



ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR: UMA ANÁLISE DAS PESQUISAS DO GT04 DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TEACHING AND LEARNING LINEAR ALGEBRA: AN ANALYSIS OF STUDIES OF GT04 OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MATHEMATICAL EDUCATION

Gabriel Loureiro de Lima¹
Barbara Lutaif Bianchini²
Eloiza Gomes³

Resumo

Neste artigo, apresentam-se análises realizadas a partir de um mapeamento das principais produções do Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior (GT04), da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, referentes ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear (AL). Para as dez pesquisas analisadas, foram identificados: o objetivo, o conteúdo matemático, os sujeitos, a fundamentação teórica e a metodologia. Explicitaram-se ainda lacunas e indicações de reflexões ou sugestões para futuras investigações. Dentre as constatações obtidas, destacam-se: demanda por pesquisas relacionadas a conteúdos de AL normalmente trabalhados em cursos introdutórios, mas que não foram contemplados pelas pesquisas analisadas; núcleo e imagem de uma transformação linear, diagonalização de operadores e produto interno; a necessidade de inovações em disciplinas de AL ofertadas na modalidade a distância; e a importância de um diálogo mais estreito entre os professores de AL e aqueles de disciplinas específicas em cursos nos quais a Matemática está a serviço.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Ensino e Aprendizagem. GT04 da SBEM. Mapeamento.

Abstract

In this paper, we present analyses made based on a mapping of the main productions of the Work Group Mathematics in Higher Education (GT04), of the Brazilian Society of Mathematical Education, regarding the teaching and learning of Linear Algebra (LA). We identified the objective, mathematical content, participants, theoretical foundation and methodology of the ten studies analyzed. We also point out gaps and indications of reflections or suggestions of future investigations. Among the conclusions obtained, we highlight: search for studies related to contents of LA normally worked with in introductory courses, but which were not contemplated by the studies analyzed: kernel and image of a linear transformation, diagonalization of operators and internal product; the necessity of innovation in courses of LA taught at a distance; and the importance of a narrower dialogue among LA teachers and those of specific courses in which Mathematics is taught.

Keywords: Linear Algebra. Teaching and Learning. GT04 of SBEM. Mapping.

¹ Doutor em Educação Matemática; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUC-SP, São Paulo-SP, Brasil. E-mail: gllima@pucsp.br.

² Doutora em Educação (Psicologia da Educação); Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUC-SP, São Paulo-SP, Brasil. E-mail: barbara@pucsp.br.

³ Doutora em Educação Matemática; Instituto Mauá de Tecnologia/IMT, São Caetano do Sul-SP, Brasil. E-mail: eloiza@maua.br.

Introdução

Como integrantes do Grupo de Trabalho em Educação Matemática no Ensino Superior (GT04), criado em 2000, no âmbito da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e que visa desenvolver, discutir e divulgar pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Matemática neste nível educacional, percebemos a necessidade de realizar uma análise das principais pesquisas desenvolvidas desde a fundação do Grupo. Partimos da premissa de que estudos de revisão sistemática são relevantes para a área da Educação Matemática, uma vez que eles possibilitam evidenciar tendências, lacunas, temas mais explorados, menos explorados e, conseqüentemente, perspectivas para futuras investigações. Desta forma, optamos por analisar as principais produções do GT referentes a uma das temáticas tratadas pelos pesquisadores que o constituem: o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear (AL).

Como principais produções do GT, selecionamos aquelas presentes nos anais das sete edições já realizadas do SIPEM, os artigos relativos à temática, publicados nos livros Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates (FROTA; NASSER, 2009) e Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior (FROTA; BIANCHINI; CARVALHO, 2013) e, finalmente, os artigos presentes no volume 15, número 3, publicado em 2013, da revista Educação Matemática Pesquisa (EMP), do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PEPGEM) da PUC-SP, e os presentes no volume 37, número 2, publicado em 2017, da revista Vidya do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana. No Quadro 1, são apresentadas informações gerais sobre os dez textos que analisamos.

Do ponto de vista metodológico, realizamos um mapeamento das principais pesquisas do GT04 relativas ao ensino e à aprendizagem de AL. Assim como Fiorentini, Passos e Lima (2016, p. 18),

[...] entendemos o mapeamento da pesquisa como um processo sistemático de levantamento e descrição de informações acerca das pesquisas produzidas sobre um campo específico de estudo, abrangendo um determinado espaço (lugar) e período de tempo. Essas informações dizem respeito aos aspectos físicos dessa produção (descrevendo onde, quando e quantos estudos foram produzidos ao longo do período e quem foram os autores e participantes dessa produção), bem como aos seus aspectos teórico-metodológicos e temáticos. (FIORENTINI; PASSOS; LIMA, 2016, p. 18)

Neste artigo, não apresentamos todos os dados obtidos a partir deste mapeamento.

Identificamos para cada uma das pesquisas: o objetivo, o conteúdo matemático, os sujeitos, a fundamentação teórica e a metodologia. Finalmente, apresentamos lacunas e indicações de reflexões ou sugestões para futuras pesquisas.

Quadro 1 - Informações gerais sobre os textos analisados

Título	Autores	Local e ano de publicação
AL como curso de serviço para a computação	Rute Henrique da Silva	Anais do I SIPEM, 2000
Após um primeiro curso de AL, como o licenciado concebe um espaço vetorial	Silvia D. A. Machado e José Garcia Martins	Anais do II SIPEM, 2003
Análise do tratamento dado às transformações lineares em dois livros didáticos	Monica Karrer	Anais do II SIPEM, 2003
Os registros de representação semiótica nos livros didáticos de AL nas noções de independência linear	André Lúcio Grande e Barbara L. Bianchini	Anais do III SIPEM, 2006
Entendendo por que e como deve ser lecionada a disciplina AL em uma graduação de Engenharia Elétrica	Joelma Iamac Nomura e Barbara L. Bianchini	Anais do IV SIPEM, 2009
Noções básicas de AL: o que revelam as pesquisas do GPEA?	Barbara L. Bianchini e Silvia D. A. Machado	Anais do IV SIPEM, 2009
O papel do conceito imagem e conceito definição na constituição do objeto matemático autovalor e autovetor	Joelma Iamac Nomura e Barbara L. Bianchini	Anais do VI SIPEM, 2015
Análise de livros didáticos de AL, quanto às noções de dependência e independência linear, usando como referencial teórico os registros de representação semiótica	André Lúcio Grande e Barbara L. Bianchini	Livro: Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates, 2009
Concepção de base de um espaço vetorial real propiciada por um curso de AL em EaD	Barbara L. Bianchini e Silvia D. A. Machado	Livro: Marcas da Educação Matemática no ensino superior, 2013
Transformações Geométricas: um olhar para o processo de abstração	Michelle Andrade Klaiber, Mariany Layne de Souza, Daniele Peres da Silva, Angela Marta Pereira das Dores Savioli	Anais do VII SIPEM, 2018

Fonte: elaborado pelos autores.

Iniciamos, então, na próxima seção, a apresentação de alguns dos dados obtidos por meio do mapeamento realizado.

Objetivos, conteúdos matemáticos, metodologias e sujeitos das pesquisas

Por meio do Quadro 2, apresentamos quais os objetivos de cada uma das investigações

analisadas, os conteúdos matemáticos em foco, as metodologias empregadas e os sujeitos a quem os autores de cada um dos estudos direcionaram suas atenções.

Quadro 2 – Caracterização das pesquisas em termos de objetivos, conteúdos matemáticos, metodologias e sujeitos

Pesquisa	Objetivo	Conteúdo Matemático	Metodologia	Sujeitos
Silva (2000)	Projetar, executar e avaliar uma disciplina de AL que atendesse às expectativas do Departamento de Computação da Universidade Estadual Paulista	Não há um específico, mas todo o conteúdo normalmente trabalhado em uma disciplina de AL	Pesquisa-ação	Estudantes e professores de diferentes disciplinas do curso de Ciência da Computação
Martins e Machado (2003)	Identificar a concepção de espaço vetorial do futuro professor de Matemática, após este ter participado de um primeiro curso de AL	Espaço vetorial	Engenharia Didática	34 alunos de um curso de formação inicial de professores de Matemática que haviam cursado AL ao menos uma vez (11 do 3º ano e 23 do 4º ano)
Karrer (2003)	Analisar, em relação aos registros de representação semiótica, dois livros de AL, com foco nas transformações lineares	Transformações lineares	Análise de livros didáticos	Não há
Grande e Bianchini (2006; 2009)	Investigar, em dois livros didáticos de AL, quais são os registros de representação semiótica mais utilizados no estudo da noção de dependência linear e nas atividades propostas	Dependência linear	Análise de livros didáticos	Não há
Nomura e Bianchini (2009)	Apresentar elementos que evidenciem a necessidade de mudança no ensino tradicional da AL, respondendo à questão: Por que e como a disciplina deve ser ensinada em uma graduação em Engenharia Elétrica?	Não há um conteúdo específico	Pesquisa qualitativa, sem explicitar uma metodologia específica	1 professor de AL e 2 professores de disciplinas específicas de cursos de graduação em Engenharia Elétrica
Bianchini e Machado (2009)	Analisar os resultados das investigações desenvolvidas pelo Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) a respeito do ensino e da aprendizagem de noções básicas de AL, com ênfase especialmente na noção de base de um espaço vetorial	Diferentes conteúdos de AL são contemplados, mas a ênfase está em base de um espaço vetorial finitamente gerado	Pesquisa documental e diagnóstica	Não há

Pesquisa	Objetivo	Conteúdo Matemático	Metodologia	Sujeitos
	finitamente gerado			
Machado e Bianchini (2013)	Investigar a concepção de base de um espaço vetorial real construída por alunos que concluíram uma disciplina de AL em curso de formação inicial de professores de Matemática ofertado na modalidade a distância	Base de um espaço vetorial finitamente gerado	Estudo de caso	2 estudantes de um curso de licenciatura em Matemática ofertado na modalidade a distância
Nomura e Bianchini (2015)	Evidenciar o discurso de um estudante do último semestre de Engenharia Elétrica de uma instituição privada de ensino superior, destacando qual sua concepção quanto ao objeto matemático autovalor e autovetor	Autovalor e autovetor	Estudo de caso	1 estudante do último semestre de um curso de Engenharia Elétrica de uma instituição privada de ensino superior
Klaiber, Souza, Silva e Savioli (2018)	Trazer uma discussão e análise de indícios do Pensamento Matemática Avançado e do processo de abstração, manifestados por estudantes ingressantes de um curso de Licenciatura em Química durante a realização de uma tarefa envolvendo matrizes visando abordar Transformações Geométricas	Transformações Geométricas (especificamente reflexão em relação a retas, a origem e aos eixos coordenados)	Experiência de Ensino pautada na perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório	7 estudantes ingressantes de um curso de Licenciatura em Química

Fonte: elaborado pelos autores.

Os dados apresentados, por meio do Quadro 2, nos permitem observar a convergência, em termos de objetivos, de três pesquisas: Silva (2000), Nomura e Bianchini (2009; 2015). Essas investigações referem-se à necessidade de planejar, executar e avaliar a disciplina de AL de forma que ela esteja alinhada às especificidades e aos objetivos de cada curso no qual será ministrada. Ressaltamos, no entanto, a ausência de pesquisas direcionadas às reflexões a respeito de como deve ser estruturada a disciplina de AL em cursos de formação inicial de professores de Matemática. Também nos perguntamos, qual deveria ser o objetivo de se trabalhar com a AL nesses cursos? Quais contribuições tal conteúdo pode trazer para o futuro professor? Quais tipos de relações devem ser estabelecidos entre o que está sendo trabalhado na universidade e aquilo que posteriormente será abordado na sala de aula do ensino básico?

Embora não tenham como objetivos específicos responder a tais questionamentos, as pesquisas de Martins e Machado (2003) e Machado e Bianchini (2013) abordam a questão da

AL na formação inicial de professores de Matemática ao analisarem as concepções de futuros professores a respeito de espaço vetorial e de base de um espaço vetorial. A questão das concepções também se manifesta na pesquisa de Nomura e Bianchini (2015), na qual é analisado como um concluinte de um curso de Engenharia Elétrica concebe a noção de autovalor e autovetor. Ressaltamos que no *corpus* analisado, há pesquisas que têm por objetivo fazer emergir concepções de estudantes sobre tópicos de AL, mas não as de professores ou pesquisadores da área.

A respeito da pesquisa de Machado e Bianchini (2013), salientamos outro aspecto analisado: se as dificuldades de aprendizagem enfrentadas por futuros professores de Matemática em formação inicial em cursos presenciais permanecem ou são superadas por estudantes daqueles ofertados na modalidade a distância ou se existem outras não detectadas em cursos presenciais. A questão das especificidades do ensino e da aprendizagem de AL na modalidade a distância é, aliás, outra lacuna identificada e, conseqüentemente, um caminho a ser trilhado em futuras pesquisas, uma vez que, embora a EaD esteja em franca expansão atualmente, apenas uma investigação, dentre as pesquisadas, direciona sua atenção a essa modalidade de ensino.

A questão das representações é recorrente no *corpus* de análise em foco neste artigo. É explorada, sob a ótica dos registros de representações semiótica, na análise de livros didáticos, em relação às Transformações Lineares (KARRER, 2003) e à Dependência Linear (GRANDE; BIANCHINI, 2006; 2009). Embora tenha como objetivo discutir e analisar indícios do Pensamento Matemático Avançado, com atenção especialmente ao processo de abstração, manifestados por ingressantes em uma Licenciatura em Química ao realizarem uma tarefa visando abordar transformações geométricas, na pesquisa de Klaiber, Souza, Silva e Savioli (2018) a questão das representações também é enfatizada. As autoras realizam todas as suas análises a partir da representação matricial de uma transformação linear específica, a saber, a reflexão, considerando reflexões em relação: aos eixos coordenados, a uma reta e à origem.

Além disso, há uma pesquisa (BIANCHINI; MACHADO, 2009) que objetiva realizar uma síntese sobre as produções cuja temática é o ensino e a aprendizagem de AL de autoria de integrantes do GPEA. Segundo as autoras, as investigações realizadas por tal Grupo “sobre noções elementares de AL com ênfase na noção de base foram de cunho documental e diagnóstico e podem ser agrupadas em quatro modalidades: estado da arte, análise de livros didáticos, análise do papel da AL em diferentes cursos e análise de intervenções didáticas” (BIANCHINI; MACHADO, 2009, p. 4-5).

Quanto aos conteúdos matemáticos, estão contemplados: espaço vetorial (MARTINS; MACHADO, 2003), dependência linear (GRANDE; BIANCHINI, 2006; 2009), base de um espaço vetorial finitamente gerado (BIANCHINI; MACHADO, 2009; MACHADO; BIANCHINI, 2013), transformação linear (KARRER, 2003; KLAIBER; SOUZA; SILVA; SAVIOLI, 2018) e autovalor e autovetor (NOMURA; BIANCHINI, 2015). Dentre os conteúdos de AL normalmente trabalhados em cursos introdutórios, destacamos alguns que não foram contemplados: núcleo e imagem de uma transformação linear, diagonalização de operadores e produto interno.

No que se refere às metodologias, identificamos uma diversidade de métodos utilizados. Três pesquisas (KARRER, 2003; GRANDE; BIANCHINI, 2006; 2009) contemplam análises de livros. Duas investigações (MACHADO; BIANCHINI, 2013; NOMURA; BIANCHINI, 2015) caracterizam-se como estudo de caso. Silva (2000) realizou uma pesquisa-ação; Martins e Machado (2003) uma Engenharia Didática. Bianchini e Machado (2009) desenvolveram uma pesquisa documental e diagnóstica, enquanto Klaiber, Souza, Silva e Savioli (2018) realizaram, do ponto de vista metodológico, uma Experiência de Ensino pautada na perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório. Por fim, a investigação de Nomura e Bianchini (2009) caracteriza-se como pesquisa qualitativa, mas nenhuma metodologia é evidenciada; há apenas referências a procedimentos metodológicos.

Em relação aos sujeitos contemplados pelas pesquisas, observamos: estudantes e professores de diferentes disciplinas do curso de Ciência da Computação (SILVA, 2000), futuros professores de Matemática que já haviam cursado AL (MARTINS; MACHADO, 2003), professores de um curso de Engenharia Elétrica (NOMURA; BIANCHINI, 2009), um estudante do último semestre de um curso de Engenharia Elétrica (NOMURA; BIANCHINI, 2015), alunos de um curso de formação inicial de professores de Matemática na modalidade a distância (MACHADO; BIANCHINI, 2013) e ingressantes em um curso de Licenciatura em Química (KLAIBER; SOUZA; SILVA; SAVIOLI, 2018).

A partir desse levantamento, visando ampliar o escopo de compreensão em relação aos processos de ensino e de aprendizagem de AL nos diferentes contextos em que estes ocorrem, podemos perceber a necessidade de investigações contemplando outros sujeitos direta ou indiretamente relacionados a tais processos. Podemos destacar: (i) professores da Educação Básica, buscando apreender, por exemplo, como esses docentes mobilizam (ou não) os conhecimentos de AL construídos durante suas formações iniciais ou como compreendem as relações entre tais conhecimentos e aqueles que trabalham em suas aulas; (ii) pesquisadores da Educação Matemática, analisando, por exemplo, quais são as concepções a respeito da AL

daqueles que orientam investigações em relação aos processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos dessa área da Matemática; ou ainda, como os resultados de pesquisas, desenvolvidas ou não por eles, influenciam tais concepções; (iii) autores de livros didáticos de AL, tanto da Matemática, quanto da Educação Matemática (certamente suas perspectivas em relação aos processos de ensino e de aprendizagem são diferentes), com o objetivo de clarificar as visões relativas a aspectos didáticos e epistemológicos sobre a AL de profissionais que, como autores, indiretamente exercem influência no ensinar de uma ampla gama de professores e no aprender de uma significativa parcela de estudantes; (iv) alunos e professores de outros cursos, que não Ciência da Computação e Engenharia Elétrica, nos quais a AL está presente como disciplina de serviço; (v) mestrandos e doutorandos em Matemática ou em Educação Matemática, uma vez que é essencial conhecer a percepção daqueles que provavelmente lecionarão disciplinas matemáticas em cursos universitários; (vi) engenheiros que lecionam AL, uma vez que os pontos de vista desses profissionais, que não necessariamente foram preparados sob a ótica didático-pedagógica, em sua formação inicial, serão distintos daqueles dos educadores matemáticos; da mesma forma, suas visões mais pragmáticas em relação à Matemática também exercerão influências em suas práticas docentes.

Finalizadas as análises em relação aos objetivos, conteúdos matemáticos, metodologias e sujeitos de pesquisa, na próxima seção, apresentamos, de maneira detalhada, os referenciais teóricos adotados nos estudos analisados.

Referenciais teóricos dos trabalhos mapeados

Das dez pesquisas analisadas, três (KARRER, 2003; GRANDE; BIANCHINI, 2006; 2009) fundamentam-se na teoria dos Registros de Representação Semiótica de autoria de Duval, empregada para a análise de livros didáticos de AL. Segundo este referencial teórico, ao considerar um objeto matemático, é essencial analisar o papel das representações semióticas para acessá-lo. Karrer (2003), citando Duval (1995; 2000), afirma que não há aquisição conceitual de um objeto sem recorrer a sistemas semióticos, ou seja, as representações mentais e as representações semióticas são interdependentes. Grande e Bianchini (2009) destacam, fazendo referência a Duval (1995; 2000), que o registro de representação é uma maneira típica de representar um objeto matemático, um problema ou uma técnica. Além disso, também mencionando Duval (1995; 2000), ressaltam que a coordenação, articulação e as transformações de representações, em um mesmo registro ou

em registros diferentes, desempenham um papel fundamental nas atividades matemáticas. Quando transformamos as representações dentro de um mesmo registro, realizamos um *tratamento* e quando partimos de uma representação em um registro e obtemos uma representação em um registro diferente, fazemos uma *conversão* de representações.

Nas análises de livros didáticos, realizadas por Karrer (2003) e por Grande e Bianchini (2006; 2009), os autores mobilizaram a teoria dos Registros de Representação Semiótica, com o objetivo de identificar quais registros são mais empregados e que tipos de articulações são realizadas entre eles. Os tratamentos e conversões privilegiados na abordagem de algumas noções da disciplina foram evidenciados, tanto na apresentação da teoria, quanto nos exercícios propostos.

O referencial Pensamento Matemático Avançado (PMA) também é mobilizado em três das pesquisas analisadas. Silva (2000) recorre ao PMA (TALL; VINNER, 1981), “como posição epistemológica”, visando projetar, executar e avaliar a disciplina de AL voltada aos estudantes do curso de Ciência da Computação.

Tall (1992) ressalta que a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado exige algo difícil: uma mudança na maneira de trabalhar com os conceitos matemáticos, até então fortemente embasados na experiência, de maneira intuitiva, para uma abordagem na qual são caracterizados por definições formais e propriedades logicamente deduzidas. Tall (1992) salienta, fazendo referência à Cornu (1981), que as noções matemáticas não são mobilizadas apenas em consonância com sua definição formal, mas também por meio de representações mentais que podem diferir entre as pessoas e são elaboradas a partir de modelos espontâneos, preexistentes à aprendizagem da noção matemática e que se originam, por exemplo, na experiência cotidiana. Assim, a experiência dos alunos com conceitos matemáticos, antes de terem de trabalhar com suas definições formais, interfere na maneira como eles constroem representações mentais de tais conceitos.

Para clarificar tal inferência, Tall e Vinner (1981) introduziram os termos *conceito imagem* e *conceito definição*. Consideram *conceito imagem* como um sistema cognitivo total, o qual representa o conjunto de todas as imagens, propriedades e/ou processos que foram, na mente do indivíduo, alguma vez correlacionados ao conceito. Já por *conceito definição*, eles compreendem a definição verbal específica que elucida, de maneira precisa, um conceito. Convém salientar que, um estudante dominar apenas o *conceito definição*, não garante que este tenha compreendido o conceito em sua totalidade.

Nomura e Bianchini (2015) exploram essas ideias de conceitos imagem e conceito definição para evidenciar o discurso de um estudante do último semestre de Engenharia. As

autoras analisam o papel dos conceitos imagem e definição, apresentados pelo aluno ao discorrer sobre o objeto matemático autovalor e autovetor.

Klaiber, Souza, Silva e Savioli (2018) fundamentam sua investigação na abordagem de Dreyfus (2002) para os processos cognitivos associados ao desenvolvimento do PMA. As autoras enfocaram especialmente o processo de abstração que, nas palavras delas, fazendo referência à Dreyfus (2002), “necessita de dois pré-requisitos para ocorrer: os processos de generalização e de síntese” (KLAIBER; SOUZA; SILVA; SAVIOLI, 2018, p. 3). Para Dreyfus (2002, p. 35, apud KLAIBER; SOUZA; SILVA; SAVIOLI, 2018, p. 3), “generalizar é derivar ou induzir a partir de casos particulares, para identificar pontos em comum, para expandir domínios de validade”. Já a “síntese consiste na combinação ou composição de partes do conhecimento de forma a constituir um todo que, segundo Dreyfus (2002), muitas vezes equivale a mais do que a soma de suas partes” (KLAIBER; SOUZA; SILVA; SAVIOLI, 2018, p. 3).

A abstração, por exigir que o estudante desvie o olhar dos próprios objetos matemáticos e construa estruturas mentais a partir de propriedades e relações existentes entre eles, demanda um maior esforço cognitivo. É um processo que, segundo Klaiber, Souza, Silva e Savioli (2018, p. 4), possibilita que o estudante não apenas realize manipulações algébricas e aritméticas e utilize regras, mas que desenvolva habilidades para estabelecer “relações entre os conceitos que estão sendo trabalhados em uma determinada situação, assim como, realizar conexões com outros conceitos em diferentes contextos”. Em sua investigação, Klaiber, Souza, Silva e Savioli (2018), ao analisar as produções escritas de estudantes ingressantes em um curso de Licenciatura em Química relacionadas à resolução de uma tarefa envolvendo a representação matricial de transformações geométricas, mais especificamente reflexões, realizaram discussões e análises de indícios do processo de abstração evidenciados por tais estudantes.

Martins e Machado (2003) recorrem à teoria da Reificação, de Sfard (1992), de acordo com a qual o termo conceito “pode ser utilizado sob dois aspectos. O primeiro refere-se às concepções matemáticas de uma noção tal como concebida por matemáticos profissionais” (MARTINS; MACHADO, 2003, p. 2). Por outro lado, “o segundo aspecto relaciona-se às concepções desenvolvidas por estudantes em seu ambiente cultural, quando em um processo de aprendizagem” (MARTINS; MACHADO, 2003, p. 2).

Fazendo referência à Sfard (1992), Martins e Machado (2003) definem o que esta autora denomina de *concepção estrutural*, que é aquela construída com base em objetos abstratos, edificados por sua vez com a ajuda de outros objetos também abstratos. “Esta

concepção trata noções matemáticas como se elas se referissem a entidades semelhantes a objetos. Sua existência independe do homem, podendo ser manipuladas de acordo com certas regras” (MARTINS; MACHADO, 2003, p. 2-3). As autoras definem *concepções operacionais*, “que, ao contrário de serem descritas como uma relação estática definindo um objeto, a exemplo da estrutural, são construções dinâmicas e concebidas como um processo computacional, calculatório” (MARTINS; MACHADO, 2003, p. 3). É importante salientar que, para Sfard (1992), como citado em Martins e Machado (2003), as formas operacional e estrutural de pensar são complementares, ambas necessárias e mutuamente dependentes e não incompatíveis como poderia parecer à primeira vista. Como reforçam Martins e Machado (2003, p. 3), “a resolução efetiva de problemas é geralmente apoiada em alternâncias entre a abordagem operacional e a estrutural para conceitos abstratos”. Para Sfard (1992), segundo Martins e Machado (2003), analisando historicamente a construção de várias noções matemáticas, nota-se que, em geral, as concepções operacionais precedem as estruturais. Isso ocorre também no processo de aprendizagem da Matemática.

Nomura e Bianchini (2009), fazendo referência à Chevallard (1999), recorrem à Teoria Antropológica do Didático (TAD), cuja premissa é que “toda atividade humana regularmente realizada pode ser descrita como um modelo único, que se resume com a palavra praxeologia” (NOMURA; BIANCHINI, 2009, p. 3). Tal referencial teórico tem como principal objetivo o estudo das organizações praxeológicas didáticas, estruturadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas. Conforme ressaltam Nomura e Bianchini (2009, p. 4) citando Chevallard (1999), “a TAD situa a atividade matemática, e em consequência, a atividade do estudo em matemática, no conjunto de atividades humanas e de instituições sociais, inserindo a didática no campo da antropologia”. As instituições, segundo Nomura e Bianchini (2009) a partir de Chevallard (1996), podem ser uma escola, um curso, uma sala de aula, uma família, etc. E a cada instituição está associado um conjunto de objetos por ela reconhecidos. A noção de conhecimento na TAD é, segundo Nomura e Bianchini (2009, p. 4), a de que “conhecer um objeto é estabelecer uma relação da pessoa ou da instituição com esse objeto. Dessa forma, o objeto só existe porque é objeto de conhecimento”. Por meio da TAD, Nomura e Bianchini (2009) articularam as noções de objetos (conceitos elementares de AL e conceitos específicos de disciplinas da Engenharia Elétrica), pessoas (professores participantes da investigação) e instituições (as universidades).

Machado e Bianchini (2013) mobilizam a teoria APOS, citando Dubinsky e Macdonald (2001). Segundo essa teoria, a construção do conhecimento matemático é desenvolvida em etapas denominadas *ação, processo, objeto e esquema*, não necessariamente

sequenciais. Tal teoria foi desenvolvida visando considerar os processos mentais pelos quais novos conceitos abstratos são adquiridos. A *ação* é, segundo Machado e Bianchini (2013, p. 4), “uma transformação executada pelo indivíduo sobre um objeto matemático”. Um exemplo apresentado pelas autoras é o do aluno que, para verificar se um dado conjunto de vetores é linearmente independente, usa os termos da definição. O *processo* “caracteriza-se por uma construção interna que permite ao sujeito realizar uma ação não necessariamente conduzida por estímulos externos” (MACHADO; BIANCHINI, 2013, p. 4). Um exemplo citado pelas autoras é o aluno obter um conjunto gerador minimal de um dado espaço vetorial real. Segundo Machado e Bianchini (2013), o indivíduo que está consciente do processo (dinâmico) como uma totalidade, converte-o em um *objeto* (estático). “Um conjunto gerador de um espaço vetorial real constitui um exemplo de objeto da AL” (MACHADO; BIANCHINI, 2013, p.4). As autoras, fazendo referência à Asiala et al. (1996), ressaltam que um *esquema* é uma coleção de processos e objetivos organizada de maneira estruturada.

Finalmente, a investigação de Bianchini e Machado (2009) não recorre a uma fundamentação teórica específica, uma vez que o objetivo do trabalho é analisar as produções do GPEA referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de AL. Tal pesquisa nos possibilita perceber quais referenciais fundamentam as produções de tal Grupo. A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), como citam Bianchini e Machado (2009), é um referencial mobilizado para questões referentes aos aspectos cognitivos do sujeito. Os princípios da concretização, da necessidade e da possibilidade de generalização de Harel (2000), citados por Bianchini e Machado (2009), são considerados em algumas das pesquisas. Em relação ao *princípio da concretização*, para que o estudante abstraia uma estrutura matemática de um dado modelo, os elementos desse modelo devem, aos olhos dos estudantes, constituir entidades conceituais. Já o *princípio da necessidade* está relacionado ao fato de que “para que os estudantes aprendam, precisam sentir necessidade intelectual daquilo que se quer ensinar” (BIANCHINI; MACHADO, 2009, p. 4). Por sua vez, o *princípio da possibilidade de generalização* estabelece que “quando a instrução é concernente a um modelo ‘concreto’, um modelo que satisfaz o princípio da concretização, as atividades instrucionais devem permitir e encorajar a generalização de conceitos” (BIANCHINI; MACHADO, 2009, p. 4).

A noção de recursos-meta que podem se tornar alavancas-meta, conforme Robert e Robinet (1993), citados por Bianchini e Machado (2009), também é mobilizada nas produções do referido Grupo. Bianchini e Machado (2009, p. 2) afirmam que “*recurso-meta* é o mesmo que meta-matemática e se refere àquilo que se diz ou se escreve ao se dar informação sobre o

funcionamento da matemática e o uso de seus conceitos, isto é, quando se fala *sobre* a matemática, além do estritamente matemático”. As autoras ressaltam que:

um recurso-meta pode se tornar uma ‘alavanca’ para o aluno compreender uma noção matemática. Quando o recurso-meta é passível de se tornar uma ‘alavanca’ para a compreensão do conceito matemático visado, Robert e Robinet (1993) o denominam de *alavanca-meta*. (BIANCHINI; MACHADO, 2009, p. 3)

A seguir, encerramos nosso artigo apresentando algumas considerações que entendemos como pertinentes a partir do estudo realizado.

Considerações finais

A partir da análise das pesquisas que compuseram o *corpus* dessa investigação, podemos evidenciar aspectos a respeito dos quais os pesquisadores do GT04 julgam haver necessidade de maiores reflexões ou aprofundamentos. Tais aspectos, em nossa visão, indicam perspectivas para futuras pesquisas, produções de novos materiais didáticos ou intervenções em sala de aula às quais explicitamos a seguir.

Grande e Bianchini (2009) apontam que a noção de dependência linear poderia ser introduzida, inicialmente, explorando-se o registro de representação geométrico, segundo Duval (1995), e retomando aquilo que anteriormente foi estudado em Geometria Analítica, com ênfase nas propriedades geométricas dos vetores em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Como indicações para produção de novos livros ou materiais didáticos, os mesmos autores recomendam a inserção de atividades nas quais o registro da língua natural pudesse ser mais utilizado. Nestas atividades, o estudante poderia se expressar a respeito da Matemática, citando teoremas, propriedades para validar uma afirmação e construindo contraexemplos para refutá-la. Recomendam, ainda, a inclusão de mais exercícios que possibilitem as conversões de representações em diferentes registros.

Nomura e Bianchini (2009) sugerem que, para reestruturar a disciplina AL em cursos de serviço, é necessário que haja interação entre os professores de disciplinas matemáticas e aqueles das disciplinas específicas, de forma a valorizar a vinculação da AL com as áreas às quais ela está a serviço. As mesmas autoras, em pesquisa de 2015, sugerem que problemas semelhantes àquele por elas trabalhado em tal investigação, referentes às aplicações de autovalores e autovetores em situações extramatemáticas, poderiam ser enfocados com o objetivo de fazer emergir o conceito definição do objeto matemático autovalor e autovetor, na concepção de Tall e Vinner (1981). Entendemos que essa conclusão das autoras não se restringe a esses conceitos; aplica-se a todos os objetos de AL.

Por sua vez, Machado e Bianchini (2013) salientam a necessidade de inovações em disciplinas de AL ofertadas na modalidade a distância, tendo em conta as dificuldades apontadas pelas pesquisas produzidas na área. Para as autoras, é necessário buscar a criação de situações que permitam aos estudantes superar tais dificuldades e construir concepções objeto (TALL; VINNER, 1981) das noções elementares da disciplina. Além disso, é essencial, tanto na formação inicial, quanto na continuada de professores de Matemática, valorizar atividades que visem análises de respostas de estudantes reais ou fictícios, a questões relacionadas àquilo que está sendo estudado e também abordar tópicos com os quais os professores trabalharão (ou trabalham) na Educação Básica.

Concluimos esse texto ressaltando que o panorama que nos propusemos a apresentar se tornou ainda mais amplo do que havíamos imaginado pelo fato de, dentre as pesquisas analisadas, haver um mapeamento dos trabalhos realizados pelo GPEA que é o responsável pela maioria das investigações produzidas, no Brasil, relacionadas ao ensino e à aprendizagem de AL. Em razão desse engajamento do Grupo com o tema, os resultados apresentados por tal mapeamento trazem elementos para reflexões relativas a praticamente todas as temáticas e aspectos identificados nas nove pesquisas que analisamos.

Referências

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. Noções básicas de Álgebra Linear: o que revelam as pesquisas do GPEA? In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2009, Taguatinga – DF. **Anais...** Taguatinga-DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009, p. 01-15.

FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B; LIMA, R. C. R. (Orgs.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática**: período 2001 – 2012. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016.

FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (2009). (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Brasília-DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009.

FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas-SP: Papyrus, 2013.

GRANDE, A. L.; BIANCHINI, B. L. Os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear nas noções de independência linear. In: III SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2006, Águas de Lindóia-SP. **Anais...** Curitiba - PR: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2006, p. 01-15.

GRANDE, A. L.; BIANCHINI, B. L. Análise de livros didáticos de Álgebra Linear quanto às noções de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. **Educação Matemática: pesquisas e debates**. Brasília-DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009, p. 111-126.

KARRER, M. Análise do tratamento dado às transformações lineares em dois livros didáticos. In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2003, Santos-SP. **Anais...** Santos-SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2003, p. 65-66.

KLAIBER, M. A.; SOUZA, M. L.; SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Transformações Geométricas: um olhar para o processo de abstração. In: VII SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2018, Foz do Iguaçu-PR. **Anais...** Foz do Iguaçu-PR: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018, p. 01-12.

MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L. Concepção de base de um espaço vetorial real propiciada por um curso de Álgebra Linear em EaD. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas-SP: Papyrus, 2013, p. 143-163.

MARTINS, J.; MACHADO, S. Após um primeiro curso de Álgebra Linear, como o licenciado concebe um espaço vetorial. In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2003, Santos-SP... **Anais...** Santos-SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2003, p. 65.

NOMURA, J. I.; BIANCHINI, B. L. Entendendo por que e como deve ser lecionada a disciplina Álgebra Linear em uma graduação de Engenharia Elétrica. In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2009, Taguatinga – DF. **Anais...** Taguatinga-DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009, p. 01-18.

NOMURA, J. I.; BIANCHINI, B. L. O papel do conceito imagem e conceito definição na constituição do objeto matemático autovalor e autovetor. In: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2015, Pirenópolis – GO. **Anais...** Pirenópolis-GO: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2015, p. 01-12.

SILVA, R. H. Álgebra Linear como curso de serviço para a computação. In: I SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2000, Serra Negra – SP. **Anais...** Serra Negra-SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2000, p. 146-150.

TALL, D. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan, 1992, p. 495-511.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, 12, p. 151-157, 1981.

Recebido em: 18 de fevereiro de 2019.

Aprovado em: 19 de junho de 2019.