Sociedade Brasileira de Educação Matemática

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em *Revista*
ISSN 2317-904X

ENSINANDO ÁREAS E VOLUMES POR EQUICOMPOSIÇÃO

TEACHING OF AREAS AND VOLUMES BY EQUICOMPOSITION

Rudimar Luiz Nós[1]
Flavia Mescko Fernandes[2]

Resumo

Neste artigo, apresenta-se o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e o terceiro problema de Hilbert para analisar o cálculo de áreas e de volumes por meio da equicomposição. Pesquisou-se alguns livros didáticos de matemática, aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2015 e 2017 para avaliar o quanto a equicomposição de polígonos e de poliedros é explorada no cálculo de áreas e de volumes. Como resultado, observou-se que todos os autores das obras analisadas para o Ensino Fundamental – Anos Finais abordam a equicomposição no cálculo de áreas, o mesmo não ocorrendo no cálculo de volumes nas obras para o Ensino Médio. Sugere-se também atividades lúdico-manipulativas para o Ensino Fundamental – Anos Finais e para o Ensino Médio, explorando a equicomposição em duas e em três dimensões com o uso do tangram e do cubo-tangram.

Palavras-chave: Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. Terceiro Problema de Hilbert. Tangram. Cubo-tangram. Ensino de Matemática.

Abstract

We present in this work the Wallace-Bolyai-Gerwien theorem and Hilbert's third problem to analyze the calculation of areas and volumes by equicomposition. We have researched some math textbooks that were approved in the National Textbook Program (PNLD) in 2015 and 2017 to evaluate how much the equicomposition of polygons and polyhedra is explore in the calculation of areas and volumes. As a result, we observed that all the authors of the analyzed books to Middle School approach the equicomposition to calculate areas, but the same does not occurring to calculate volumes in the books to High School. We also suggest ludic-manipulative activities for Middle and High School by exploring the equicomposition in two and three dimensions using tangram and cube-tangram.

Keywords: Wallace-Bolyai-Gerwien Theorem. Hilbert's Third Problem. Tangram. Cube-tangram. Mathematics Teaching.

[1] Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade de São Paulo (USP); Professor Titular do Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná /UTFPR, Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: rudimarnos@utfpr.edu.br.

[2] Mestra em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR); Assessora Pedagógica na Editora Positivo, Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: flavia_m_f@yahoo.com.br.

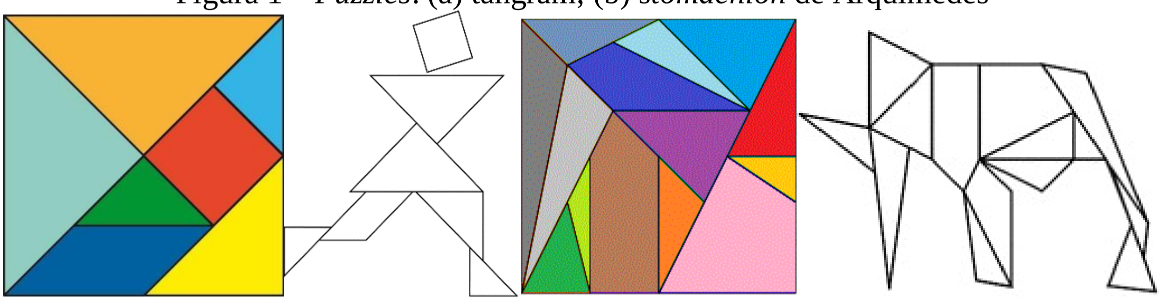
Introdução

O cálculo de áreas foi uma das necessidades mais antigas das civilizações. Talvez pelo fato do quadrado ser a figura mais simples, os antigos geômetras tentaram estudar a área de outras figuras, como a do círculo, por exemplo, relacionando-as com o quadrado. Assim, a expressão "quadratura" era empregada no sentido de se determinar um quadrado com área igual à área da figura em estudo. E, nesse processo, era preciso decompor a figura para recompô-la formando o quadrado. Sobre a quadratura, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta:

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2° grau. (BRASIL, 2017, p. 270)

Dois *puzzles* da antiguidade, o tangram e o *stomachion* de Arquimedes, ilustrados na Figura 1, são dois bons exemplos do processo de quadratura. *Puzzle* é uma palavra inglesa usada para designar um enigma ou quebra-cabeça. O tangram é um quebra-cabeça chinês de sete peças poligonais que compõem um quadrado; o s*tomachion* de Arquimedes é um quebra-cabeça constituído de catorze peças poligonais que também compõem um quadrado. Em ambos, o quociente entre a área de cada peça e a área do quadrado, constituído por todas as peças, é um número racional (FERNANDES, 2018; WOLFRAMMATHWORLD, 2018).

Figura 1 – *Puzzles*: (a) tangram; (b) s*tomachion* de Arquimedes



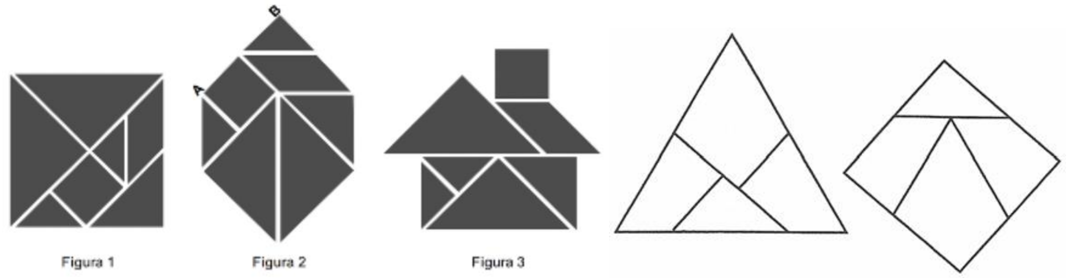
(a) (b)

Fonte: (a) Escolar (2015); (b) Wolframmathworld (2018).

As figuras formadas com todas as peças poligonais de cada um desses dois *puzzles* – Figura 1 – têm a mesma área e são equidecomponíveis, ou seja, têm a mesma decomposição. Essa relação pode ser generalizada, isto é, dois polígonos que têm a mesma área são sempre equidecomponíveis? Além disso, essa relação pode ser estendida para figuras tridimensionais, como os poliedros convexos? Para responder a estas perguntas, abordamos, na continuidade do texto, a equicomposição apresentando o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e o terceiro problema de Hilbert.

A equicomposição de polígonos e de poliedros é um tema pertinente à formação do professor de matemática da Educação Básica, uma vez que cabe a este educar, por meio da matemática, planejando de que maneira conceitos e relações importantes, tais como área e volume, por exemplo, devem ser apresentados e explorados em sala de aula. Além disso, a BNCC enfatiza o uso da equicomposição no plano e esta tem sido empregada em testes oficiais, como, por exemplo, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o vestibular da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), conforme imagens presentes no enunciado dessas provas – Figura 2.

Figura 2 – Equicomposição no plano em testes oficiais: (a) questão 21 do caderno amarelo do ENEM 2008; (b) questão 41 da prova de matemática do vestibular da UFRGS 2011



(a) (b)

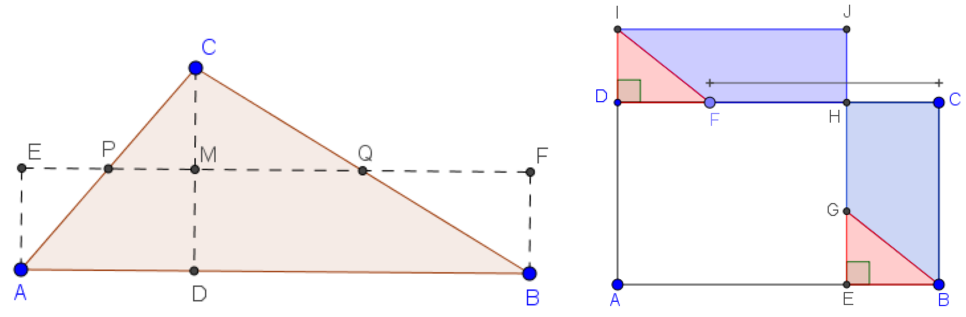
Fonte: (a) INEP (2008); (b) UFRGS (2011).

Equicomposição no plano

Souza (1973, p. 15) define figuras equidecomponíveis da seguinte forma: “Duas figuras são equidecomponíveis quando podem ser decomponíveis em partes respectivamente iguais”. Já Boltianski (1981, p. 9) afirma que duas figuras são equicompostas se, ao se cortar de certo modo uma delas em um número finito de partes, pode-se compor com estas partes a outra figura.

No rearranjo das peças provenientes da decomposição de uma figura, utilizamos duas isometrias no plano (LIMA, 2007): translações e rotações. A Figura 3(a) ilustra a equicomposição de um triângulo com um retângulo; a Figura 3(b) mostra a equicomposição de dois retângulos. Em ambos os casos, as figuras têm a mesma área e são equicompostas ou equidecomponíveis.

Figura 3 – Figuras equicompostas: (a) triângulo ABC e retângulo ABFE; (b) retângulo ABCD e retângulo AEJI



(a) (b)

Fonte: (a) Fernandes (2018, p. 50); (b) Fernandes (2018, p. 53).

O teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien estabelece que duas figuras planas que têm a mesma área, ou seja, equivalentes, são equidecomponíveis. Para prová-lo, precisamos utilizar a propriedade de transitividade da equicomposição (FERNANDES, 2018) e demonstrar o Teorema 1 e os Lemas 1, 2 e 3. Essas demonstrações podem ser encontradas em Boltianski (1996), Fernandes (2018), Hilbert (2003), Lima (2017) e Nós e Fernandes (2018).

Teorema 1. *Todo polígono de n lados, $n \geq 4$, pode ser decomposto em $(n-2)$ triângulos justapostos cujos vértices são vértices do polígono.*

Lema 1. *Todo triângulo é equicomposto a um retângulo.*

Lema 2. *Dois retângulos que têm áreas iguais são equicompostos.*

Lema 3. *Todo polígono é equicomposto a um retângulo.*

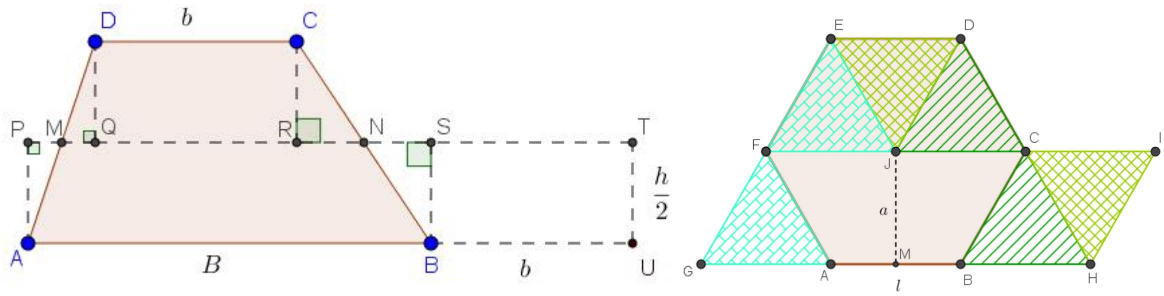
Teorema 2 (Wallace-Bolyai-Gerwien). *Dois polígonos que têm áreas iguais são equicompostos.*

Demonstração: Segundo o Lema 3, os dois polígonos são equicompostos a retângulos. Como estes retângulos têm a mesma área, pelo Lema 2 são equicompostos. Portanto, pela transitividade da equicomposição, os dois polígonos são equicompostos. □

O Teorema 2 foi demonstrado pelo matemático húngaro Farkas Wolfgang Bolyai (1775-1856) em 1832 e pelo matemático amador alemão Paul Gerwien em 1833. No entanto, o primeiro a publicar uma demonstração do teorema foi o matemático e astrônomo escocês William Wallace (1768-1843), em 1807.

No Ensino Fundamental – Anos Finais, podemos empregar a equicomposição para justificar, de forma manipulativa, a relação para o cálculo da área de um polígono convexo. Para tanto, devemos deduzir/justificar inicialmente a área do retângulo[3]. Ilustramos na Figura 4 as equicomposições que permitem deduzir as áreas do trapézio e do hexágono regular convexos a partir da área do retângulo.

Figura 4 – Equicomposições: (a) trapézio ABCD e retângulo APTU; (b) hexágono regular ABCDEF e paralelogramo GFIH



(a) (b)

Fonte: (a) Fernandes (2018, p. 68); (b) Fernandes (2018, p. 69).

O teorema de Pitágoras também pode ser enunciado e comprovado por equicomposição.

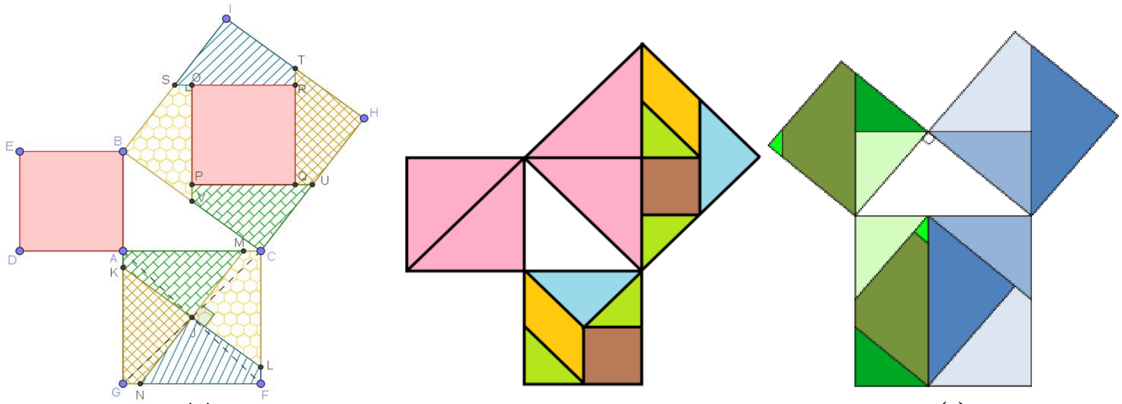
"*Dois quadrados são equidecomponíveis a um quadrado cuja área é igual à soma das áreas dos outros dois*''.

A Figura 5 ilustra três demonstrações manipulativas do teorema de Pitágoras empregando a equicomposição de quadrados. O professor e matemático americano Elisha Scott Loomis (1852-1940) era apaixonado pelo teorema de Pitágoras. No período de 1907 a 1927, ele colecionou demonstrações do teorema, agrupando-as em um livro denominado *The*

[3] Uma demonstração formal dessa relação é encontrada em Dolce e Pompeo (2013) e em Fernandes (2018).

Pythagorean Proposition (A proposição de Pitágoras). A primeira edição, publicada em 1927, continha 230 demonstrações; já a segunda edição, publicada em 1940, continha 370 demonstrações. Loomis (1968) classificou as demonstrações em dois grupos: no primeiro, as demonstrações algébricas; no segundo, as demonstrações geométricas. Dentre estas, há muitas demonstrações por equicomposição de quadrados.

Figura 5 – Demonstrações manipulativas do teorema de Pitágoras: (a) equicomposição de Perigal (Henry Perigal (1801-1898)); (b) equicomposição usando o tangram; (c) equicomposição usando o Lema 3



(a) (b) (c)

Fonte: (a) Fernandes (2018, p. 62); (b) López (2016); (c) Wikibooks (2017).

Equicomposição no espaço tridimensional

A equicomposição provada no Teorema 2 é extensível para poliedros, isto é, dois poliedros equivalentes (de mesmo volume) são equidecomponíveis? Esta pergunta está relacionada com o terceiro dos vinte e três problemas propostos por David Hilbert (1862-1943) em 1900, no segundo Congresso Internacional de Matemáticos em Paris. Vários matemáticos se empenharam no estudo da decomposição de poliedros. Foi Max Wilhelm Dehn (1878-1952), orientando de doutorado de Hilbert, quem forneceu a resposta negativa ao problema.

Teorema 3 *(Dehn). O tetraedro regular não é equicomposto por corte a um cubo*[4].

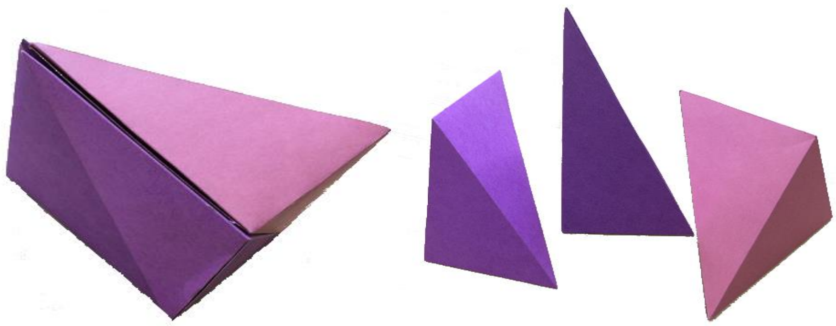
O Teorema 3 estabelece que não é possível provar, por exemplo, o volume de uma pirâmide convexa por equicomposição. Entretanto, um prisma triangular é decomponível em

[4] A demostração é encontrada em Conde (2003) e em Dias (2013).

três tetraedros equivalentes[5], como ilustra a Figura 6, propriedade esta que permite provar o volume da pirâmide convexa.

Dessa forma, o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, válido no plano, não é extensível para o espaço tridimensional. Mesmo assim, podemos empregá-lo para provar no Ensino Médio, de maneira manipulativa, o volume de alguns poliedros convexos, tais como prismas retos. Para tanto, devemos inicialmente deduzir/justificar o volume do paralelepípedo reto retângulo[6].

Figura 6 – Decomposição do prisma triangular em três tetraedros equivalentes



Fonte: Nós (2011).

Segundo Boltianski (1996, p. 46), dois poliedros são equicompostos se, ao se cortar de certo modo um deles em um número finito de partes, pode-se compor com estas partes o outro poliedro. Estes rearranjos ocorrem por meio de isometrias (LIMA, 2007) no espaço tridimensional, tais como rotações, translações e reflexões. Os poliedros equicompostos ou equidecomponíveis são equivalentes, ou seja, eles têm o mesmo volume.

Teorema 4. *Todo prisma reto é equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo.*

Demonstração: Seja P um prisma reto qualquer. Pelo Lema 3, a base poligonal do prisma P é equicomposta a um retângulo. Consideremos este retângulo como base de um paralelepípedo reto retângulo R cuja altura é congruente à altura de P. Como P e R têm

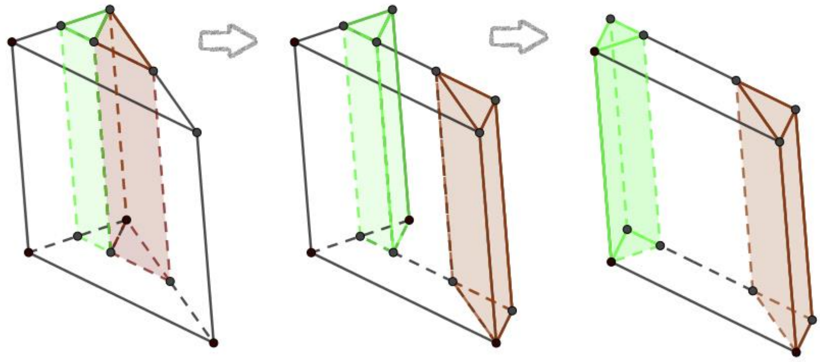
[5] A demonstração é encontrada em Dolce e Pompeo (2013) e em Fernandes (2018).

[6] Uma demonstração formal do volume do paralelepípedo reto retângulo é encontrada em Dolce e Pompeo (2013), em Fernandes (2018) e em Neto (2013).

alturas congruentes e bases equicompostas, temos, pelo princípio de Cavalieri[7], que P é equivalente a R. Assim, P e R são equidecomponíveis. □

A Figura 7 ilustra dois poliedros convexos, um prisma triangular reto e um paralelepípedo reto retângulo, equicompostos.

Figura 7 – Prisma triangular reto equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo



Fonte: Fernandes (2018, p. 78).

Equicomposição nos livros didáticos de matemática

Para verificar como a equicomposição é explorada nas aulas de matemática da Educação Básica, pesquisamos alguns livros didáticos de matemática aprovados no PNLD em 2015 e 2017. Na pesquisa, analisamos livros didáticos de matemática que abordam geometria dos seguintes autores: Bianchini (2015), Bigode (2015), Centurión e Jakubovic (2105), Gay (2014), Silveira (2015), Souza e Pataro (2015), Dante (2013) e Paiva (2013). Os seis primeiros são destinados ao Ensino Fundamental – Anos Finais, enquanto os dois últimos são para o Ensino Médio. Destacamos, a seguir, algumas de nossas observações na análise dessas obras. A análise completa encontra-se em Fernandes (2018).

Bianchini (2015), no livro para o sétimo ano do Ensino Fundamental, define figuras equivalentes após compor algumas figuras com três peças poligonais. Após a definição, propõe problemas para que o estudante identifique figuras equivalentes em malhas quadriculadas ou compostas por quadrados e triângulos, e também para que construa outros polígonos com a mesma área de um polígono dado. Além disso, o autor deduz a área do paralelogramo, compondo-o e decompondo-o a partir do retângulo, a área do triângulo a partir

[7] Uma descrição do princípio de Cavalieri é encontrada em Lima (2011) e em Fernandes (2018).

da decomposição do retângulo e as áreas do trapézio e do losango a partir da metade da área do paralelogramo.

Bigode (2015) aborda, no livro para o sexto ano do Ensino Fundamental, a equicomposição usando as peças do tangram. Contudo, ele não discute a ideia de equivalência de figuras.

Uma ação proposta por Centurión e Jakubovic (2015), para o sexto ano do Ensino Fundamental, é a partição de um retângulo por uma das diagonais, decompondo-o em dois triângulos cuja área é a metade da área do retângulo inicial. Esses triângulos são usados posteriormente para compor outros polígonos com a mesma área. A segunda etapa da atividade consiste na partição do retângulo inicial em quatro polígonos para compor com essas peças um triângulo, um trapézio e um paralelogramo. Os autores também sugerem atividades de decomposição e composição de polígonos de mesma área, sem mencionar o conceito de área e de figuras equivalentes.

Gay (2014) apresenta, no livro para o nono ano do Ensino Fundamental, a definição de figuras equidecomponíveis empregando malhas quadriculadas e o *stomachion* de Arquimedes (o nome não é citado) para decompor o pentágono em um quadrado. A autora deduz as áreas do paralelogramo e do triângulo a partir da área do retângulo, e as áreas do trapézio e do losango a partir da soma das áreas de dois triângulos de mesma altura. Nas orientações metodológicas, a autora apresenta, para o professor de matemática, todos os passos para a construção da solução dos problemas propostos aos estudantes, com as demonstrações de cada etapa.

Silveira (2015) define, no livro para o nono ano do Ensino Fundamental, figuras equivalentes utilizando o conceito de decomposição. Posteriormente, o autor apresenta atividades utilizando malhas quadriculadas e a comparação entre áreas. A área do triângulo é deduzida a partir do retângulo e a área do triângulo equilátero, a partir da área de um triângulo qualquer, usando o teorema de Pitágoras. As áreas do trapézio e do losango são definidas a partir da metade da área do paralelogramo.

Souza e Pataro (2015), no livro para o oitavo ano do Ensino Fundamental, trabalham a equivalência relacionando o paralelogramo com o retângulo e deduzem as áreas do trapézio e do losango a partir da metade da área do paralelogramo.

Paiva (2013), no livro para o segundo ano do Ensino Médio, inicia a seção sobre o volume de uma pirâmide demonstrando duas propriedades auxiliares. Posteriormente, demonstra o volume da pirâmide triangular a partir da decomposição do prisma de base triangular em três tetraedros equivalentes. Após essas etapas, o conceito de decomposição e equivalência é estendido para uma pirâmide de base qualquer. O autor também propõe ao estudante que construa um prisma triangular e seccione-o para comprovar a equivalência.

No livro para o segundo ano do Ensino Médio, Dante (2013) apresenta a mesma demostração para o volume da pirâmide utilizada por Paiva (2013); entretanto, ele emprega uma linguagem menos formal. O autor inicia discutindo propriedades de pirâmides equivalentes para, em seguida, deduzir o volume do tetraedro pela decomposição do prisma de base triangular em três tetraedros equivalentes. Nessa etapa, propõe um experimento para comprovar essa relação.

Atividades lúdico-manipulativas para a sala de aula

Para elaborar/organizar atividades didáticas sobre equicomposição, o professor de matemática da Educação Básica pode empregar jogos e a resolução de problemas como estratégias/metodologias de ensino e aprendizagem. O jogo tem seu papel no ensino como "provocador" da aprendizagem, possibilitando ao estudante a oportunidade de criar planos para solucionar problemas, determinar objetivos, executar jogadas e avaliar a eficácia das estratégias adotadas segundo os resultados obtidos. Diante de situações lúdicas, o estudante aprende a estrutura lógica da brincadeira e, concomitantemente, a sua estrutura matemática. Moura (1992, p. 47) afirma que:

> O jogo para ensinar matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar perfeitamente localizado no processo que leva a criança do conhecimento primeiro ao conhecimento elaborado.

Outra maneira de desafiar e instigar a curiosidade dos estudantes é trabalhar com a resolução de problemas. Segundo Polya (1995, p. V):

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas, há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais numa idade suscetível poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

Em *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*, Polya (1995) apresenta vários problemas em álgebra, geometria e teoria de números e discute como abordá-los em sala de aula. Contudo, alerta: “não basta, porém, compreender o problema, é preciso também querer a sua solução” (POLYA, 1995, p. 140).

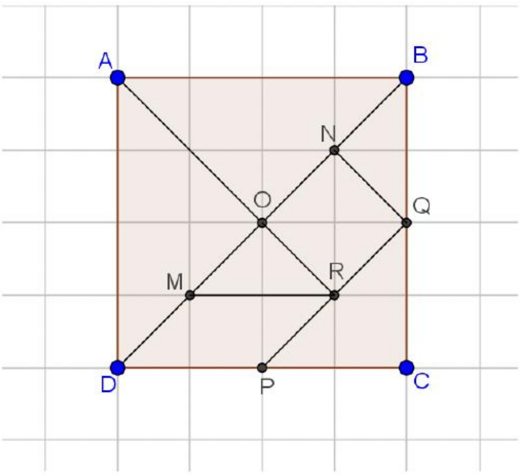
Dessa forma, o professor que espera incutir esse desejo nos estudantes deve planejar atividades nas quais eles possam exercitar a arte de resolver problemas. Assim, a habilidade de resolver problemas será desenvolvida com a prática, seguida das orientações e questionamentos rotineiros do professor, além daqueles que, com o passar do tempo, o próprio estudante fará, estabelecendo um roteiro que o auxiliará na resolução de novos problemas.

Apresentamos, a seguir, duas propostas de atividades sobre equicomposição que o professor de matemática da Educação Básica pode adaptar para usar em sala de aula.

Equicomposição no plano com o tangram

O tangram é um jogo chinês formado por sete peças, que são chamadas *tans*: 5 triângulos retângulos isósceles (2 grandes, 1 médio e 2 pequenos), 1 quadrado e 1 paralelogramo, com as quais podem ser formadas cerca de 5000 figuras equicompostas. Supõe-se que o tangram tenha origem chinesa e, embora existam muitas lendas sobre sua criação, a mais conhecida é a que atribui as formas do tangram a um espelho quebrado por um imperador chinês.

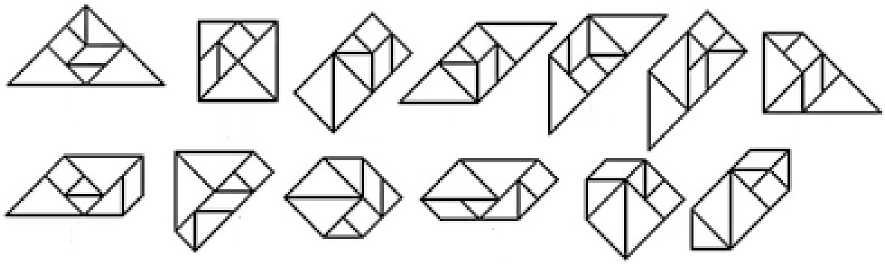
Figura 8 – Construção do tangram em uma malha quadriculada



Fonte: Fernandes (2018, p. 101).

- Etapa 1: construir o tangram em uma malha quadriculada, como na Figura 8.
- Etapa 2: a partir da Figura 8, determinar a fração correspondente a cada uma das sete peças do tangram e a área de cada uma das peças.
- Etapa 3: construir polígonos convexos utilizando 2, 3, 4, 5 e 6 peças do tangram, calculando e comparando o perímetro e a área deles.
- Etapa 4: construir polígonos convexos utilizando as sete peças do tangram, calculando e comparando o perímetro e a área deles. A Figura 9 ilustra algumas construções possíveis.

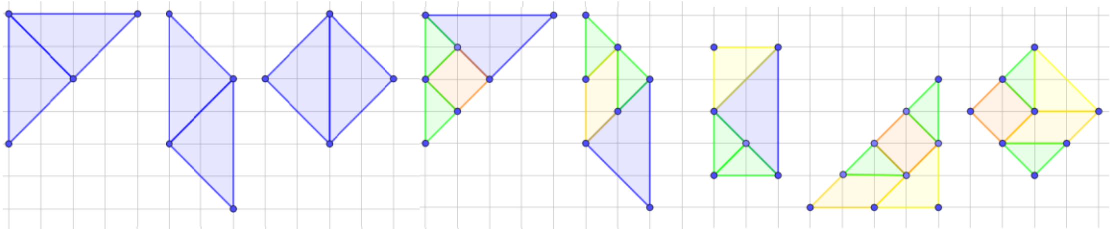
Figura 9 – Polígonos convexos equivalentes construídos com as sete peças do tangram



Fonte: Lopes (2009, p. 4).

- Etapa 5: construir com as peças do tangram polígonos convexos cuja área é a metade da área do quadrado composto pelas sete peças. Algumas soluções são apresentadas na Figura 10.

Figura 10 – Polígonos convexos equivalentes cuja área é a metade da área do tangram



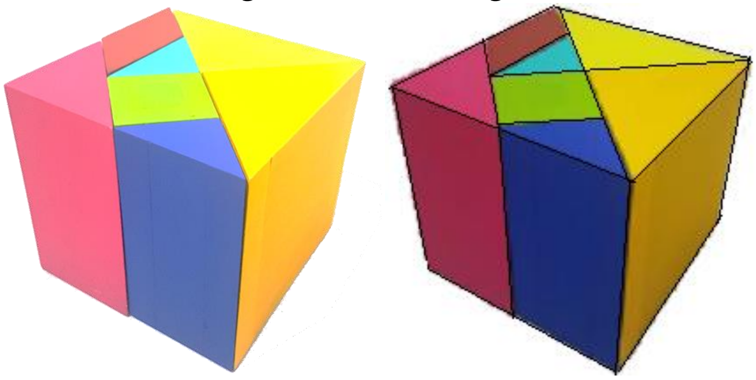
Fonte: Fernandes (2018, p. 113).

Ao acrescentarmos ou retirarmos questões da atividade, podemos trabalhar diversos conceitos matemáticos, como, por exemplo, frações e construções geométricas. Concomitantemente à atividade, o professor pode trabalhar o dominó de frações com o tangram (PORTELLA et al., 2005). O cálculo da área pode ser feito de duas maneiras: 1. preenchendo a superfície do polígono com os quadrados da malha quadriculada; 2. comparando a área de uma peça com a área da figura construída.

Equicomposição no espaço tridimensional com o cubo-tangram

O cubo-tangram é um cubo particionado em sete prismas retos cujas bases são as peças do tangram. A Figura 11 ilustra o cubo-tangram em uma versão proposta por Fernandes (2018).

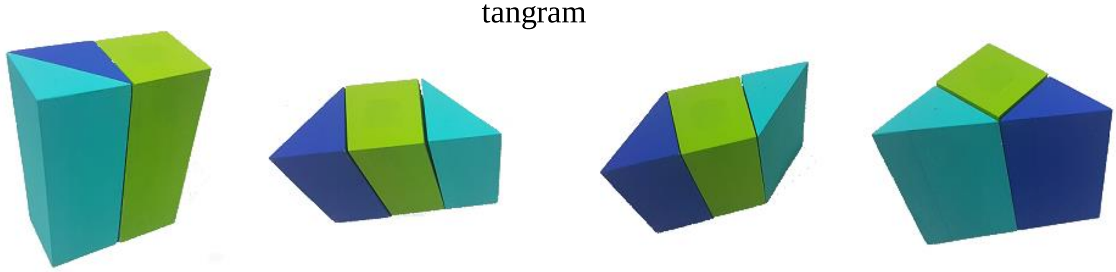
Figura 11 – Cubo-tangram



Fonte: Fernandes (2018, p. 105).

- Etapa 1: construir prismas convexos distintos empregando do cubo-tangram o prisma de base quadrada e os dois prismas cujas bases são os triângulos retângulos isósceles menores. A Figura 12 apresenta algumas soluções.

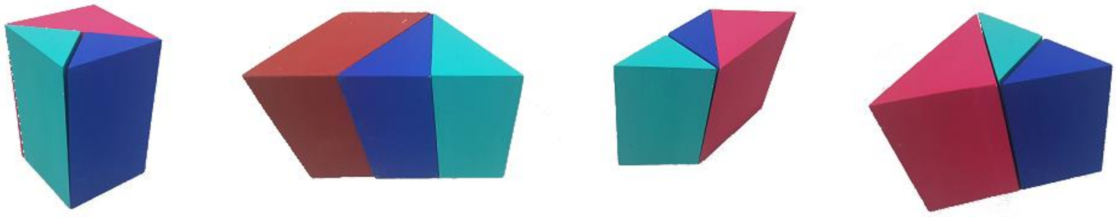
Figura 12 – Prismas convexos equivalentes construídos com três peças iguais do cubo-tangram



Fonte: Fernandes (2018, p.116).

- Etapa 2: construir prismas equivalentes aos construídos na etapa 1, substituindo apenas o prisma quadrangular por outra peça do cubo-tangram. Algumas soluções são ilustradas na Figura 13.

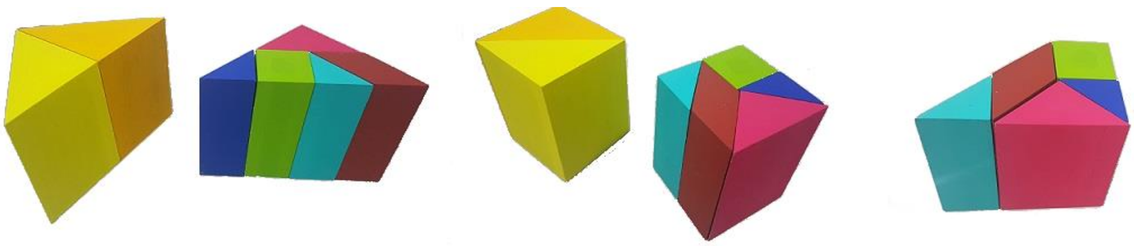
Figura 13 – Prismas convexos equivalentes construídos com três peças do cubo-tangram



Fonte: Fernandes (2018, p. 116).

- Etapa 3: calcular o volume de cada uma das peças do cubo-tangram, determinando a fração que representam do volume do cubo-tangram.
- Etapa 4: construir com as peças do cubo-tangram prismas convexos cujo volume é a metade do volume do cubo-tangram. A Figura 14 ilustra algumas soluções.

Figura 14 – Prismas convexos equivalentes cujo volume é a metade do volume do cubo-tangram



Fonte: Fernandes (2018, p. 116).

- Etapa 5: construir com as peças do cubo-tangram um prisma convexo cujo volume é $3/4$ do volume do cubo-tangram.

Nessa atividade, os conceitos de equicomposição, explorados em duas dimensões com o uso do tangram, são estendidos para três dimensões com o cubo-tangram. Materiais manipulativos são imprescindíveis para aprimorar as concepções geométricas espaciais. Há uma série de *puzzles* tridimensionais que o professor de matemática pode construir para empregar em sala de aula ao abordar a equicomposição em três dimensões e, consequentemente, aprimorar tanto a concepção espacial dos sólidos estudados quanto o conceito de volume.

Conclusões

Apresentamos, neste trabalho, o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e discutimos a extensão dele para o cálculo do volume de poliedros na Educação Básica. Em consonância com o que diz a BNCC sobre a equicomposição de polígonos, analisamos livros didáticos de matemática para a Educação Básica, aprovados no PNLD em 2015 e em 2017, para verificar como a equicomposição é apresentada aos estudantes. Verificamos que todos os autores das obras analisadas para o Ensino Fundamental – Anos Finais abordam a equicomposição e a utilizam para calcular a área de polígonos convexos, em uma abordagem pictórica ou mais formal, empregando malhas quadriculadas, materiais manipulativos e *puzzles*. O mesmo já não ocorre nas obras para o Ensino Médio. Nestas, a única decomposição presente é a do prisma triangular, empregada para comprovar o volume da pirâmide convexa.

É importante salientar que alguns autores dos livros didáticos aprovados no PNLD para o Ensino Fundamental – Anos Finais utilizam as ideias das demonstrações, que mencionamos neste artigo, para sugerir atividades, colocando o estudante em contato com conceitos mais elaborados. As demonstrações formais geralmente não são apresentadas, mas as estratégias utilizadas nelas são abordadas na solução das atividades propostas. Dessa forma, perguntamo-nos o quanto o professor de matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais tem utilizado/explorado o livro didático de matemática fornecido pelo governo federal no PNLD. Mais que isso, questionamo-nos sobre como o professor de matemática da Educação Básica planeja e trabalha em sala de aula os conceitos de área e de volume. Evidenciamos, neste trabalho, que há demonstrações manipulativas que substituem a simples apresentação das relações para o cálculo de áreas e de volumes. Construindo esses conceitos gradativamente, o professor contribui de maneira efetiva para a educação matemática dos estudantes.

Finalizando, acreditamos que este artigo pode ser útil aos professores de matemática da Educação Básica, servindo como estímulo/suporte para a organização e aplicação de atividades diferenciadas sobre áreas e volumes. E, principalmente, no sentido de valorizar a geometria como uma das unidades temáticas da matemática, como destaca a BNCC.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BIGODE, A. J. L. **Matemática do cotidiano**. São Paulo: Scipione, 2015.

BOLTIANSKI, V. G. **Figuras equivalentes y equicompuestas**. Moscou: MIR, 1981.

BRASIL - Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2017.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática nos dias de hoje:** na medida certa 6º ano. São Paulo: Leya, 2015.

CONDE, A. O terceiro problema de Hilbert. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 3, n. 5, p. 41–59. 2003.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2013.

DIAS, R. **Terceiro problema de Hilbert e teorema de Dehn.** São José do Rio Preto: Unesp, 2013.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria espacial. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

ESCOLAR, B. **Tangram**. 2015. Disponível em: <http://www.buscaescolar.com/artes/tangram/>. Acesso em: 01 nov. 2017.

FERNANDES, F. M. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis.** 2018. 116f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, 2018.

GAY, M. R. G. **Projeto araribá matemática**. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2014.

HILBERT, D. **Fundamentos da geometria.** Portugal: Gradiva, 2003.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS ANÍSIO TEIXEIRA. **Provas e gabaritos do ENEM**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 12 out. 2018.

LIMA, E. L. **Conceitos e controvérsias -** polígonos equidecomponíveis. 1985. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/11/5.htm>. Acesso em: 25 set. 2017.

LIMA, E. L. **Isometrias.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean proposition**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

LOPES, A. J. O perímetro do tangram e suas aplicações no desenho industrial. **Educação Matemática em Revista**, n. 26, p. 41-44. 2009.

LÓPEZ, J. L. **Chapuzas matemáticas:** Pitágoras y el tangram. 2016. Disponível em: <http://joselorlop.blogspot.com/2016/04/949-pitagoras-y-el-tangram-resolucion.html>. Acesso em: 18 nov. 2018.

MOURA, M. O. de. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. 1992. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf>. Acesso em: 03 jan. 2018.

NETO, A. C. M. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NÓS, R. L. **Acervo de material didático da disciplina geometria espacial**. UTFPR: Curitiba, 2011.

NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Equicomposição de polígonos e o cálculo de áreas. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 38, 2018, Campinas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2. São Carlos: SBMAC, 2018. p. 010272-1 – 010272-7.

PAIVA, M. **Matemática Paiva.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PORTELLA, M. F.; MORAIS, R. S. C.; ZAÚ, H. E. G. **Dominó das frações com o uso do tangram**. 2005. Disponível em: <http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/atividades/portaldoprofessor/pdf/DominoDasFracoesComTangram.pdf>. Acesso em: 07 set. 2017.

SILVEIRA, E. **Matemática, compreensão e prática.** 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.

SOUZA, J. C. de M. e. **As maravilhas da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: Bloch, 1973.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - COPERSE. **Baixar provas**. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/baixar-provas/Matemtica2011.pdf>. Acesso em: 12 out. 2018.

WIKIBOOKS. **Matematik for askurs 7-9/Geometri/Pythagoras sats**. Disponível em: <https://sv.wikibooks.org/wiki/Matematik_for_askurs_7-9/Geometri/Pythagoras_sats>. Acesso em: 03 nov. 2017.

WOLFRAMMATHWORLD. **Stomachion**. 2018. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/Stomachion.html>. Acesso em: 25 abr. 2018.

Recebido em: 17 de março de 2019.

Aprovado em: 03 de julho de 2019.