Artigo Teórico

Fórmula de Área para Otimização: Um Olhar sob a Ótica das Imbricações entre Campos Conceituais[1]

Rosinalda Aurora de Melo Teles[2]
Paula Moreira Baltar Bellemain[3]

Resumo

Neste artigo, discutimos como alunos do ensino médio lidam com *problemas de otimização*, recorrentes em livros didáticos de Matemática para o último ano do Ensino Fundamental (9º ano ou 8ª série) e para 1º ano do Ensino Médio. Mais especificamente, investigamos, sob a ótica das imbricações entre campos conceituais, o uso de fórmulas de área em problemas relacionados aos conceitos de máximo e de mínimo no estudo das funções. Para tanto, analisamos procedimentos de resolução utilizados por alunos do 2º ano do Ensino Médio submetidos a um teste diagnóstico. A análise dos resultados permitiu evidenciar, entre outros aspectos, a confusão entre comprimento e área, relacionada ao campo das grandezas, erros na manipulação de expressões algébricas e entraves relativos aos cálculos numéricos.

Palavras-chave: Imbricações entre Campos Conceituais; Fórmula de Área; Ensino Médio.

Introdução

Nosso intuito é contribuir para a reflexão sobre os desafios enfrentados por professores de matemática na ação de ensinar e avaliar seus alunos do ensino básico. Desse modo, focamos nosso olhar sobre questões de ensino e de aprendizagem da matemática no que chamamos de imbricações entre campos conceituais. Essa perspectiva se situa na Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud e seus colaboradores. Com o termo "imbricações", caracterizamos um tipo de relação em que os campos conceituais se sobrepõem mutuamente, se articulam e a partir dessa "interconexão dinâmica" são gerados novos significados para os conteúdos matemáticos em foco. Procuramos pensar imbricações entre campos conceituais, articulando as

[1]Uma versão preliminar deste texto (TELES; BELLEMAIN, 2011) foi publicada nos anais da XIII CIAEM.
[2]Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco. E-mail: rosinaldateles@yahoo.com.br
[3]Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco. E-mail: paula.baltar@terra.com.br

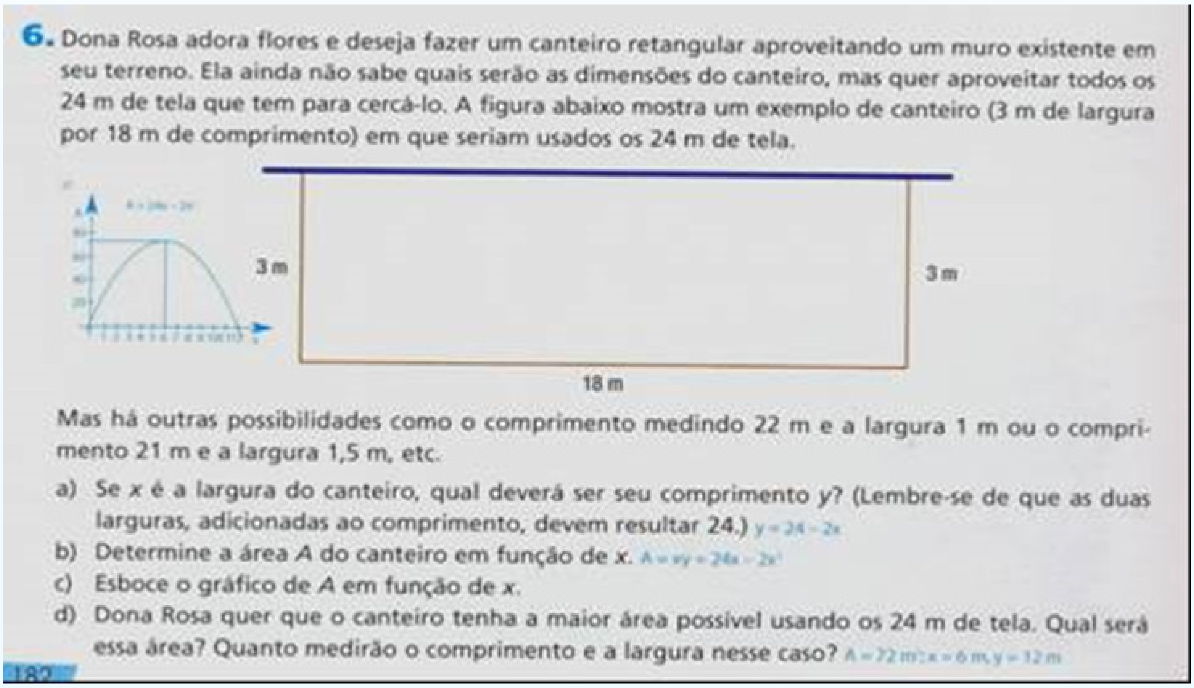
dimensões epistemológica, cognitiva e didática. O tratamento de situações nas quais estão envolvidas fortes imbricações exige que os sujeitos naveguem de um campo conceitual para outros e que articulem seus conhecimentos para tratar de maneira pertinente os problemas postos.

Pretendemos, com as questões que formulamos e com as respostas que construímos, contribuir para a elaboração de situações didáticas mais eficientes sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas, pois, conforme Baturo e Nason (1996), em alguns casos, as dificuldades que os estudantes têm com cálculo de área podem ser oriundas das experiências de aprendizagem fornecidas em nossas escolas. Ao analisarmos, à luz da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), erros cometidos por alunos do ensino médio em questões envolvendo a fórmula de área para otimização, defendemos, como Pinto (2000), a identificação e a análise do erro como uma oportunidade didática para o professor organizar melhor seu ensino, a fim de criar situações apropriadas para o aluno tomar consciência de eventuais lacunas ou inadequações em seus conhecimentos e motivar a ampliação ou a retificação desses conhecimentos.

2. Fórmula de área para otimização: algumas escolhas para elaboração do teste diagnóstico

Ao olharmos "fórmulas de área de figuras geométricas planas" sob a ótica das imbricações entre Campos Conceituais, podemos vê-las como um elemento do campo conceitual das grandezas geométricas e também como um elemento que articula vários campos conceituais. São elementos do campo das grandezas geométricas, pois expressam relações entre comprimentos de figuras geométricas planas e, entre outros aspectos, desempenham papel importante na aprendizagem do conceito de área. Por outro lado, uma fórmula pressupõe, enquanto representação algébrica de uma relação entre variáveis, aspectos algébricos e funcionais; a área de uma figura é uma grandeza; figuras geométricas planas pertencem ao campo geométrico; o resultado obtido por meio da aplicação de uma fórmula para calcular a área de uma figura, dada a unidade de área, é um número resultante de operações.

Ao mapear situações que conferem significado ao conceito de fórmula, Teles (2007) identificou várias classes de usos para as fórmulas: calcular a área de figuras; calcular comprimentos que caracterizam a figura; comparar áreas de figuras; produzir figuras em condições dadas; estabelecer relações entre grandezas; otimizar e operar com grandezas de mesma natureza. Neste artigo, especificamente, discutimos o uso de fórmulas de área em problemas de otimização, relacionados às aplicações do conceito de máximo e de mínimo no estudo das funções, recorrente em livros didáticos de Matemática para o último ano do Ensino Fundamental (9º ano ou 8ª série) e para o 1º ano do Ensino Médio, conforme identificado na análise de livros didáticos realizada por Teles (2007). Quando as fórmulas são utilizadas para otimizar, está em jogo de maneira central o aspecto funcional, pois elas expressam relações de dependência entre variáveis (comprimentos e área). Trata-se, por exemplo, de determinar a maior área possível em função de um comprimento fixo, como no exercício abaixo (figura 1), extraído de um livro didático:



6. Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno. Ela ainda não sabe quais serão as dimensões do canteiro, mas quer aproveitar todos os 24 m de tela que tem para cercá-lo. A figura abaixo mostra um exemplo de canteiro (3 m de largura por 18 m de comprimento) em que seriam usados os 24 m de tela.

Mas há outras possibilidades como o comprimento medindo 22 m e a largura 1 m ou o comprimento 21 m e a largura 1,5 m, etc.

a) Se x é a largura do canteiro, qual deverá ser seu comprimento y? (Lembre-se de que as duas larguras, adicionadas ao comprimento, devem resultar 24.) $y = 24 - 2x$
b) Determine a área A do canteiro em função de x. $A = xy = 24x - 2x^2$
c) Esboce o gráfico de A em função de x.
d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 24 m de tela. Qual será essa área? Quanto medirão o comprimento e a largura nesse caso? $A = 72\ m^2; x = 6\ m, y = 12\ m$

182

Figura 1 - aplicação do conceito de máximo e mínimo
Fonte: PIRES, Célia Carolino; CURI, Edda; PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. São Paulo: Atual, 2002. 8ª série, pág. 182.

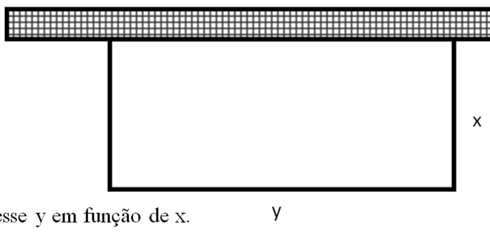
Nos problemas de máximos e mínimos, como dado um perímetro fixo ou um comprimento fixo, para determinar a maior área possível, a estratégia funcional é a mais econômica, mas existem outras. Porém, em todas elas a compreensão e a mobilização de conceitos de outros campos conceituais são necessárias.

A questão de otimização que analisaremos foi proposta em duas versões, com e sem tabela, num teste diagnóstico aplicado com 259 alunos de 2° ano do Ensino Médio, de cinco escolas de uma Região Metropolitana brasileira, com o objetivo de caracterizar os conhecimentos oriundos dos diversos campos conceituais, subjacentes aos procedimentos de resolução de situações envolvendo fórmula de área. Dos 259 alunos que responderam os testes, 49 responderam à primeira versão da questão, sem tabela, e 60 alunos responderam à questão com tabela. As duas questões foram baseadas em livros didáticos para 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental e para a 1ª série do Ensino Médio.

Na versão com tabela, buscamos indicar, através dos itens que deviam ser respondidos, os passos para que o aluno calculasse a área máxima produzida a partir de um perímetro fixo ou de um comprimento fixo. A utilização de tabelas e gráficos obriga a considerar as letras como números desconhecidos que não são fixos. Assim, um dos objetivos nesta questão, que interessa à pesquisa sobre imbricações, é identificar se o aluno compreende a letra como variável.

Questão 1

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno. Ela ainda não sabe quais serão as dimensões do canteiro, mas quer aproveitar todos os 20 metros de tela que tem para cercá-lo.



a) Expresse y em função de x.
b) Determine a área A desse canteiro em função de x.
c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x												
y												
A												

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirá o comprimento e a largura nesse caso?

Nesse problema estão em jogo duas grandezas: comprimento e área. O contexto no qual se situa o problema é cercar uma região retangular com metros de tela. Ao canteiro é, portanto, atribuído o modelo matemático do retângulo, o que faz intervir o campo conceitual da geometria. A resolução do problema exige que o aluno mobilize propriedades do retângulo. A principal solicitação do problema é distribuir os 20 metros de tela em três partes, sendo duas iguais e uma diferente, isto porque a figura é um retângulo, mas os 20 metros de tela formam uma linha poligonal aberta. Do ponto de vista do campo conceitual dos números, todas as medidas de comprimento indicadas implícita ou explicitamente são inteiras. O domínio estritamente natural para as medidas apresentadas no problema favorece o procedimento numérico, ou seja, ir desenhando retângulos, fazendo tentativas até achar o retângulo de maior área, o que é facilitado pelo fato do número 20 possuir muitos divisores. Evidentemente, o campo conceitual algébrico está presente pelo uso das letras (ora como variáveis ora como incógnitas) para expressar as relações entre os comprimentos e as áreas dos retângulos e pelas manipulações necessárias das expressões algébricas, nos procedimentos de resolução algébricos. Finalmente, o campo conceitual funcional também tem presença marcante, uma vez que o conceito de variável é central na compreensão do problema e em seu tratamento; os comprimentos dos retângulos possíveis variam dentro de certo domínio e as áreas desses retângulos variam em função desses comprimentos e, em última instância, trata-se de encontrar o máximo de uma função.

3. As Imbricações entre Campos Conceituais como foco de interpretação do processo de aquisição e uso das fórmulas de área

Na análise dos testes, destacamos erros relacionados aos diversos campos conceituais. Ao campo das grandezas, a confusão entre área e perímetro, amplamente discutida em pesquisas da Educação Matemática; ao campo algébrico, erro na modelagem[4], ou seja, na representação algébrica do contexto da questão e na manipulação algébrica, e ao campo funcional, o fato de desconsiderar o caráter variável da letra. A seguir ilustramos alguns desses erros.

i) Erro relacionado ao campo das grandezas

Erros relacionados à confusão entre comprimento e área - Para 6 alunos, o valor numérico da área é igual ao valor numérico do comprimento fixo dado. Essa consideração indica possíveis incompreensões por parte dos alunos de que, para caracterizar um comprimento ou uma área, o valor numérico não é suficiente; de que as grandezas comprimento e área são de naturezas distintas, ou ainda de que não há dependência direta na maneira como cada uma varia, ou seja, é possível manter um comprimento fixo e ao mesmo tempo fazer variar uma área. No primeiro protocolo, descrito na figura 2, o aluno inicialmente parece usar a noção de que, dentre os retângulos de mesmo perímetro, o qua-

[4] O processo de modelagem extrapola a construção de representações algébricas. Neste artigo utilizamos a expressão “modelagem” para denotar apenas uma parte do processo.

drado é o de maior área (os 20 metros de tela permitem construir um quadrado de lado 5 cm, o qual tem área de 25 cm^2). Essa resolução não corresponde satisfatoriamente ao problema, porque os 20 metros não servem para contornar toda a figura, mas a determinar a soma do comprimento de três dos quatro lados do retângulo. Essa primeira solução é barrada pelo aluno. A segunda explicação parece revelar confusão entre comprimento e área, pois envolve a comparação de atributos não comparáveis. Embora o número 25 seja maior que o número 20, não faz sentido comparar uma área (25 cm^2) e um comprimento (20 cm). Além disso, mesmo considerando que a resposta dada corresponde ao comprimento do lado de um quadrado, ainda sob a ótica das grandezas, a nova resposta é dada em centímetros (e não em metros) o que designa um papel secundário às unidades e um foco excessivo no aspecto numérico.

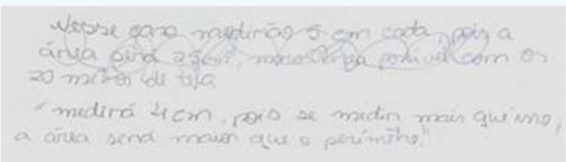


Figura 2 – Protocolo 8.
Fonte: relatório de pesquisa

No protocolo 10 – Figura 3, o aluno não atribui valores particulares para as dimensões do retângulo, dando indícios da mobilização da noção de variável. Entretanto, ele expressa algebricamente o dado do problema de que Dona Rosa dispõe de 20 metros de tela, igualando o produto dos comprimentos dos lados do retângulo a 20 (confunde, portanto, uma soma de comprimentos com uma área). Só há uma alusão a unidades na resolução desse aluno (ao testar os valores 5 e 4, expressa a área em metros quadrados). O foco no aspecto numérico e na manipulação da escrita algébrica não permite lidar de maneira pertinente com as grandezas em jogo.

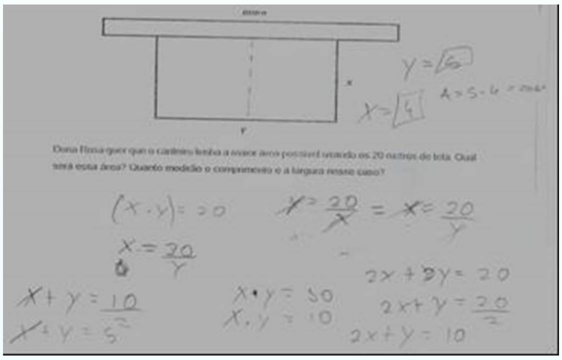


Figura 3 – Protocolo 10.
Fonte: relatório de pesquisa

ii) Erro relacionado ao campo algébrico

Erro na modelagem da questão: diante da dificuldade de passar da linguagem natural para linguagem simbólica, uma das etapas para resolução de um problema algébrico (DA ROCHA FALCÃO, 1997), ou seja, modelar a questão, o aluno prefere um procedimento numérico caracterizado pela tentativa. Um dos aspectos que dificulta a modelagem é esquecimento do muro.

Erro de manipulação algébrica: o protocolo 12, mostrado na figura 4, evidencia como um erro numa das etapas para resolução de um problema algébrico interfere na obtenção de soluções verdadeiras para problemas envolvendo fórmulas de área. Também reforça a importância do estudo das imbricações entre campos conceituais. O aluno modela corretamente o problema, demonstra domínio nas operações com as letras, mas um erro de sintaxe, ou seja, na resolução da equação, prejudicou seu resultado.

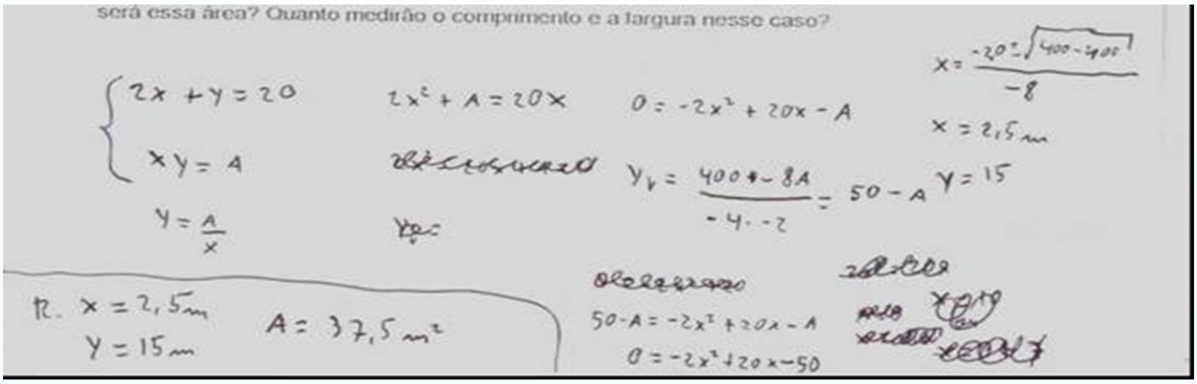


Figura 4: Protocolo 12
Fonte: relatório de pesquisa

iii) Erro relacionado ao campo funcional

No protocolo 13, conforme a figura 5, o aluno, ao interpretar a figura, considera o muro como um retângulo do qual se precisa calcular a área também; para isto, fixa uma unidade para x, ou seja, desconsidera o caráter variável da letra. O desenho é apenas uma representação do real, possuindo várias possibilidades de composições

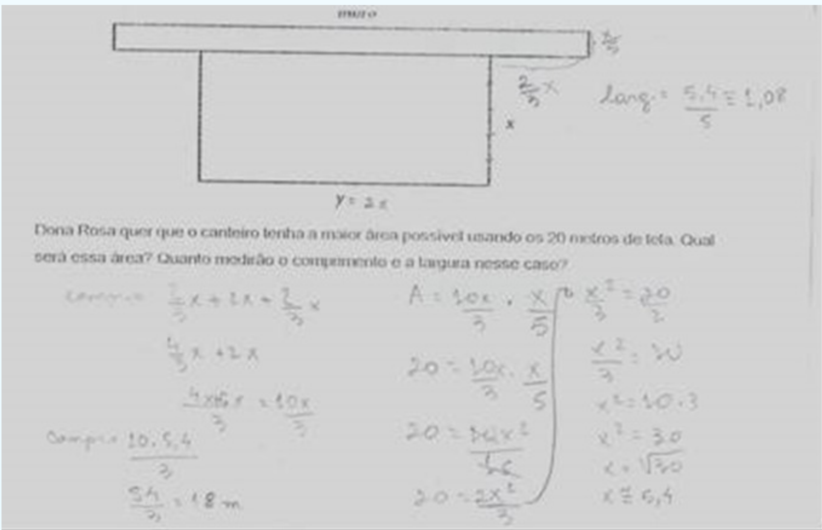
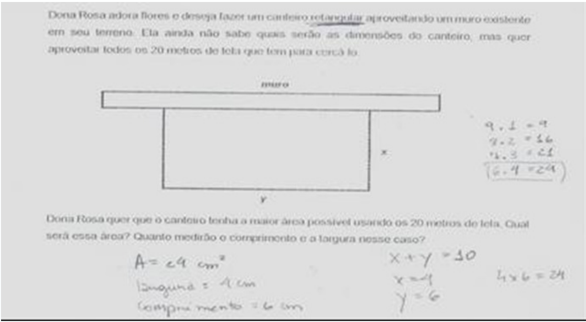


Figura 5: Protocolo 12
Fonte: relatório de pesquisa

Apesar de relacionarmos este tipo de questão basicamente ao procedimento algébrico ou funcional, praticamente metade dos alunos testados tentou um procedimento numérico. Dentre as estratégias numéricas, destacamos o protocolo 54, mostrado na figura 5, onde o aluno decompõe 20 e multiplica os fatores obtidos:

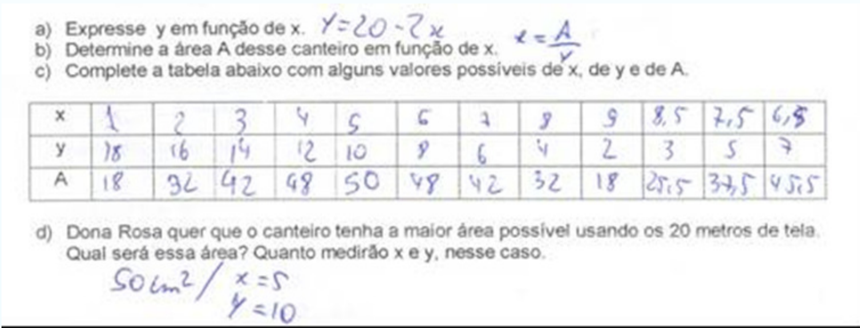

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno. Ela ainda não sabe quais serão as dimensões do canteiro, mas quer aproveitar todos os 20 metros de tela que tem para cercá-lo.

Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão o comprimento e a largura nesse caso?

A = 24 cm²
largura = 4 cm
comprimento = 6 cm
x + y = 10
x = 4
y = 6
4 x 6 = 24

Figura 6: Protocolo 54
Fonte: relatório de pesquisa

Destacamos ainda que, dos 20 que esboçaram alguma reposta para este item da questão e mobilizaram um procedimento numérico, 17 utilizaram apenas valores inteiros e apenas 3 utilizaram decimais até 0,5. Estes dados refletem a dificuldade de romper com o domínio numérico dos naturais e evidenciam preferência por procedimentos numéricos em detrimento aos algébricos. Tais resultados, também, evidenciam aspectos relacionados ao campo conceitual das funções, pois o aluno faz uma interpretação pontual das funções e não variacional no preenchimento da tabela, como ilustrado no extrato de protocolo 17, demonstrado na figura 7:


a) Expresse y em função de x. Y = 20 - 2x
b) Determine a área A desse canteiro em função de x. x = A/y
c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8,5	7,5	6,5
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2	3	5	7
A	18	32	42	48	50	48	42	32	18	25,5	37,5	45,5

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.
50 cm² / x = 5
y = 10

Figura 7: Protocolo 17
Fonte: relatório de pesquisa

Por outro lado, a opção pelo procedimento numérico parece mostrar que os sujeitos pesquisados não mobilizam, nesta situação, conhecimento funcional suficiente para calcular a área máxima através do cálculo do ponto máximo da função.

4. Considerações Finais

Ao olharmos as fórmulas de área para otimização, sob a ótica das imbricações, foi possível identificar, nos erros cometidos pelos alunos, fortes imbricações entre campos conceituais. Por exemplo, erros quanto: à interpretação da figura, relacionado ao campo geométrico, de confusão entre área e comprimento, ligados ao campo das grandezas, reforçando a necessidade de trabalhar a dissociação entre área e comprimento na abordagem do conceito de área; à manipulação algébrica, no campo algébrico; ao procedimento numérico, situado no campo numérico. Em alguns procedimentos foi possível identificar aspectos dos vários campos, evidenciando o papel das imbricações como entrave para resolução de determinadas situações. A ausência de respostas e a opção por procedimentos numéricos apontam para dificuldades em questões que mobilizavam a fórmula para otimizar. Concordamos com Pinto (2000, p. 23) quando afirma que:

> O professor tende a orientar sua ação sobre o erro por uma perspectiva essencialmente empirista, isto é, sobretudo corretiva. Essa postura corretiva por parte do professor, que considera o erro como uma incapacidade do aluno, deve ser substituída por uma postura construtiva, na qual o erro passa a ser problematizado, sob várias dimensões, e focalizado em sua gênese.

É preciso, por isso, observar se os erros são recorrentes no grupo de alunos, analisar suas causas e definir encaminhamentos em relação a estes erros; para isto, porém, é necessário que o professor possua conhecimentos específicos, em especial relacionados à Didática da Matemática. No intuito de contribuir com esta reflexão do professor que ensina matemática, este pequeno texto evidencia as imbricações entre campos conceituais como elemento que, pela variedade de abordagens possíveis, amplia as possibilidades de compreensão dos sujeitos aprendizes e, ao mesmo tempo, pela amplitude, explica a complexidade de processos de aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Referências:

BALTAR, Paula Moreira. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes:** une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège.1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BATURO, Annette; NASON, Rod. Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. **Educational Studies in Mathematics** 31: 235 – 268, 1996.

DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. A Álgebra como Ferramenta de Representação e Resolução de Problemas. In: SCHLIEMANN, Analúcia Dias. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. 2. ed. Recife: Ed. UFPE,1997.

DOUADY, Regine; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. V. 20, n. 4. p. 387-424,1989.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática:** estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas, SP: Papirus, 2000.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar**: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. Tese (Doutorado em Educação) UFPE, 2007.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Um estudo sobre a fórmula de área para otimização. In: **XIII Conferência Internacional de Educação Matemática - CIAEM**, 2011, Recife. V. único. p. 1-12.

VERGNAUD, Gérard. **La théorie des champs conceptuels.** Recherches en Didactique des Mathématiques – RDM, v. 10, nº 2, 3. Grenoble. p. 133 – 170, 1990.