tela da árvore gerada para um problema de arranjo.

No caso de *combinações*, atenção especial é requerida, uma vez que a ordem de apresentação dos elementos não representa possibilidades diferentes. Na Figura 6 pode-se observar a tela de definição e a tela do diagrama gerado para um problema de *combinação*: Na loja de bichos de estimação há para vender quatro animais (um cachorro, um passarinho, um peixinho e

uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? Observa-se que nesse problema apenas seis casos devem ser considerados válidos (os casos destacados em vermelho), uma vez que escolhas como cachorro e passarinho e cachorro constituem a mesma possibilidade.

**CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES
PARA COMPREENSÃO DE RELAÇÕES COMBINATÓRIAS**



Figura 6: Tela de definição e tela da árvore gerada de um problema de combinação.

Conclusões

Observa-se, pelas situações expostas, que as árvores de possibilidade, como as apresentadas no software *Diagramas de Árbol*, possibilitam que os alunos reflitam sobre importantes relações combinatórias, de escolha e de ordenação, nos diferentes problemas, de *produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*. É necessário refletir se as escolhas são efetuadas a partir de um ou de mais de um conjunto e se a ordem de apresentação dos elementos gera possibilidades distintas ou equivalentes. Diagramas de árvores de possibilidades são, portanto, representações válidas para as distintas situações combinatórias e podem auxiliar os alunos a diferenciarem e a compreenderem os diferentes tipos de problemas combinatórios. Também podem servir de base para o desenvolvimento de procedimentos mais formais.

Espera-se com a divulgação dos resultados do presente estudo e em estudos futuros contribuir para tornar o ensino da Combinatória – desde os anos iniciais de escolarização – uma ferramenta rica para avanços no conhecimento matemático de estudantes, em particular no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

Referências

- AGUIRRE, C. **Diagrama de Árbol**. Multimedia. 2005.
- AZEVEDO J.; COSTA, D.; BORBA, R. O impacto do software *Árbol* no raciocínio combinatório. In: **Anais...** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil. 2011.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental. 1997.

**CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES
PARA COMPREENSÃO DE RELAÇÕES COMBINATÓRIAS**

FERRAZ, M.; BORBA, R; AZEVEDO, J. Usando o software Árbol na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios. In: **Anais...** X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador. 2010.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem Dança com Quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké** – Cempem – FE – Unicamp – v.17, n.31 – jan./jun. – 2009.

SANDOVAL, I.; TRIGUEIROS, M.; LOZANO, D. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. In: **Anais...** XII Conferencia Interamericano de Educación Matemática, Querétaro, México. 2007.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, 1, p. 75-90. 1986.

Coleção SBEM



Como adquirir:

Escolha o(s) livro(s) de sua preferência:

- Ao valor do livros: acrescenta-se a taxa dos correios (a consultar).
- Para efetuar o pagamento faça depósito no Banco do Brasil Ag. 3603-X, C/C 42.000-X e nos envie uma cópia do comprovante via e-mail: sbem@sbembrasil.org.br ou tel./fax (61) 3107-5942, juntamente com a descrição do pedido e seu endereço completo.

Veja mais em www.sbembrasil.org.br

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA