



Intervenções docentes em atividades de modelagem matemática: foco na matematização

Teacher interventions in mathematical modelling activities: focus on the mathematization

<https://doi.org/10.37001/emr.v26i72.1765>

Paulo Henrique Hideki Araki¹

Karina Alessandra Pessoa da Silva²

Marcele Tavares Mendes³

Resumo

Neste trabalho, ancorados em uma perspectiva de avaliação que tem a função primeira da regulação da aprendizagem, apresentamos uma discussão referente à avaliação e ao desenvolvimento de competências envolvidas no processo de matematização de uma atividade experimental investigativa em contexto de Modelagem Matemática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo, cujos dados empíricos foram obtidos a partir de uma atividade experimental investigativa desenvolvida com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola do norte do Paraná, que buscou identificar o calor liberado na combustão de alimentos diversos e a sua relação com algumas variáveis (massa de alimento, volume do frasco no interior do calorímetro, valor energético do alimento). A partir da análise e discussão dos dados pode-se inferir que as intervenções escritas do professor tornaram-se um meio de guiar e potencializar o processo de matematização dos alunos ao lidar com a atividade investigativa.

Palavras-chave: Educação Matemática. Intervenções docentes. Modelagem Matemática. Atividade experimental investigativa.

Abstract

In this work, anchored in a perspective of evaluation that has the first function of the regulation of learning, we present a discussion regarding the evaluation and development of competences involved in the process of mathematizing an experimental research activity in the context of Mathematical Modelling. This is a qualitative, interpretive research whose empirical data were obtained from an investigative experimental

¹ Doutorando em Educação para a Ciência e a Matemática, pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Maringá, PR, Brasil. E-mail: phh.araki@gmail.com

² Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Londrina e do Programa de Pósgraduação em Ensino de Matemática, *campi* Cornélio Procópio e Londrina. Londrina, PR, Brasil. E-mail: karinasilva@utfpr.edu.br

³ Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Londrina e do Programa de Pósgraduação em Ensino de Matemática, *campi* Cornélio Procópio e Londrina. Londrina, PR, Brasil. E-mail: marceletavares@utfpr.edu.br

activity developed with students of the 9th grade of the Fundamental Teaching of a school in the north of Paraná, that sought to identify the heat released in the combustion of various foods and its relation with some variables (food mass, volume of the bottle inside the calorimeter, energy value of the food). From the analysis and discussion of the data one can infer that the written interventions became a mean to guide and potentialize the process of mathematization of students dealing with the investigative activity.

Keywords: Mathematics Education. Teachers' interventions. Mathematical Modelling. Investigative Experimental Activity.

Introdução

As intervenções docentes presentes no decorrer de uma atividade pedagógica podem ser relacionadas com a ação de avaliar, exercendo influência sobre a forma como os alunos lidam com a construção do conhecimento, sobretudo dada a relação intrínseca entre avaliação e o ensino e a aprendizagem.

Para Santos (2008), diante de um contexto avaliativo em que se possui a regulação da aprendizagem como primeiro propósito, as intervenções docentes podem incidir: sobre a clarificação entre os objetivos de aprendizagem e as atividades utilizadas; sobre a explicitação/negociação dos critérios de avaliação; ou ainda sobre a sistematização, interpretação e tomada de consciência de suas produções na realização de uma dada atividade.

As intervenções realizadas pelo professor possibilitam a supervisão do processo de aprendizagem de seus alunos. A falta de um acompanhamento detalhado ao longo do ciclo escolar implica na perda de uma “oportunidade de compreender as habilidades já desenvolvidas pelos alunos ou a aprendizagem em cada etapa do processo de ensino” (CURY, 2005, p. 2).

Nessa direção, reconhecemos que as intervenções docentes planejadas, de natureza educativa, podem se constituir enquanto formas de promoção do processo de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática. Assim, emergiu o interesse por realizar um estudo comprometido com uma perspectiva de avaliação enquanto processo, mais inclusiva e que visa investigar a forma como estudantes desenvolvem e percebem os conteúdos estudados na disciplina de Matemática.

Para a condução desse estudo, recorreremos à perspectiva da Modelagem Matemática enquanto contexto para a avaliação da aprendizagem de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. A Modelagem⁴ possibilita ao aluno analisar fenômenos e situações reais à luz

⁴ Para fins textuais, utilizamos o termo Modelagem com o mesmo sentido que Modelagem Matemática.

da Matemática, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades que extrapolam o aspecto mecânico decorrente de seus algoritmos (DALTO; SILVA, 2018), favorecendo ao professor pôr-se enquanto sujeito que acompanha, guia e investiga a aprendizagem de seus alunos.

Nesse contexto, a avaliação pode se constituir enquanto uma prática de investigação, pois:

[...] se configura uma perspectiva de heterogeneidade, abrindo espaço para que o múltiplo e o desconhecido ganhem visibilidade. As respostas predeterminadas cedem lugar às respostas em constante construção, desconstrução e reconstrução, que passam a configurar o início de novos questionamentos, sejam elas certas ou erradas. As diferenças entre alunos são assumidas como peculiaridades que devem ser trabalhadas e incorporadas pelo movimento coletivo, deixando de ser compreendidas como deficiências que precisam ser corrigidas. O erro passa a representar um indício, entre muitos outros, do processo de construção de conhecimentos (ESTEBAN, 2004, p. 9).

Considerando essa possibilidade, de uma avaliação como prática de investigação que oportuniza a aprendizagem em atividades de modelagem matemática, debruçamo-nos em investigar a seguinte questão: *como as intervenções docentes influenciam o encaminhamento matemático de alunos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática?*

Diante do exposto, apresentamos nas seções seguintes nossa compreensão acerca da Modelagem e intervenções docentes, a metodologia que subsidia a constituição do corpus dessa pesquisa, a descrição e a análise de uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola situada no Paraná e trazemos algumas reflexões sobre a questão de investigação.

Modelagem Matemática e intervenções docentes

No campo da Educação Matemática existem diversas metodologias de ensino que podem ser empregadas com o intuito de se promover o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Em especial, pode-se destacar a Modelagem enquanto uma alternativa pedagógica a serviço do professor (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), possibilitando a investigação de situações-problema, geralmente originárias de um contexto extramatemático, à luz de conceitos e procedimentos matemáticos.

Assim, a Modelagem “tem em uma situação problemática a sua origem e tem como característica essencial a possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos

externos à Matemática” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15), na busca por uma solução para tal situação.

Dada essa possibilidade, de encontrar na Matemática uma possibilidade de definição de estratégias de ação de um sujeito frente a um problema, alguns autores têm voltado os seus olhares para a discussão de atividades de modelagem em contexto de aulas de Matemática (CARREIRA; BAIOA, 2011; CEOLIM; CALDEIRA, 2017; ARAKI, 2020; PEREIRA; DALTO; SILVA, 2020). Ao se considerar a introdução de atividades de modelagem em aulas de matemática, é preciso considerar que:

(a) a matemática usada pode não ser previamente escolhida ou definida, em vez disso, a matemática necessária emerge do problema e de suas especificidades; (b) diferentes percepções de uma situação confusa do mundo e diferentes critérios para o que constitui uma solução aceita podem surgir em qualquer situação (ALMEIDA, 2018, p. 19).

O processo de transição entre a linguagem natural da situação-problema e a linguagem matemática se caracteriza como matematização da situação-problema, constituindo um encaminhamento relevante do desenvolvimento de uma atividade de modelagem (NISS, 2010; STILLMAN et al., 2015; ALMEIDA, 2018). Para Almeida e Silva (2015), os conteúdos matemáticos emergentes podem ser utilizados pelos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem, em busca de se deduzir um modelo matemático⁵.

Nesse sentido, o sucesso de uma atividade de modelagem deriva da identificação dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos envolvidos, tornando a matematização o coração da Modelagem (POLLAK, 2012). Em alguns casos, para que tal identificação ocorra, torna-se necessário permeá-la por intervenções docentes. Entendemos que as intervenções são ações que podem “contribuir no tocante à compreensão dos mecanismos subjacentes à aprendizagem e à função do docente em um ambiente investigativo” (SILVA; VERTUAN, 2018, p. 502) Essas ações possibilitam a ressignificação de conhecimentos, estratégias e encaminhamentos e, ultimamente, implicando sobre a aprendizagem (PAZUCH; NEHRING, 2012).

No que diz respeito ao processo de ensino e de aprendizagem, diversas pesquisas apontam a intervenção docente, por meio de *feedback*, como um aspecto fundamental para a

⁵ Um modelo matemático consiste em “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

melhoria da aprendizagem por parte dos alunos (HYLAND, 1998, DUNCAN et al, 2013, BORGES et al, 2014). Para tanto, as intervenções precisam ser instrucionais e de qualidade, ou seja, serem formuladas, planejadas para fornecerem informações úteis sobre as etapas vencidas e as dificuldades encontradas, promovendo a existência de um verdadeiro diálogo entre professor e alunos (HADJI, 1994).

A formulação e o planejamento de intervenções instrucionais e de qualidade estão imbricados em prática avaliativa investigativa do professor, que diante da resposta dada pelo aluno questiona: “que conhecimentos e desconhecimentos estão presentes no erro ou no acerto; o que se anuncia como ainda não saber, indício da necessidade e da possibilidade de ampliação do conhecimento já consolidado?” (ESTEBAN, 2000, p. 11).

Mendes (2014) afirma que, ao se elaborar intervenções escritas, é preciso refletir se elas: são claras no sentido de refletir o que o professor realmente deseja e que o aluno as interprete; são coerentes com o nível de competência apresentado pelo aluno em sua produção escrita e ao mesmo tempo permitir que desenvolva novas competências; oferecem aos alunos segurança, assistência, *feedback* e promovem um “diálogo”; oportunizam ao aluno revelar o que sabe; refletir conteúdos que se deseja avaliar, ou que se deseja que o aluno desenvolva. É nesse contexto das intervenções escritas que empreendemos nossos esforços na investigação que relatamos.

Aspectos metodológicos

De modo a apresentarmos reflexões acerca de *como as intervenções docentes influenciam o encaminhamento matemático dos alunos em uma atividade de modelagem matemática*, descrevemos e discutimos os encaminhamentos de uma atividade desenvolvida por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola situada no município de São Sebastião da Amoreira (PR), na qual o primeiro autor atua enquanto professor da disciplina de Matemática.

Os dados que subsidiaram o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática foram obtidos com base na realização de um experimento investigativo. Tal escolha encontra-se embasada no fato de que as atividades experimentais investigativas contemplam uma possibilidade de visualização do fenômeno a ser investigado, oportunizando a “discussão de ideias, elaboração de hipóteses explicativas e experimentos para testá-las” (BASSOLI, 2014, p. 583). Ainda, segundo Carreira e Baioa (2011), o desenvolvimento de

experimentos com objetos reais correspondem a um tipo particular de modelagem, uma vez que:

- (1) Os alunos têm a oportunidade de aprender fazendo (enquanto executam manipulação e experimentação reais, se engajam em conjecturar e validar). (2) Trabalhar com materiais físicos concretos é uma maneira de investigar as propriedades matemáticas dos objetos. (3) Investigar por meio da experimentação reflete sobre ações mentais e sobre a aprendizagem subsequente de ideias matemáticas e se torna uma maneira de desenvolver compreensão de modelos matemáticos (CARREIRA; BAIOA, 2011, p. 214).

Assim, o professor da turma propôs o desenvolvimento de uma investigação ancorada na determinação experimental do valor energético de alimentos, na busca pela dedução de um modelo matemático que fosse capaz de evidenciar a quantidade de calorias presentes em determinada massa de alimento.

A turma investigada, composta por 15 alunos, foi dividida em quatro grupos, aos quais nos referimos ao longo do texto como *G1*, *G2*, *G3* e *G4*. As ações foram empreendidas ao longo de três dias – em aulas regulares ou extraclasse –, cada qual compreendendo um momento de desenvolvimento distinto que configuraram o desenvolvimento da atividade de modelagem. Os momentos extraclasse foram planejados com a escola e os alunos de forma que todos os integrantes dos grupos estivessem presentes e recebessem as mesmas orientações do professor. O Quadro 1 sintetiza os momentos de desenvolvimento da atividade, o espaço de realização, a duração e as respectivas ações empreendidas pelos alunos orientados pelo professor.

Quadro 1 – Ações empreendidas em cada momento do desenvolvimento da atividade

Momentos de desenvolvimento	Duração	Ações empreendidas
1 - aula regular da disciplina de Matemática, em sala de aula	1 aula (50 minutos)	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentação da situação a ser investigada e discussão acerca dos conhecimentos prévios dos estudantes por meio de um questionário. • Formalização de conceitos necessários para a realização da atividade.
2 - extraclasse, no laboratório de Ciências da escola	4 horas	<ul style="list-style-type: none"> • Construção de um calorímetro, utilizando materiais de fácil acesso, como caixa de leite e prendedor de roupas. • Desenvolvimento da atividade experimental investigativa com coleta de dados empíricos a respeito da energia liberada por amostras de diferentes alimentos (salgadinho, biscoito doce, amendoim e torrada). • Escolha da situação-problema, elegendo um dos alimentos para ser investigado – o amendoim.
3 - extraclasse, em sala de aula	4 horas	<ul style="list-style-type: none"> • Dedução do modelo matemático. • Análise e validação do resultado obtido a partir da comparação com os valores dispostos na tabela de informações nutricionais.

Nossas análises se concentraram sobre o terceiro momento de desenvolvimento da atividade, no qual a matematização se fez presente. Para tanto, foi entregue a cada grupo um roteiro para que os mesmos pudessem elencar as hipóteses, as variáveis consideradas na situação e os procedimentos utilizados para a dedução do modelo matemático que respondesse à situação inicial investigada.

Ao concluírem o preenchimento dos roteiros, os grupos os devolviam ao professor, para que pudessem ser avaliadas que, por sua vez, fazia intervenções escritas acerca das respostas dos grupos, recorrendo a uma caneta de cor vermelha. Em seguida, os roteiros eram devolvidos aos grupos para que os mesmos pudessem refletir acerca do *feedback* tecido pelo professor, percorrendo um ciclo de resposta-*feedback*-reflexão.

Os dados que compuseram o corpus de nossa análise foram obtidos por meio de registros escritos dos grupos nos quais as intervenções escritas foram empreendidas, gravações em vídeo e áudio e fotografias. Para a coleta de dados foi solicitado o consentimento dos pais dos alunos, mediante preenchimento de um termo de consentimento livre esclarecido, bem como da equipe diretiva da escola. De um ponto de vista metodológico, trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo na qual os investigadores “estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

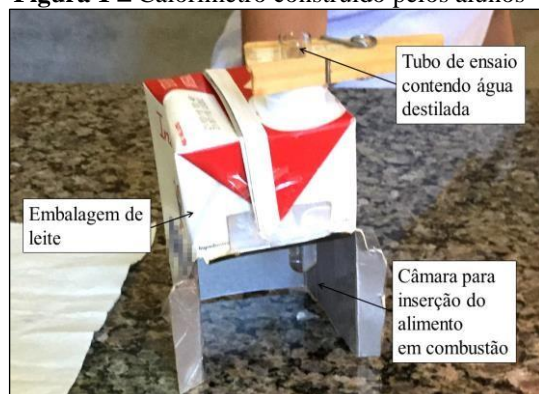
Descrição e análise da atividade de modelagem matemática *Valor energético de alimentos*

Para o desenvolvimento da atividade, o professor propôs a construção de um calorímetro (Figura 1), utilizado pelos grupos para a identificação do valor energético de amostras de quatro alimentos – salgadinho, biscoito doce, amendoim e torrada – cujas massas eram previamente aferidas.

Com o auxílio de uma vela acesa, as amostras de alimentos eram submetidas à combustão e prontamente inseridas no interior do calorímetro, de modo que a chama proveniente pudesse aquecer um tubo de ensaio contendo 5 mL de água destilada, cuja temperatura inicial era aferida com antecedência. Ao término de cada reação, demarcada pela

extinção da chama, a temperatura da água era novamente aferida, encontrando a variação de temperatura. A Figura 2 apresenta os dados obtidos pelo G1 no decorrer do experimento.

Figura 1 – Calorímetro construído pelos alunos



Fonte: Arquivo do professor.

Figura 2 – Dados coletados pelo grupo G1

Alimento	Massa do alimento (g)	Temperatura inicial (°C)	Temperatura final (°C)	ΔT (°C)	Massa de água (g)
Alimento 1	0,27	26	55	29	5
Alimento 2	0,87	26	91	65	5
Alimento 3	0,42	26	98	72	5
Alimento 4	0,39	27	62	35	5

Fonte: Relatório dos alunos.

Com base nos dados obtidos experimentalmente, no terceiro momento de desenvolvimento da atividade os grupos deveriam deduzir um modelo matemático que pudesse apresentar uma solução para a situação-problema: “*Quantas calorias existem em 15 gramas de amendoim?*”. O amendoim foi o alimento que, na combustão, forneceu a maior variação de temperatura da água destilada no interior do tubo de ensaio. A massa de amendoim considerada levou em conta a porção apresentada na tabela de informações nutricionais presente em sua embalagem e possibilitando, assim, a validação dos resultados obtidos pelos grupos por comparação.

Ao analisarmos os encaminhamentos de cada grupo, evidenciamos que as estratégias utilizadas encontravam-se ancoradas no conceito de caloria, formalizado anteriormente no decorrer do primeiro momento de desenvolvimento da atividade. Uma vez que cada grupo, para a dedução do modelo matemático, levou em consideração os respectivos valores experimentais encontrados, as intervenções realizadas pelo professor tiveram um aspecto pontual, atendendo às suas particularidades.

O grupo G1 procedeu de modo a identificar a quantidade de calorias presentes na amostra de 0,42 g de amendoim (massa utilizada pelo grupo no experimento), com base na variação de temperatura observada no experimento. A Figura 3 apresenta os procedimentos feitos pelo grupo, na tentativa de se responder à situação-problema.

Inicialmente, evidenciamos que G1, buscando identificar a variação de temperatura para 1 mL de água destilada, considerou que as variáveis da situação se constituíam enquanto grandezas diretamente proporcionais. Assim, a primeira intervenção proposta pelo professor

(O que acontece com a temperatura se reduzirmos o volume?) buscou identificar a forma como os alunos relacionavam as grandezas presentes na situação.

Figura 3 – Dedução do modelo matemático apresentado pelo grupo G1 com intervenções docentes

Definição de um modelo matemático:

$1 \text{ cal} = 1^\circ\text{C por ml}$
 $5 \text{ ml} \begin{array}{l} \text{--- } 72^\circ\text{C} \\ \text{--- } \Delta T \end{array}$
 $1 \text{ ml} \text{--- } \Delta T$
 $5 \cdot \Delta T = 1 \cdot 72$
 $\Delta T = \frac{72}{5}$
 $\Delta T = 14,4$

- O QUE ACONTECE COM A TEMPERATURA SE REDUZIRMOS O VOLUME? (1)

A temperatura aumenta. São inversamente proporcionais

$5 \text{ ml} \text{--- } 72$
 $1 \text{ ml} \text{--- } x$
 $1 \cdot x = 5 \cdot 72$
 $x = 360 \cdot \text{cal em } 0,42 \text{ g}$

$0,42 \text{ g} \text{--- } 360 \text{ cal}$
 $m \text{--- } c$
 $0,42c = 360m$
 $c = \frac{360m}{0,42}$

- REFAÇA OS CÁLCULOS UTILIZANDO OS CONCEITOS DE PROPORCIONALIDADE INVERSA (2)

Fonte: Relatório dos alunos.

A partir dessa intervenção, o grupo parece compreender que a temperatura da água e o volume representam grandezas inversamente proporcionais, indicando que o encaminhamento feito anteriormente estaria incorreto. Deste modo, a partir da segunda intervenção, realizada após o professor apreciar a resposta da intervenção (1), (*Refaça os cálculos utilizando o conceito de proporcionalidade inversa*), o grupo corrigiu os cálculos, obtendo como modelo matemático a expressão $c = 360 \frac{m}{0,42}$, em que c (em calorias) representa

$$0,42$$

a caloria em função da massa m (em gramas) do amendoim.

Nesta ação, percebemos que as intervenções realizadas pelo professor atingiram o seu objetivo, contribuindo para a ressignificação das estratégias e dos encaminhamentos feitos pelos alunos (PAZUCH; NEHRING, 2012), a partir da reflexão acerca da matematização originária da situação vivenciada experimentalmente.

De maneira análoga, o modelo matemático deduzido pelo grupo G2 também considerou o conceito de proporcionalidade existente entre a quantidade de calorias e a massa de amendoim, conforme indicado na Figura 4.

Ao perceber que o grupo aparentemente havia definido um modelo matemático satisfatório para a situação ($\text{Caloria} = 910,256 \cdot \text{massa}$), as intervenções focaram na explicitação do raciocínio matemático mobilizado pelo grupo. Para Bezerra e Gontijo (2017, p. 275), os *feedbacks* dados aos alunos “podem e devem evoluir dos costumeiros certos e

errados ou afirmações imperativas”, de modo a permitir que os mesmos possam refletir acerca de suas produções.

Figura 4 – Dedução do modelo matemático apresentado pelo grupo G2 com intervenções docentes

Definição de um modelo matemático:
1 cal = 1°C por ml
Em 5 ml = 5 cal
Caloria = $\frac{5 \cdot 71 \cdot \text{massa}}{0,39}$
Caloria = $\frac{355 \cdot \text{massa}}{0,39}$ 910, 256 · massa

- Explique o raciocínio ao elaborar o modelo matemático. (2)
1 caloria é o aumento que ocorre em 1ml, aumentando 1°C. Como o leite tinha 5ml, o aumento da temperatura aumenta 5 vezes.
Para a massa de 0,39, encontramos o valor. Em uma quantidade de 15g é se fazer $910,256 \times 15$.

- Se a CALORIA RELACIONA APENAS TEMPERATURA COM O VOLUME DE ÁGUA, O QUE SERIA A MASSA QUE VOCÊS COLOCARAM NA FÓRMULA? (1)
Não precisa acrescentar a massa. O valor encontrado serve apenas para o amendoim.

Fonte: Relatório dos alunos.

Na primeira intervenção (*Se a caloria relaciona apenas temperatura com o volume de água, o que seria a massa que vocês colocaram na fórmula?*), percebemos que o grupo pareceu não compreender o *feedback*, assinalando que o modelo somente seria válido para o amendoim. Nesse sentido, é preciso destacar que não há receitas de boas intervenções, elaborar intervenções é uma tarefa que exige muita reflexão e estudo, mesmo assim, com chances de ser uma intervenção precipitada ou inadequada ao que se deseja. Para Silva e Vertuan (2018, p. 505), realizar intervenções “não é tarefa simples, embora, inferimos que o modo como se dá essa intervenção influencia em certa medida os encaminhamentos de resolução tomados pelos alunos”.

A forma como o *feedback* foi dado, neste caso, pode não ter sido suficientemente claro para os alunos, culminando em uma resposta genérica. Bezerra e Gontijo (2017) argumentam que, ao recorrer a *feedbacks* de natureza escrita ou oral, cabe ao professor atentar-se à escolha das palavras, na clareza e na especificidade, buscando garantias para que o retorno esteja na direção esperada.

Diante disso, observando que o *feedback* não havia sido satisfatório, a segunda intervenção (*Explique o raciocínio ao elaborar o modelo matemático*) foi realizada de maneira específica e direta, solicitando que o grupo explicasse o raciocínio utilizado na

dedução do modelo. A partir da resposta obtida, percebemos que o grupo justificou as suas escolhas para a obtenção do modelo.

Neste caso, entendemos que as intervenções propostas pelo professor para o grupo não tiveram o intuito de correção, mas sim para evidenciar a forma como os alunos entendiam as relações existentes entre as grandezas, buscando compreender qual era o raciocínio envolvido na construção daquele modelo. Um professor em um contexto de avaliação como prática de investigação “indaga os resultados apresentados, os trajetos percorridos, as relações estabelecidas entre as pessoas, saberes, informações, fatos, contextos” (ESTEBAN, 2004, p. 11).

Por sua vez, o grupo G3 encontrou dificuldades na obtenção do modelo matemático que representasse a situação, ao passo que foi necessária uma intervenção direcionada a servir como ponto de partida para as discussões. A Figura 5 apresenta o encaminhamento proposto pelo grupo.

Figura 5 – Dedução do modelo matemático apresentado pelo grupo G3 com intervenções docentes

Definição de um modelo matemático:

- QUAL É A RELAÇÃO EXISTENTE ENTRE A MASSA DE AMENDOIM E A QUANTIDADE DE CALORIAS? (1)

Em 5ml = 72	0,31 g — 34,2 °C
1 ml = x	m — T
x · 5 = 1 · 72	T · 0,31 = m · 34,2
5x = 72	T = $\frac{34,2 \cdot m}{0,31}$
x = $\frac{72}{5}$ = 14,2 °C	

- O QUE ACONTECE COM A TEMPERATURA DA ÁGUA SE DIMINUÍRMOS O VOLUME? (2)

Se esquentar mais

Fonte: Relatório dos alunos.

Ao perceber que a dificuldades do grupo para a dedução do modelo matemático, foi realizada a primeira intervenção (*Qual é a relação existente entre a massa de amendoim e a quantidade de calorias?*), propondo ao grupo buscar identificar uma possível relação entre as variáveis do problema. Com isso, observamos que os alunos passaram a tratar a massa (m) de água e a temperatura (T) como sendo grandezas diretamente proporcionais, obtendo um modelo que não corresponderia à situação ($T = 14 \frac{34,2}{0,31} m$).

0,31

Visto isso, a segunda intervenção realizada pelo professor (*O que acontece com a temperatura da água se diminuirmos o volume?*) teve o intuito de redirecionar o raciocínio, buscando fazer com que o grupo percebesse se tratar de grandezas inversamente proporcionais. Apesar de o grupo parecer ter compreendido a relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas (*Isso esquentar mais*), devido ao limite de tempo estabelecido para a atividade, não foi possível concluir a atividade.

Ainda assim, podemos evidenciar que a intervenção escrita do professor teve potencial de flexibilizar as competências requeridas em uma questão (MENDES, 2014), na direção de oportunizar a evolução dos conhecimentos matemáticos.

Ao analisarmos os encaminhamentos de G4 também percebemos que, inicialmente, o grupo apresentou certa dificuldade em deduzir o modelo matemático, de modo que a relação estabelecida entre calor e massa ocorreu de maneira arbitrária, multiplicando o volume de água destilada pela variação de temperatura (Figura 6).

Figura 6 – Dedução do modelo matemático apresentado pelo grupo G4 com intervenções docentes

Definição de um modelo matemático:

$$\text{Calorias} = 5 \cdot 72 \cdot m$$

- ESCREVA UMA RELAÇÃO ENTRE A TEMPERATURA ATINGIDA PELA ÁGUA E O VOLUME DE ÁGUA. (1)

$$\begin{array}{r} 96 \text{ } \Delta 5 \text{ ml} \\ \times \Delta 1 \text{ ml} \\ \hline 5 \cdot x = 96 \cdot 1 \\ x = \frac{96}{5} = 19,2^\circ \text{C} \end{array}$$

- MAS, O QUE OCORRE QUANDO O VOLUME DO VIDRO É REDUZIDO? (2)

A Temperatura diminui.

- IMAGINE QUE VOCÊ QUEIRA ESQUENTAR ÁGUA NO FOGÃO. VOCÊ PODE UTILIZAR UMA CANECA DE 200 mL E UMA PANELA DE 3L. QUAL ESQUENTARÁ PRIMEIRO, CONSIDERANDO QUE AMBAS SERÃO PREENCHIDAS ATÉ O COMPLETO? (3)

Fonte: Relatório dos alunos.

Ao evidenciar que o modelo deduzido pelo grupo ($\text{Calorias} = 5 \cdot 72 \cdot m$) não era adequado, o professor fez a primeira intervenção (*Escreva uma relação entre a temperatura atingida pela água e o volume de água*), com o intuito de que o grupo percebesse a relação presente entre o volume de água e a sua temperatura no decorrer do experimento.

Tal como no grupo anterior, a intervenção deu origem a uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis da situação. Sendo assim, foi realizada uma

segunda intervenção (*Mas, o que ocorre quando o volume no vidro é reduzido?*), para que o grupo refletisse acerca do comportamento das variáveis mediante sua variação. Todavia, tal intervenção não demonstrou ser suficiente, à medida que o grupo continuava estabelecendo uma relação diretamente proporcional entre as grandezas.

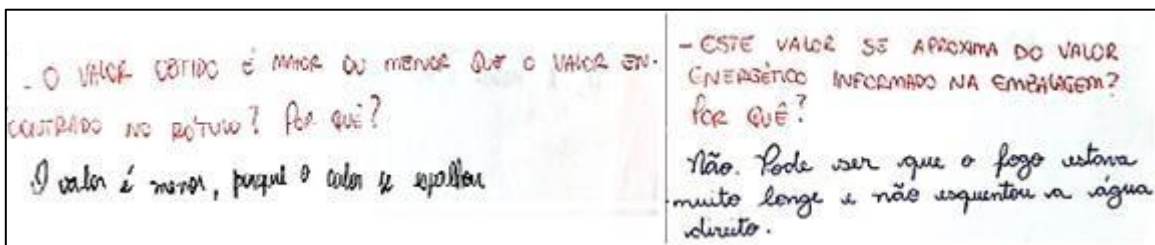
Portanto, tornou-se necessária a proposição de uma terceira intervenção (*Imagine que você queira esquentar água no fogão. Você pode utilizar uma caneca de 500 mL ou uma panela de 3 L. Qual esquentará primeiro, considerando que ambas serão preenchidas por completo?*), contextualizando o fenômeno observado experimentalmente e solicitando que o grupo pensasse acerca de um cenário hipotético que pudesse auxiliar no estabelecimento de uma representação mental. Ao término do tempo, percebemos que o grupo G4 não obteve sucesso na determinação do modelo matemático.

Ao analisarmos a forma como as intervenções nesses últimos dois grupos foram realizadas, percebemos que em ambos ocorreram em momentos críticos da atividade. Segundo Lopes Júnior e Buranello (2017), tais mediações dispostas pelo professor são necessárias e relevantes para a manifestação dos processos cognitivos relevantes para o desenvolvimento e mobilização das aprendizagens esperadas. Para esses autores, o imediatismo de tais intervenções encontra-se fundamentado na identificação de “insuficiências inicialmente constatadas nas interações” dos alunos (LOPES JÚNIOR; BURANELLO, 2017, p. 191).

Logo, diante de uma dificuldade de sistematização de ideias, a intervenção do professor se propõe a explorar os conhecimentos matemáticos construídos ao longo da vida escolar de modo que, de maneira progressiva e processual, os alunos sejam capazes de manifestar as aprendizagens requeridas.

Retornando à situação-problema analisada (*Quantas calorias existem em 15 gramas de amendoim?*), recorrendo aos modelos matemáticos deduzidos, os grupos G1 e G2 encontraram como solução 12.857 e 13.653,84 calorias, respectivamente. Buscando analisar a qualidade do modelo matemático, as intervenções propostas pelo professor para ambos os grupos (*O valor obtido é maior ou menor que o valor encontrado no rótulo? Por quê?/Este valor se aproxima do valor energético informado na embalagem? Por quê?*) tiveram como intuito a reflexão acerca do resultado obtido, com o intuito de validá-lo, conforme observado na Figura 7.

Figura 7: Intervenções destinadas à validação dos resultados dos grupos G1 (esquerda) e G2 (direita)



Fonte: Relatório dos alunos.

Podemos perceber que ambos os grupos apresentaram justificativas plausíveis para a discrepância observada nos resultados obtidos pelo modelo matemático, em comparação com os valores dispostos na tabela de valores nutricionais para a mesma porção (61,4 kcal). Até certa extensão, podemos evidenciar a ocorrência de uma “realidade isolada e individualizada” (D’AMBROSIO, 2015, p. 43) para o fenômeno em específico, ou seja, uma realidade que leva em consideração o modelo de calorímetro construído e a forma como os experimentos foram conduzidos.

Apesar de dois grupos não terem concluído a atividade no tempo previsto, as intervenções docentes exerceram um papel fundamental na etapa de matematização. Além disso, conforme apontam Trevisan, Rocha e Domingues (2017), a oferta de *feedbacks* no decorrer da atividade permitiu aos estudantes o envolvimento direto com as questões propostas, atuando como agentes ativos na construção e mobilização dos conhecimentos.

Considerações finais

Neste artigo apresentamos um recorte de uma pesquisa que buscou estabelecer relações entre atividades experimentais investigativas e a prática da Modelagem Matemática com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental (ARAKI, 2020). A lente que lançamos no recorte leva em consideração investigar como as intervenções docentes influenciaram o encaminhamento matemático de alunos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Ou seja, nos debruçamos em considerar o momento de matematização – transformação da linguagem natural para a matemática – para analisar a influência das intervenções docentes.

Para saber se a quantidade de calorias apresentada na embalagem de 15 g de amendoim é a mesma obtida experimentalmente, os alunos lançaram mão de conhecimentos sobre a construção de um calorímetro experimental, à luz de uma exploração matemática do fenômeno. Defronte da discrepância entre tais quantidades, os alunos procuraram evidenciar as interferências sofridas no calorímetro experimental e anteciparam possíveis ajustes a

serem feitos para que os resultados sejam mais próximos dos reais. Com isso, tornou-se possível evidenciar os três componentes presentes em atividades experimentais apontados por Carreira e Baioa (2011): resolver problemas; investigar/explorar; validar e ampliar as soluções.

Podemos evidenciar que a atividade experimental, até certa extensão, tornou a matematização um processo dinâmico no qual os alunos utilizaram conhecimentos matemáticos e extramatemáticos para a transição entre linguagem natural e linguagem matemática do fenômeno (ALMEIDA; SILVA, 2015). A forma como a atividade foi desenvolvida, recorrendo a intervenções direcionadas aos grupos, proporcionou um ambiente de reflexão acerca da forma como se dava a etapa de matematização.

Nesse sentido, a utilização das intervenções permitiu, até certa extensão, o redirecionamento do raciocínio utilizado. A partir dos *feedbacks*, os alunos tiveram a oportunidade de identificar os conceitos que, porventura, foram utilizados de maneira equívoca, retomando o encaminhamento matemático utilizado, ao passo que a Modelagem possibilitou a construção e ressignificação de conceitos para além daqueles próprios da matemática.

A partir da análise e discussão dos dados inferimos que as intervenções escritas tornaram-se um meio de guiar e potencializar o processo de matematização dos alunos ao lidar com a atividade investigativa. Com isso, podemos destacar que as intervenções escritas favoreceram uma prática avaliativa que está constituída e permanente no contexto pedagógico, em que o professor tem a oportunidade de observar e acompanhar o desenvolvimento de seus alunos e buscar caminhos para intervir e regular as aprendizagens. Neste processo, a avaliação exerce a função primeira da regulação da aprendizagem, distanciando-se de prática punitiva, de controle e de classificação, possibilitando o desenvolvimento de competências relativas à experimentação, bem como aquelas envolvidas no processo de matematização das quais conhecimentos relativos à proporcionalidade se fizeram presentes.

As intervenções docentes, nesse contexto, favoreceram ao professor acompanhar a forma como os alunos lidam com o conhecimento e, se necessário, buscar por formas de regular a aprendizagem, em busca de um objetivo estabelecido. Ao se optar por realizar *feedbacks* e questionamentos no decorrer das atividades, o professor entende que a aprendizagem do aluno pode ser evidenciada ao longo do processo e não apenas ao final de um ciclo. Isso possibilita que estratégias de ensino sejam mais pontuais às necessidades observadas.

Finalizamos o artigo considerando que os apontamentos evidenciados não estão sedimentados, ao passo que foram construídos a partir de um grupo específico de alunos. Logo, os processos avaliativos da relação entre Modelagem e experimentação, em contextos diferentes do apresentado, se constituem enquanto novas possibilidades de investigação.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, H. C. A Matematização em Atividades de Modelagem Matemática. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 8, n. 3, p. 207-227, 2015.

ARAKI, P. H. H. **Atividades experimentais investigativas em contexto de aulas com modelagem matemática: uma análise semiótica**. 2020. 169 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2020.

BASSOLI, F. Atividades práticas e o ensino-aprendizagem de ciência(s): mitos, tendências e distorções. **Ciência & Educação**, v. 20, n. 3, p. 579-593, 2014.

BEZERRA, W. W. V.; GONTIJO, C. H. Avaliação para as aprendizagens: uma abordagem a partir do trabalho com limites de funções reais num curso de Cálculo I. **Educação Matemática em Revista**, v. 22, n. 56, p. 261-276, 2017.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação - uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORGES, M. C.; MIRANDA, C. H.; SANTANA, R. C.; BOLLELA, V. R. Avaliação formativa e feedback como ferramenta de aprendizado na formação de profissionais da saúde. **Medicina**, Ribeirão Preto, v. 47, n. 3, p. 324-331, 2014.

CARREIRA, S.; BAIOA, A. M. Students' Modelling Routes in the Context of Objects Manipulation and Experimentation in Mathematics. In: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. (Eds.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. New York: Springer, 2011. p. 211-220.

CEOLIM, A. J.; CALDEIRA, A. D. Obstáculos e dificuldades apresentados por professores de matemática recém-formados ao utilizarem modelagem matemática em suas aulas na educação básica. **Bolema**, v. 31, n. 58, p. 760-776, 2017.

CURY, H. N. Aprendizagem em cálculo: uma experiência com avaliação formativa. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, CNMAC, 28, 2005, Santo Amaro. **Anais ...** Santo Amaro: SBMAC, 2005.

DALTO, J. O.; SILVA, K. A. P. Atividade de modelagem matemática como estratégia de avaliação da aprendizagem. **Educação Matemática em Revista**, v. 23, n. 57, p. 34-45, 2018.

D'AMBROSIO, U. Mathematical Modelling as a strategy for building-up systems of knowledge in diferente cultural environments. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBEGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences**. Cham, Switzerland: Springer, 2015. p. 173-183.

DUNCAN, N. G.; DUFRENE, B. A.; STERLING, H. E.; TINGSTROM, D. H. Promoting teachers' generalization of intervention use through goal setting and performance feedback. **Journal of Behavioral Education**, v. 22, n. 4, p. 325-347, 2013.

ESTEBAN, M. T. Avaliar: ato tecido pelas imprecisões do cotidiano. In: GARCIA, R.L. (Org.). **Novos olhares sobre a alfabetização**. São Paulo: Cortez, p.175-192, 2000..

ESTEBAN, M. T. A avaliação no cotidiano escolar. In: ESTEBAN, M. T. (Org.). **Avaliação: uma prática em busca de novos sentidos**. 5 ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2004. p. 7-28.

HADJI, C. **A avaliação, regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. Tradução Júlia Lopes Ferreira e José Manuel Cláudio. Porto: Porto, 1994.

HYLAND, F. The impact of teacher written feedback on individual writers. **Journal of Second Language Writing**, v. 7, n. 3, p. 255-286, 1998.

LOPES JÚNIOR, J.; BURANELLO, L. V. A. Avaliação formativa e as sequências didáticas: uma possibilidade para o ensino e a aprendizagem de função afim no 1º ano do Ensino Médio. **Educação Matemática em Revista**, v. 22, n. 56, p. 176-192, 2017.

MENDES, M. T. **Utilização da Prova em fases como recurso para aprendizagem em aulas de Cálculo**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

NISS, M. Modelling a crucial aspect of students' mathematical modelling. In LESH, R.; GALBRAITH, P. L.; HAINES, C.; HURFORD, A. (Eds.). **Modelling Students' Mathematical Modelling Competencies (ICTMA 13)**. New York: Springer, 2010. p. 4360.

PAZUCH, V.; NEHRING, C. M. A vivência de uma intervenção docente: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de matemática. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 511-531, 2012.

PEREIRA, F. F.; DALTO, J. O.; SILVA, K. A. P. Modelagem matemática em sala de aula: convite a uma primeira experiência nos anos finais do ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista**, v. 25, n. 67, p. 57-75, 2020.

POLLAK, H. O. What is mathematical modeling? In **Mathematical Modeling Handbook**. Bedford: COMAP, 2012.

SANTOS, L. Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In: MENEZES, L.; SANTOS, L.; GOMES, H.; RODRIGUES, C. (Eds.) **Avaliação em Matemática: Problemas e desafios**. Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2008. p. 11-35.

SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. Um estudo sobre as intervenções docentes em contextos de atividades investigativas no âmbito de aulas de Matemática do Ensino Superior. **Ciência & Educação**, v. 24, n. 2, p. 501-516, 2018.

STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P.; GEIGER, V. Facilitating mathematisation in modelling by beginning modellers in secondary school. In STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences**. New York: Springer, 2015. p. 93104.

TREVISAN, A. L.; ROCHA, Z. F. D. C.; DOMINGUES, N. D. Análise de uma primeira experiência com a prova em fases: reflexões na, sobre e sobre a reflexão na prática avaliativa. **Educação Matemática em Revista**, v. 22, n. 56, p. 212-229, 2017.

Recebido em: 14 de fevereiro de 2019.

Aprovado em: 29 de setembro de 2021.