PCN

na sala de aula

A Proporcionalidade em questão

Identificar a variação de grandezas e algumas de suas propriedades é principal objetivo a ser alcançado com esta seqüência de atividades[1].

No período de familiarização com essas idéias, muito mais importante do que defini-las para os alunos, é colocá-los frente a situações-problema em que duas grandezas dependam uma da outra, para que investiguem o que ocorre com seus valores quando elas variam.

Nesta trabalho, ferramentas diversas foram utilizadas, sempre que possível, integradamente, para analisar tais variações, como, por exemplo, tabelas, gráficos cartesianos, gráfico de barras, máquinas.

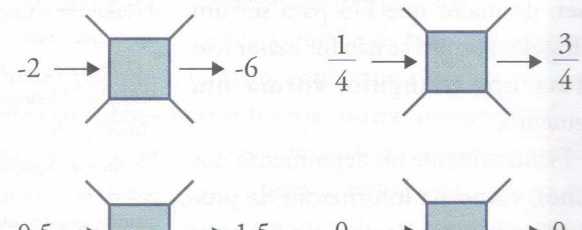
Esse instrumental oferece ao aluno uma "concretude" que favorece a percepção de regularidades, padrões e comportamentos das grandezas envolvidas nos problemas.

O que se pretende com este trabalho é que as propriedades que regem tais grandezas acabem sendo percebidas e identificadas pelos alunos, tanto do ponto de vista geométrico, quanto do ponto de vista numérico ou algébrico, de uma maneira integrada.

A caracterização de grandezas direta ou inversamente proporcionais e algumas de suas propriedades é tanto mais significativa quanto mais contrastes propusermos para nossos alunos. É olhando para os contrastes e semelhanças entre variações proporcionais e não-proporcionais que os estudantes fazem o contraponto entre essas idéias, ampliando e aprofundando seu conhecimento sobre elas.

Atividade 1
"As máquinas transformadoras"

1. Quando um número entra na máquina abaixo ele sai transformado. Veja só:

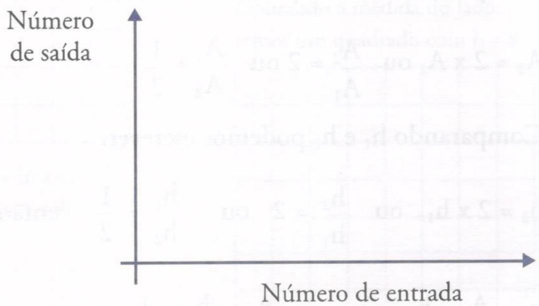


a) Explique o que essa máquina faz com os números.

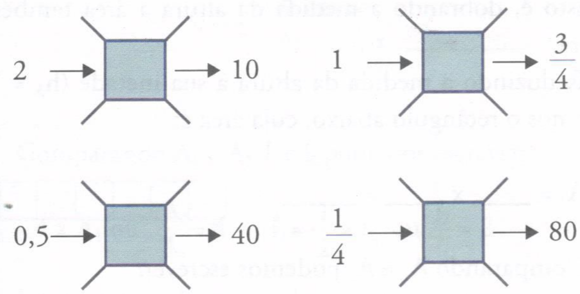
b) Complete a tabela abaixo, referente aos números que entram e saem dessa máquina.

Número de entrada	Número de saída
1	
3	
6	
9	
25	
x	

c) Faça um gráfico que represente o que essa máquina faz com os números racionais.



2. Agora a máquina é outra.

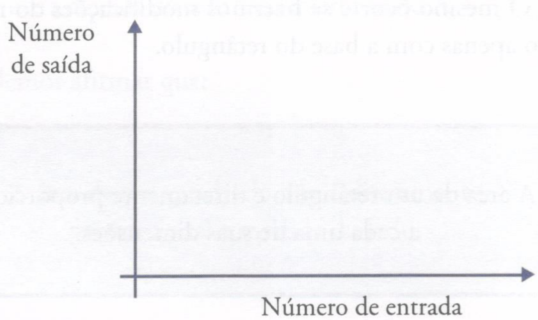


a) Descreva como essa máquina transforma os números.

b) Complete a tabela seguinte, referente aos números transformados por essa máquina.

Número de entrada	Número de saída
4	
5	
6	
8	
x	

c) Faça um gráfico que represente o que essa máquina faz com os números racionais positivos.



3. a) Compare o que a máquina de 1. faz, com o que faz a máquina de 2.

b) Quais as semelhanças e diferenças das tabelas de 1. e de 2.?

c) No que os gráficos de 1. e de 2. diferem?

> Em 1. os números de entrada são ditos diretamente proporcionais aos de saída.
>
> Em 2. os números de entrada são ditos inversamente proporcionais aos de saída.

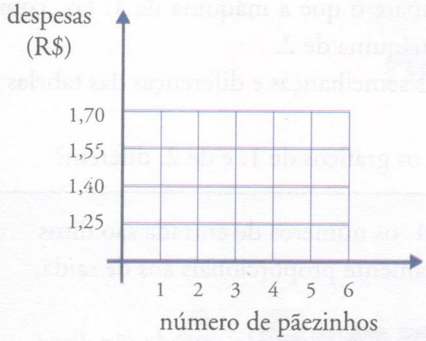
Atividade 2
"Telma e Louise atacam novamente"

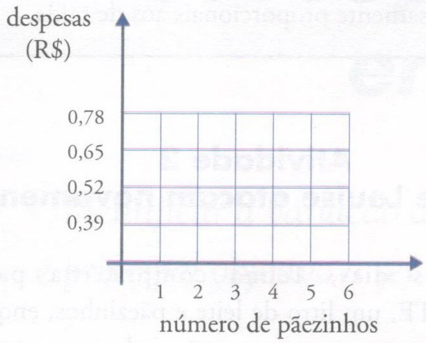
Todos os dias, Telma compra, na padaria PÃOQUENTE, um litro de leite e pãezinhos, enquanto que Louise compra apenas pãezinhos, na padaria TODOPÃO.

Nas tabelas abaixo aparecem algumas despesas de Telma e Louise, conforme a quantidade de pães que elas compram.

Telma		Louise	
pão quente		todo pão	
Nº de pães	despesa (R$)	Nº de pães	despesa (R$)
3	1,25	3	0,39
4	1,40	4	0,52
5	1,55	5	0,65
6	1,70	6	0,78

1. Qual é a despesa de Telma quando compra 7 pãezinhos? E de Louise?
2. Quanto gastará Telma, se comprar 12 pãezinhos? E Louise? E se não levarem pãezinhos, quanto gastarão?
3. Quanto custa cada pãozinho na padaria PÃOQUENTE? E na padaria TODOPÃO?
4. Qual é o preço de um litro de leite na PÃOQUENTE? E na TODOPÃO?
5. Que semelhanças você identifica entre as duas tabelas? E que diferenças?
6. Represente cada par de valores das tabelas, nos gráficos abaixo:





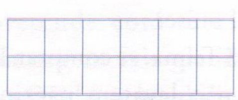
7. Verifique com uma régua se os pontos que você obteve estão alinhados sobre uma reta.

8. Essa reta passa pelo ponto (0,0) nos dois casos?

Atividade 3
"Reconhecendo grandezas diretamente proporcionais"

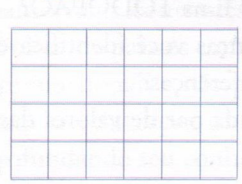
O lado de cada quadrinho será considerado uma unidade de medida de comprimento

1. No retângulo abaixo temos $h_1 = 2$ e $b_1 = 6$.



Tomando o $\square$ como unidade, sua área é: $A_1 = 6 \times 2 = 12$

Dobrando a medida da altura ($h_2 = 4$) obtemos o retângulo abaixo. Tomando o $\square$ como unidade, sua área é:



$A_2 = 6 \times$ _____ = _____

Comparando A_1 e A_2 podemos escrever:

$$A_2 = 2 \times A_1 \text{ ou } \frac{A_2}{A_1} = 2 \text{ ou } \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}$$

Comparando h_1 e h_2 podemos escrever:

$$h_2 = 2 \times h_1 \quad \text{ou} \quad \frac{h_2}{h_1} = 2 \quad \text{ou} \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \quad \text{então,}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{h_2}{h_1} \quad \text{ou} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$$

Isto é, dobrando a medida da altura a área também dobra.

Reduzindo a medida da altura à sua metade ($h_3 = 1$) obtemos o retângulo abaixo, cuja área é:

$A_3 =$ _____ x _____ = _____

Comparando A_1 e A_3 podemos escrever:

$$A_3 = \frac{1}{2} \times A_1 \quad \text{ou} \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{1}{2} \quad \text{ou}$$ __________

• Comparando h_1 e h_3 podemos escrever:
$h_3 =$ _____ x h_1 ou ______

• Então, reduzindo a medida da altura à metade, a área fica ________________

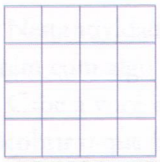
• Escreva qual será a área do retângulo se:
Quadruplicarmos a medida de sua altura
____

• Reduzirmos a medida de sua altura à sua quarta parte ________________

O mesmo ocorre se fizermos modificações do mesmo tipo apenas com a base do retângulo.

A área de um retângulo é diretamente proporcional a cada uma de suas dimensões.

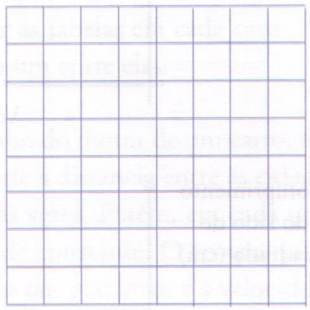
2. Considere o quadrado de lado $l_1 = 4$.



Sua área é:

$A_1 = 4 \times 4 = 16$

Dobrando a medida do lado temos um quadrado com $l_2 = 8$



Sua área é:

$A_2 =$ _____ x _____ = ______

Comparando A_1 e A_2, l_1 e l_2 podemos escrever:

$$A_2 = 4 \times A_1 \text{ ou } \frac{A_2}{A_1} = 4 \qquad \ell_2 = \frac{1}{2} \times \ell_1 \text{ ou } \frac{\ell_2}{\ell_1} = 2$$

Isto é, dobrando a medida do lado a área quadruplica.

Reduzindo a medida do lado à sua metade obtemos o quadrado, cuja área é:

$A_3 =$ _____ x _____ = _____

Comparando A_1 e A_3, l_1 e l_3 podemos escrever:

$$A_3 = \frac{1}{4} \times A_1 \text{ ou } \frac{A_3}{A_1} = \frac{1}{4} \qquad \ell_3 = \frac{1}{2} \times \ell_1 \text{ ou } \frac{\ell_3}{\ell_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Isto é, reduzindo a medida do lado à sua metade a área se reduz à sua ________________________.

Escreva qual será a área do quadrado se:

quadruplicarmos a medida do lado. A_5 = _______

reduzirmos a medida do lado à sua quarta parte. A_6 = _______

Podemos afirmar que:

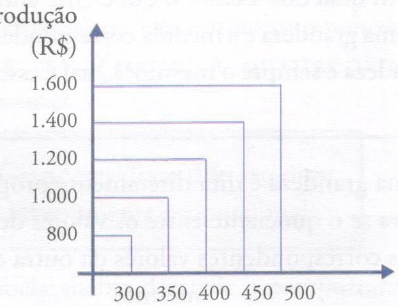
> A área de um quadrado não é diretamente proporcional à medida do lado.

Atividade 4
"Quando grandezas variam"

Vamos chamar de grandeza tudo o que pode ser medido ou contado, como, por exemplo, número de habitantes de uma região, massa de um corpo, o comprimento de uma estrada, a quantia de dinheiro emprestada a um amigo.

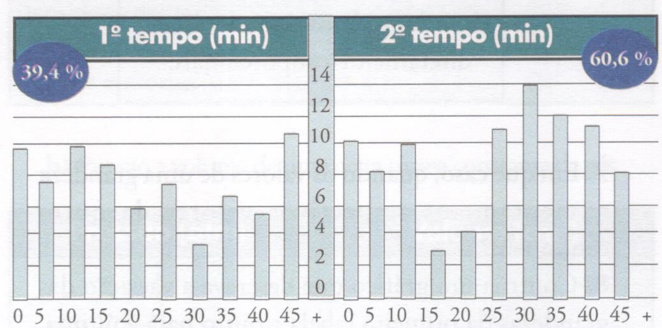
Observe cada tabela ou gráfico abaixo, onde você vai encontrar grandezas que dependem uma da outra.

Velocidade de um carro (Km/h)	Comprimento do percurso feito durante um certo tempo (Km)
60	48
80	64
100	80
120	96



Gáfico publicado na Folha de S. Paulo em 10/7/98, sobre o desempenho dos times e jogadores da Copa de 1998, na França.

Os gols quando foram feitos:



Base: 165 gols até 08/07. Um dos gols foi aos 9 min do 2º tempo da prorrogação no jogo França e Paraguai

comprimento do lado de um quadrado (cm)	Àrea do quadrado
3	9
4	16
5	25
6	36

1. Que grandezas estão envolvidas em cada tabela? E em cada gráfico?

2. Quais as unidades de medida adotadas para as grandezas em cada tabela ou gráfico?

3. Elabore uma tabela para o gráfico que descreve o custo de produção • volume produzido e outra para o que descreve a quantidade de gols • tempo decorrido (no 2º tempo de jogo).

4. De posse das 4 tabelas, verifique que relações existem entre as medidas de cada grandeza e das grandezas correspondentes.

5. Em qual dos 4 casos o quociente entre a medida de uma grandeza e a medida correspondente da outra grandeza é sempre o mesmo? Qual é esse quociente?

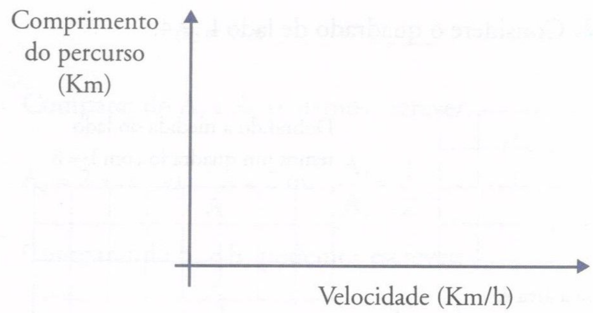
> Uma grandeza é dita diretamente proporcional à outra se o quociente entre os valores de uma delas e os correspondentes valores da outra é sempre o mesmo.

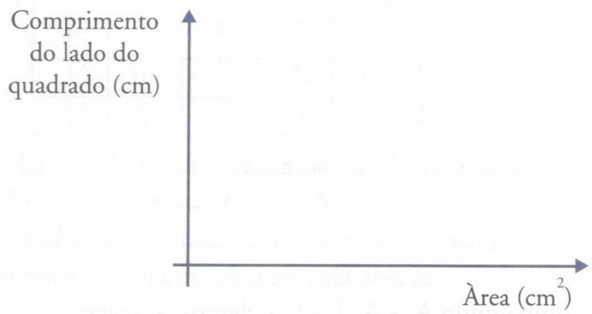
6. Em qual dos 4 casos, quando o valor de uma das grandezas dobra, triplica, ..., o valor correspondente da outra também dobra, triplica..., respectivamente?

> Grandezas desse tipo são ditas diretamente proporcionais.

7. Em que caso, quando os valores de uma grandeza aumentam, os respectivos valores da outra diminuem?

8. Contrua um gráfico que descreva a variação das grandezas da primeira tabela e outro para a última. Que semelhanças e diferenças você observa nesses gráficos?





9. Cada tabela abaixo descreve o comportamento de duas grandezas **diretamente proporcionais**. Complete cada uma delas.

preço de venda (R$)		42	56		91		
Nº de unidades vendidas	1	6	8	10		14	15

Àrea (Km²)	Nº de habitantes (em milhões)
8.000	10.000
8.500	10.625
9.000	20.000
18.000	

massa de um gás (g)	volume desse gás (cm³)
8.000	
8.500	20
9.000	
-	
18.000	

Número de bananas (dúzia)	Preço (R$)
5	12
10	
20	
30	
x	

Atividade 5
"Uma variação diferente"

Nesta atividade você encontra três situações diferentes, porém com algo em comum.

Cabe a você completar as tabelas em cada caso … e descobrir o que há de comum entre elas.

Mãos à obra!

Para testar o desempenho do motor de um carro, um motorista percorreu com ele a distância entre as cidades de Altamira e Belém várias vezes. Porém, em cada uma delas, manteve a velocidade constante. O tempo que o motorista gastou para fazer tais percursos e a velocidade que ele imprimiu ao carro em cada vez estão descritas na tabela que você poderá completar.

Velocidade (Km/h)	Tempo (h)
120	6
90	
80	9
60	

Uma aluna recortou vários retângulos em cartolina, porém todos com a mesma área de 36 cm^2. Em seguida, mediu o comprimento e a largura de alguns deles. Agora, você completa a tabela que ela iniciou.

Comprimento (cm)	Largura (cm)
2	18
3	12
4	
5	
6	

A coluna x da tabela abaixo indica a quantidade de pessoas envolvidas na instalação de uma arquibancada para a realização de um show. A coluna y indica o número de dias que serão necessários para a execução da tarefa. Complete a tabela.

x (nº de pessoas)	y (nº de dias)
1	24
	12
4	
	4
8	3

Atividade 6
"Reconhecendo grandezas inversamente proporcionais"

1. Que grandezas estão envolvidas em cada caso? Que unidades foram utilizadas para medi-las?

2. Em algum caso, as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais? Por quê?

3. Existe uma propriedade comum a todos os pares de números de cada tabela. Descubra qual é.

> Uma grandeza é dita inversamente proporcional a uma outra se o produto entre os valores de uma delas pelos valores correspondentes da outra for sempre o mesmo.

4. Em algum caso, quando os valores de uma das grandezas duplicam, triplicam, quadruplicam… os valores correspondentes da outra ficam reduzidos à metade, à terça parte, à quarta parte…, respectivamente?

> Grandezas desse tipo são ditas inversamente proporcionais.

5. Cada tabela abaixo descreve o comportamento de duas grandezas inversamente proporcionais. Complete cada uma delas.

a) A massa de um corpo é mantida constante; desse modo, quando mudamos seu volume, sua densidade também muda de acordo com a tabela abaixo, que você vai completar.

Densidade de um corpo (g/cm^3)	1,2	2	2,5		5	6	8
Volume do corpo (cm^3)	10		4,8	4		2	1

b) Pressão e volume de uma certa massa constante de gás

Pressão (atm)	Volume (cm^3)
1	9
2	4,5
3	
	1,5

c) Grandezas X e Y

X	Y
3	
4	
5	
6	4

d) Distribuição de um texto

nº de linhas por página	nº de páginas
15	48
12	60
9	
6	

Atividade 7
"Reconhecendo grandezas inversamente proporcionais"

1. Complete os espaços e vá comparando as velocidades e os tempos, para percorrer 320 km.

- a uma velocidade constante $V_1 = 80$ km/h gasta-se um tempo $T_1 =$ ________ horas.

- a uma velocidade constante $V_2 = 160$ km/h gasta-se um tempo $T_2 =$ ________ horas.

Comparando V_1 e V_2 podemos escrever:

$V_2 = 2 \times V_1$ ou $\frac{V_2}{V_1} = 2$ ou $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$

Comparando T_1 e T_2 podemos escrever:

$T_2 = \frac{1}{2} \times T_1$ ou $\frac{T_2}{T_1} = 2$ ou $\frac{T_1}{T_2} = 2$

então, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$, isto é, ao dobrar a velocidade, o tempo se reduz à metade.

- Se você reduzir $V_1 = 80$ km/h à sua quarta parte, o tempo gasto será quantas vezes maior? __________

- Se você triplicar $V_1 = 80$ km/h, o tempo gasto será quantas vezes menor? __________________

Podemos afirmar que:

> Fixado um percurso, o tempo é inversamente proporcional à velocidade.

2. Agora, vá completando a tabela e comparando o número de balas por embalagem (B) e o número de embalagens (E), para empacotar 300 balas.

nº de balas por embalagem	número de embalagens
$B_1 = 3$	$E_1 =$ ___
$B_2 = 6$	$E_2 =$ ___
$B_3 =$ ___	$E_3 = 25$
$B_4 =$ ___	$E_4 = 20$
$B_5 = 20$	$E_5 =$ ___
$B_6 = 30$	$E_6 =$ ___

$\frac{B_1}{B_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{...}{...} = \frac{...}{...}$

$\frac{B_1}{B_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{...}{...}$

Verifique se ocorre o mesmo para outros valores de B e E.

Podemos afirmar que:

____

1 Atividades elaboradas pelo grupo de professores da PUC/SP, no âmbito do Programa de Formação Continuada (PEC) da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo