

# Artigo Teórico



## Um Estudo Sobre Erros em Álgebra Elementar

Franciele Rodrigues de Moraes<sup>10</sup>

Marilena Bittar<sup>11</sup>

**Resumo:** Apresentamos alguns dados de uma pesquisa em fase de conclusão, cujo foco principal é estudar erros de alunos em álgebra elementar e sua superação, por alunos do ensino médio com o auxílio da tecnologia. Analisamos algumas atividades sobre equações, procurando identificar, por meio dos esquemas mobilizados pelos alunos, alguns teoremas em ação falsos utilizados por eles e verificar sua persistência na resolução dessas atividades.

### Introdução

O que é um erro? Para Cury (2008) é um conhecimento e não a falta dele. Também não é um conhecimento falso, uma vez que permitiu produzir respostas satisfatórias ou corretas a determinados tipos de problemas. No entanto, esse conhecimento, ao ser transposto ou aplicado a outras categorias de problemas, produz respostas inadequadas ou incorretas. Nessa perspectiva, superar o erro é construir um conhecimento com um domínio de validade total. De acordo com Cury (2008)

podemos aprender muito com os erros dos alunos. Ao analisar suas produções, temos a possibilidade de entender como esses alunos se apropriam dos conceitos matemáticos e também de identificar quais são seus erros. Essa análise pode ser usada para favorecer a construção do conhecimento pelo aluno e é nessa perspectiva que desenvolvemos nossa pesquisa, cujo foco principal é estudar erros de alunos em álgebra e sua superação com o auxílio do *software Aplusix*.

O *Aplusix* é um *software* de álgebra destinado à realização de cálculos

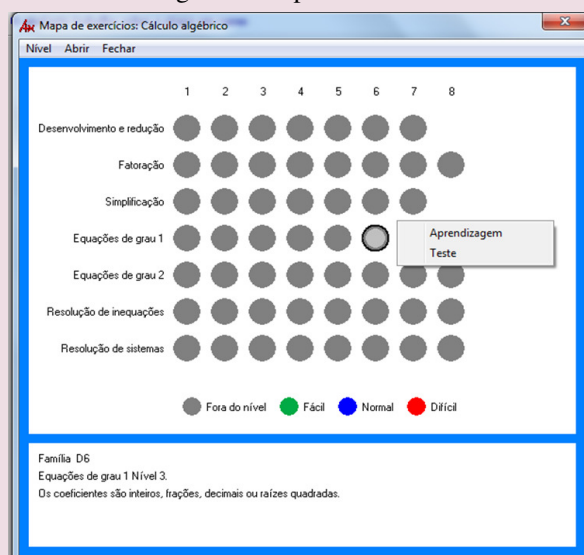
<sup>10</sup>Aluna do Programa de Mestrado em Educação Matemática e Bolsista CAPES. (rodrigues\_franciele@hotmail.com). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS.

<sup>11</sup>Professora do Programa de Mestrado em Educação Matemática, Bolsista Produtividade em Pesquisa\CNPq, orientadora desta pesquisa. (marilenabittar@gmail.com).

## Um Estudo Sobre Erros em Álgebra Elementar

algébricos. O aluno efetua os cálculos que deseja e quando uma passagem tem erro, o *Aplusix* indica a não equivalência entre as etapas, sem explicitar o erro; cabe, assim, ao aluno analisar sua produção, descobrir seus erros e tentar corrigi-los. O *software* contém um *Mapa de Exercícios*, dividido em duas categorias, *cálculo numérico* e *cálculo algébrico*, com *famílias* de aproximadamente 12 exercícios gerados automaticamente cada vez que o usuário pede uma lista de exercícios. O aluno pode ter retroações durante sua resolução, se estiver no modo *aprendizagem*, ou fazer a lista de exercícios sem nenhum tipo de retroação se estiver no modo *teste*. Nesse caso, ao final das atividades é dada a pontuação obtida e a possibilidade de rever e corrigir o teste.

Figura 1: Mapa de Teste



Fonte: *Aplusix 3*.

As retroações oferecidas pelo software permitem que o aluno reveja sua produção e analise seus erros, corrigindo-

os, tornando-se, assim, mais autônomo em sua aprendizagem e consciente dos seus erros e essa foi a razão da nossa opção por trabalhar com o *Aplusix*.

### O desenvolvimento da experimentação

Trabalhamos com alunos do 1º ano do ensino médio, de uma escola pública de Campo Grande, que julgam ter alguma dificuldade de apreensão de conceitos matemáticos. Para isso, eles responderam a um questionário para identificarmos, entre outras coisas, se eles têm ou não dificuldades de aprendizagem em matemática e quais se voluntariariam a participar da pesquisa. Foram realizados cinco encontros presenciais durante o segundo semestre de 2011 e quatro ao longo do primeiro semestre de 2012. Esses encontros ocorreram em semanas alternadas, no laboratório de informática da escola, com duração de cinquenta minutos e após o término das aulas, no sexto tempo.

No primeiro encontro apresentamos o *software* e propusemos a resolução de algumas equações do primeiro grau. Ninguém conhecia o *Aplusix*, mas todos já usavam o computador em atividades como acesso à internet e gravação de arquivo. Mostramos o funcionamento do *mapa de exercícios* e pedimos que escolhessem a primeira

## Um Estudo Sobre Erros em Álgebra Elementar

família de exercícios de equações do primeiro grau, em modo *aprendizagem*, que contém uma lista de dez exercícios de equações do primeiro grau “simples”, como os do quadro 1.

Quadro 1 - Exercícios típicos da primeira família de equações do primeiro grau.

$4x = 0$
$-6x = 30$
$-2x - 8 = -2$
$-x = -16$
$5 = -3x$

Fonte: *Aplusix 3*.

Todos conseguiram resolver as equações, alguns com mais dificuldades que outros, mas todos chegaram ao final da lista gerada.

Apresentamos, a seguir, algumas atividades desenvolvidas por um aluno e analisamos indícios de aprendizagem. Investigamos os esquemas utilizados por esse aluno, analisando principalmente os invariantes operatórios, buscando elementos que ajudem a identificar e compreender os erros e verificar sua persistência ao longo das atividades.

Para Vergnaud (2009) esquema é a organização invariante da atividade para uma determinada classe de situações, sendo que o que é invariante é a organização da ação, não a classe de situações e nem mesmo as ações. Os invariantes operatórios (conceitos em ação

e teoremas em ação) têm um papel fundamental em nosso estudo, pois eles são os conhecimentos contidos nos esquemas. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira pelo sujeito no momento de sua ação, ou seja, ela é verdadeira para o sujeito que a constrói, mas não é, necessariamente, verdadeira.

As resoluções das equações que iremos analisar foram realizadas por um aluno que cometeu alguns erros que poderiam ser agrupados em uma mesma categoria, pois a maioria deles foi decorrente da transposição de termos de um membro a outro da equação. O procedimento de transposição, usado de maneira mecânica, sem o estudo dos princípios que permitem fazer a transposição de um termo para o outro, pode acarretar vários erros. Vamos analisar alguns desses erros e sua persistência no decorrer da resolução de algumas equações do primeiro grau, propostas nos segundo e terceiro encontros.

No segundo encontro escolhemos seis equações sendo que cinco delas em alguma etapa da resolução chegava à forma  $ax = b$ , com  $a \in \mathbb{Z}^*$  e  $a \neq -1, 0, 1$ , pois em nosso primeiro encontro percebemos que os alunos tinham dúvidas

## Um Estudo Sobre Erros em Álgebra Elementar

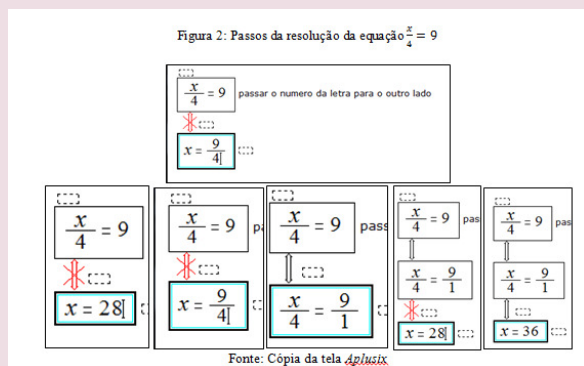
na resolução de equações dessa família. As equações propostas foram as seguintes:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{x}{4} = 9 & 3) 5x = 10 & 5) 2(x+1) + 3 = x + 4 \\ 2) 3x - 4 = 7 & 4) -20x = 8 & 6) -2(3+x) = x + 1 \end{array}$$

Ao tentar resolver a primeira atividade proposta observamos, com a ajuda do *videocassete*<sup>12</sup> do *Aplusix*, que o aluno fez vários erros ao tentar transpor o número quatro para o outro lado da igualdade. Dentre os quatro erros, dois são relativos a cálculo numérico e dois de transposição, esses últimos sendo modelados pelo teorema em ação errôneo:

$$T_1: \frac{ax}{b} = c \Rightarrow ax = \frac{c}{b} \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{Z}^*$$

mobilizado duas vezes na mesma atividade.

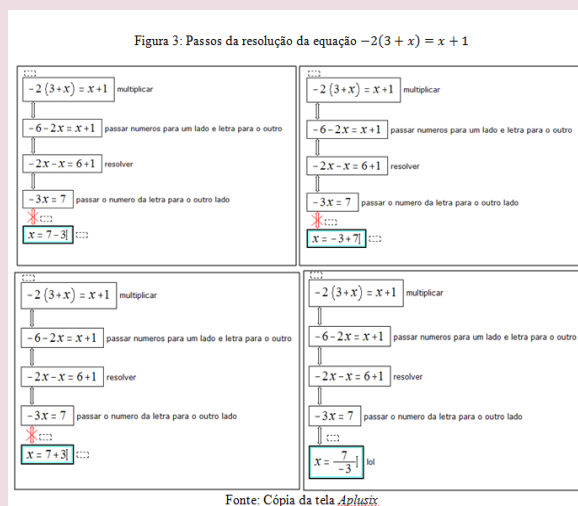


Em seguida, o aluno resolveu sem erros as próximas equações, usando o teorema em ação correto

$$T_{v1}: ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*$$

Nesse momento, acreditávamos que o erro no primeiro exercício fosse decorrente da

particularidade da equação, mas, ao resolver a equação seguinte, o aluno cometeu vários erros ligados à técnica de transposição, antes de chegar ao resultado correto, como podemos observar na figura 3.



Na resolução dessa equação percebemos alguns erros. Esse fato, juntamente com a resolução da família de exercícios desenvolvidos no primeiro encontro, deu-nos indícios de alguns possíveis teoremas em ação errôneos mobilizados pelo aluno, que podem ser modelados da seguinte forma:

Sejam  $a \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*$

$$T_2: ax = b \Rightarrow x = b - a \text{ (falso)}$$

$$T_3: ax = b \Rightarrow x = b + a \text{ (falso)}$$

$$T_4: ax = b \Rightarrow x = -b + a \text{ (falso)}$$

<sup>12</sup>O *Aplusix* armazena todas as atividades realizadas pelos alunos e por meio da ferramenta *videocassete* possibilita o estudo passo a passo de todas as ações realizadas pelo aluno, inclusive as que o aluno apagou. Para saber mais sobre o *Aplusix* consultar <<http://www.aplusix.com/>>

## Um Estudo Sobre Erros em Álgebra Elementar

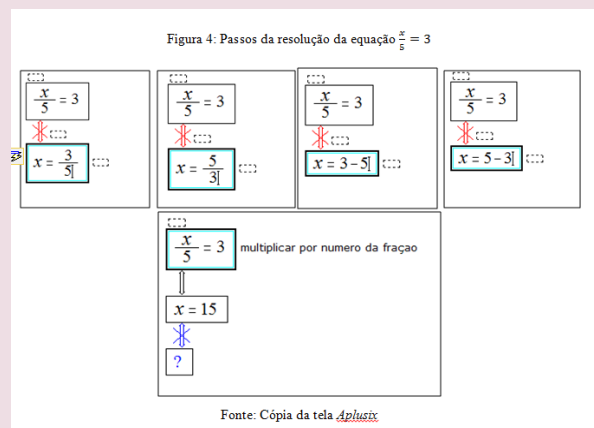
$$T_{v1}: ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} \text{ (verdadeiro)}$$

A partir dessa constatação, resolvemos trabalhar, no encontro seguinte, com mais equações desse tipo, buscando compreender seus erros e verificar a ocorrência ou não de um possível teorema em ação errôneo. Assim, uma semana depois, foi solicitado aos alunos a resolução de uma lista de seis equações semelhantes às resolvidas no encontro anterior. As equações propostas foram as seguintes:

- |                                  |                            |
|----------------------------------|----------------------------|
| 1) $\frac{x}{5} = 3$             | 4) $3(x + 2) = x - 2$      |
| 2) $\frac{2x}{3} = -6$           | 5) $4(2 - x) - 6 = x - 12$ |
| 3) $\frac{-5x}{2} = \frac{5}{3}$ | 6) $9 = 3(x - 1)$          |

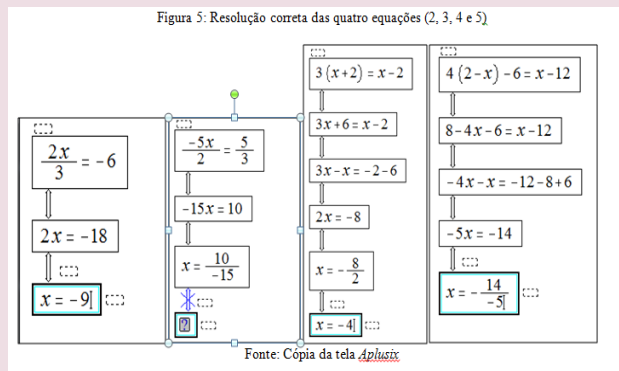
Ao tentar resolver a primeira equação (figura 4), o aluno cometeu vários erros antes de conseguir mobilizar um teorema em ação correto que permitisse resolver a equação e que pode ser modelado da seguinte maneira:

$$T_{v2}: \frac{ax}{b} = c \Rightarrow ax = b * c \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{Z}^*$$



Novamente, ao transpor um elemento do primeiro membro para o segundo, o aluno faz vários erros, mobilizando mais uma vez o teorema em ação errôneo **T<sub>1</sub>**, além de outros.

Nas equações seguintes, como podemos perceber pela figura 5, o aluno consegue resolver, sem cometer erros, as quatro equações apresentadas a seguir, mobilizando corretamente os dois teoremas em ação corretos (**T<sub>v1</sub>** e **T<sub>v2</sub>**), e, apesar de não conseguir simplificar a fração, na segunda equação, ele consegue resolver corretamente as operações algébricas.



Como se pode observar, os teoremas em ação corretos foram mobilizados em todas as equações analisadas. Com exceção do teorema em ação errôneo **T<sub>1</sub>**, mobilizado três vezes, os teoremas em ação errôneos modelados, foram mobilizados cada um, uma única vez, e assim podemos inferir que esses teoremas não estão arraigados, pois eles

## Um Estudo Sobre Erros em Álgebra Elementar

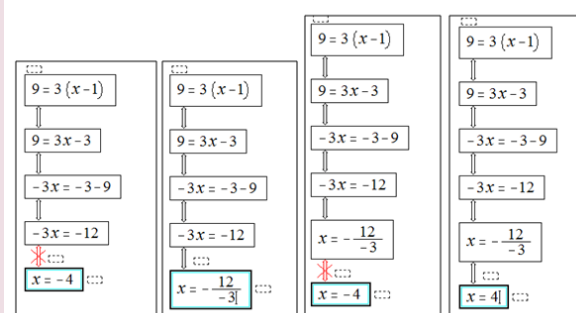
poderiam ter sido mobilizados outras vezes. Por exemplo: na segunda equação do terceiro encontro, o aluno poderia ter mobilizado o teorema em ação  $T_1$ , na primeira passagem, ou qualquer outro teorema em ação falso na última passagem. O não uso frequente de um mesmo teorema em ação errôneo pode ter sido influenciado pelas retroações do *software Aplusix*, pois, com essa ferramenta, o aluno tem a possibilidade de refletir sobre seu erro, ajudando-o a não cometer os mesmos erros.

Apesar de os teoremas em ação errôneos modelados não serem todos semelhantes, eles podem ter a mesma origem: a má compreensão ou mau uso do procedimento de transposição. O uso desse procedimento de forma mecânica fica claro durante todas as resoluções, seja nos erros cometidos ou nos comentários feitos pelo aluno durante a resolução como: “Passa o número para o outro lado”.

Durante toda a experimentação, observamos que este aluno sempre queria fazer “direto” pulando algumas passagens e acabava errando. Ele sempre terminava as atividades antes dos outros e, talvez, uma das causas dos erros desse aluno pode estar ligada à velocidade com a qual ele desenvolve suas atividades, não refletindo sobre a sua resolução.

Na última atividade da figura 5, da primeira para a segunda etapa e da segunda para a terceira não há erros. Da terceira para a quarta etapa, ele demorou um pouco para acertar a conta  $-12-8+6$ . E na última etapa, ele resolveu sem erros. Podemos perceber isso na resolução de outra equação (figura 6): novamente o aluno tenta “economizar passos”, erra a passagem e só consegue acertar quando faz passo a passo.

Figura 6: Parte da resolução da equação  $9 = 3(x-1)$



Fonte: Cópia da tela Aplusix

Após conseguir chegar à etapa  $x = -\frac{12}{-3}$ , da figura 6, nos deparamos com outra dificuldade que já havia aparecido em outras atividades: dificuldade em fazer contas de divisão. Na figura 6, aparece parte da estratégia usada pelo aluno para conseguir chegar ao resultado correto da divisão. De fato, para chegar ao resultado correto,  $x = 4$ , são feitas 11 tentativas:  $x = -4$ ;  $x = -1$ ;  $x = -2$ ;  $x = -3$ ;  $x = -4$ ;  $x = -5$ ;  $x = -6$ ;  $x = -7$ ;  $x = -8$ ;  $x = -9$ ;  $x = -0$  e finalmente  $x = 4$ .

## Um Estudo Sobre Erros em Álgebra Elementar

### Conclusões

Apesar de apresentar várias atividades e todas precisarem de propriedades semelhantes para serem resolvidas, cabe ressaltar que para analisar os esquemas de um sujeito em situação é preciso uma classe significativa de atividades semelhantes, pois os esquemas são a organização invariante da atividade para uma determinada classe de situações. A investigação dos erros por meio dos invariantes operatórios permite realizar a identificação e a análise dos erros. Ao analisar a frequência dos teoremas em ação falsos, pudemos inferir sobre sua estabilidade e verificar uma possível superação dos erros.

Para este artigo, tentamos focar em um tipo específico de equações do primeiro grau, mas não podemos deixar de perceber outras dificuldades que influenciam no processo de construção do conhecimento, como a dificuldade em trabalhar com frações ou em efetuar contas de divisão. Diante disso, surgem então algumas questões: Os alunos estão conseguindo desenvolver esquemas relacionados ao objetivo da ação (resolver equações)? Ao se trabalhar com o *Aplusix* os alunos estão desenvolvendo esquemas que os ajudam a entender o que é uma equação e como resolvê-la?

Acreditamos que o *Aplusix* está contribuindo para o processo de construção do conceito de equações, pois ele traz muito forte o sentido de igualdade e, com as retroações, os alunos têm a possibilidade de refletir sobre seus erros. Sem a retroação do *software*, o aluno possivelmente pararia na primeira tentativa, o que aumentaria significativamente a quantidade de erros. Com o *software*, diferentemente do papel e lápis, os alunos verificam a não equivalência e refletem sobre as suas atividades, modificando seus esquemas.

Ressaltamos que além de o *Aplusix* ajudar os alunos a desenvolverem esquemas para a resolução de equações, ele nos ajudou no estudo detalhado das atividades dos alunos. De fato, sem a ferramenta *videocassete* ficaria muito difícil analisar com detalhes a resolução das atividades, pois se visualizássemos somente a resposta final de cada atividade não perceberíamos os erros cometidos durante a resolução, uma vez que o aluno apagaria o que não desse certo e deixaria somente a resolução que levaria à resposta esperada.

## Um Estudo Sobre Erros em Álgebra Elementar

### Bibliografia

CURY, Helena Noronha. **Análise de Erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1ª ed. Curitiba: Editora CRV, 2009. p. 13–35.

COLEÇÃO SBEM

**Euclides Roxo e a Modernização do Ensino da Matemática no Brasil**  
R\$20,00 (Sócios)  
R\$ 30,00 (Não Sócios)

**Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental**  
R\$30,00 (Sócios)  
R\$ 40,00 (Não Sócios)

**Modelagem Matemática na Educação Brasileira**  
R\$30,00 (Sócios)  
R\$ 40,00 (Não Sócios)

**Avaliação e Educação Matemática**  
R\$20,00 (Sócios)  
R\$ 30,00 (Não Sócios)

**Educação Matemática no Ensino Superior**  
R\$30,00 (Sócios)  
R\$ 40,00 (Não Sócios)

**Reflexões sobre o Ensino de Matemática nos anos iniciais de Escolarização**  
R\$20,00 (Sócios)  
R\$ 30,00 (Não Sócios)

**Tecnologias e Educação Matemática**  
R\$30,00 (Sócios)  
R\$ 40,00 (Não Sócios)

Informações e vendas:  
[sbem@sbem.com.br](mailto:sbem@sbem.com.br)

Como adquirir:

- Escolha o(s) livro(s) de sua preferência
- Ao valor do livro acrescenta-se a taxa dos correios (a consultar).
- Para efetuar o pagamento faça depósito no Banco do Brasil Ag. 3603-X, C/C 42.000-X e nos envie uma cópia do comprovante via e-mail: [sbem@sbem.org.br](mailto:sbem@sbem.org.br) ou tel./fax (61) 33072562 ramal 146, juntamente com a descrição do pedido e seu endereço completo.