Relato de Experiência

Para Ler Com os Alunos
Uma Conversa Inicial Sobre a Geometria Dos Fractais

Alexsandra Camara[2]

"Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca das árvores não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta" (Mandelbrot, 1977).

Se você pensa que a Geometria Euclidiana (que, geralmente, estudamos na escola) pode resolver todos os problemas da natureza e que as figuras geométricas têm dimensão bem determinada cuja reta tem dimensão um, uma superfície possui dimensão dois e um sólido possui dimensão três, você está muito enganado. Existe a Geometria dos Fractais cuja dimensão pode não ser expressa por um número inteiro.

A Matemática procura representar nossa percepção da natureza e a Geometria Euclidiana nos oferece uma primeira aproximação para análise de seus objetos, mas muitos padrões na natureza exibem irregularidades e complexidades que não podem ser adequadamente descritas por ela. Para essas situações foram criadas outras teorias, em especial a Geometria dos Fractais, que procura analisar objetos de extrema complexidade. Várias definições de Fractais, adjetivo latino que significa "irregular ou "quebrado", surgiram com o aperfeiçoamento de sua teoria, porém a noção que serve de fio condutor foi introduzida por Benoit Mandelbrot. Esta teoria é um convite, no mínimo interessante, a olhar o mundo sob outra perspectiva. Em um meio repleto de superfícies irregulares encontramos o fractal como uma nova linguagem que pode nos auxiliar a desvendar os segredos do universo.

Outras características de um fractal, além da dimensão, são a auto-semelhança e a complexidade infinita. A

[2]Colégio Marista Santa Maria – Curitiba – PR.

auto-semelhança está relacionada ao fato de um fractal apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior; já a complexidade infinita indica que nunca conseguiremos representá-los completamente, pois a realização de um procedimento é repetida infinitamente.

Existem vários tipos de formações fractais, mas aqui será analisada apenas a "Curva de Koch", que é um exemplo de construção que utiliza uma regra fixa de substituição geométrica.

Consideremos que o segmento inicial AB (figura 0) tenha comprimento C = 3m. Vamos dividi-lo em três partes iguais e substitir a parte do meio por dois segmentos de igual comprimento (figura 1). Assim cada segmento terá 1m e o comprimento da nova curva (adição dos quatro segmentos) será de 4m. Continuando o processo, em cada segmento, procedendo da mesma maneira: divide-se em três partes iguais e substitui-se a do meio por outros dois de mesmo comprimento. Essa nova curva (figura 2) terá 16 segmentos, e cada um com $\frac{1}{3}$ m, logo o seu comprimento (adição dos 16 segmentos) deverá ser 16 vezes $\frac{1}{3}$ que é 5,3333....m. Pode-se dizer que este comprimento é bem definido e que não tem nada de surpresa. Mas para obtermos um fractal precisamos continuar repetindo esse procedimento sem parar, infinitamente.

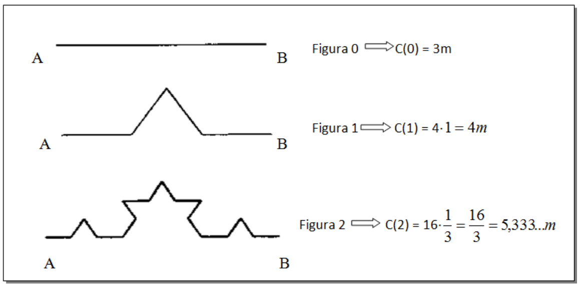

Ilustração 1 – Formação de fractais

As figuras 3 e 4 nos dão uma ideia do que acontece quando continuamos com o procedimento. O resultado final é conhecido como Curva de Koch, pois foi Niels Fabin Helge Koch (1870 - 1924), matemático sueco, quem a descreveu.

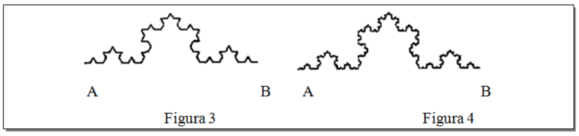

Ilustração 2 – A continuação do procedimento

Agora você precisa utilizar um pouco da sua imaginação. Vamos lá! Imagine cada segmento sofrendo o processo de formação dos quatro segmentos. O comprimento total da curva irá aumentar pois, a cada Procedimento será multiplicado por $\frac{1}{3}$. Assim, mesmo iniciando em A e terminando em B, o comprimento da curva tende ao infinito. Isso não é incrível?! Quando Koch a apresentou para outros matemáticos ela foi considerada como um monstro, uma aberração matemática e que não teria nenhuma aplicação prática.

Dizemos que uma reta possui

dimensão 1 (unidimensional) e que um plano possui dimensão 2 (bidimensional). Observa-se que o contorno da curva de Koch é mais do que um segmento de reta, mas menos do que um plano, é mais do que unidimensional e não chega a ser bidimensional. A dimensão dessa curva é aproximadamente 1,26186, maior que 1 e menor que 2, usualmente denominada dimensão fractal.

Os matemáticos da época de Koch estavam enganados ao dizer que sua curva não teria aplicação na vida real, pois, algum tempo depois, geógrafos perceberam que o litoral dos continentes e ilhas é mais parecido com uma curva de Koch do que com uma poligonal ou outra linha qualquer. Digamos que Koch foi salvo pelos geógrafos. Assim, podemos observar que alguns objetos da natureza apresentam propriedades fractais. Experimente pegar uma couve-flor ou uma samambaia, se você cortar um “galhinho” da couve-flor verá que o pedaço é parecido com a couve-flor inteira, e o mesmo ocorre com a samambaia.

Mandelbrot, em seu livro The Fractal Geometry of Nature, 1977, relata que os fractais podem ser encontrados em nosso universo, desde os aspectos das nuvens, montanhas, alguns vegetais, até a distribuição das galáxias. A aplicação do conceito de fractal em problemas reais aparece em áreas como: Biologia, Geografia, Medicina, Música, Economia, Meteorologia, Geologia, entre outros. O conhecimento sobre essa geometria possibilita compreender melhor o crescimento das plantas, oferece uma nova visão da anatomia interna dos seres vivos, auxilia no estudo de superfícies caóticas, assim como entre muitos outros exemplos.

Os alunos podem realizar uma pesquisa sobre a construção de outros fractais geométricos como: Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinsk e Quadrado de Sierpinsk. Na análise desses fractais podem ser considerados o perímetro, a área e o comprimento em várias etapas da construção. Para essa análise, seria importante a organização dos dados em uma tabela com o objetivo de fazer com que os estudantes percebam as relações existentes. Como, por exemplo, no Conjunto de Cantor estes alunos devem verificar que o comprimento total de cada etapa da construção tende a zero, quando cresce o número de etapas.

Segundo Sallum (2005) a introdução de fractais no ensino, além de satisfazer a curiosidade dos que já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente e introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite (um excelente tópico para a aplicação de progressões geométricas). O ensino da Matemática deve considerar a realidade do aluno. Associando os conteúdos a serem trabalhados aos exemplos que a natureza nos oferece, a Matemática pode apresentar significativas percepções ao estudante, o que, por sua vez, contribui para melhorar a aprendizagem matemática.

Bibliografia

MANDELBROT, Benoît. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: Freeman, 1977.

SALLUM, Élvia Mureb. Fractais no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática** n.57, 2005. Disponível em: http://www.rpm.org.br/conheca/fractais.pdf .