Artigo

DISCUSSÃO DAS NOÇÕES DE LIMITE E INFINITO

Marilaine de Fraga Sant'Ana[1]
Priscila Tedesco[2]

Resumo: O trabalho discorre sobre as noções de infinito e limite, elementos presentes no pensamento matemático avançado, com o qual o aluno se depara, em geral, no primeiro ano do Curso Universitário. Apresenta-se um relato de oficina pedagógica ministrada a professores, na qual foram desenvolvidas atividades que estimulam a discussão desses conceitos, desde o Ensino Fundamental, à luz da Teoria de David Tall, que caracteriza o pensamento matemático avançado pela presença de definições matemáticas precisas e de deduções lógicas.

Palavras-Chave: Ensino e Aprendizagem de Matemática; Infinito; Limite; Pensamento Matemático.

1. INTRODUÇÃO

As noções de limite e infinito são consideradas pontos delicados do ensino universitário. Em geral, os alunos de Matemática, Engenharia ou demais cursos de Ciências Exatas, ou Econômicas, se deparam com estes conceitos na primeira disciplina de Cálculo, que, usualmente ocorre no primeiro ano do curso universitário.

Esses dois conceitos, que têm muitos elementos em comum e são assimilados de forma conjunta, são os primeiros conceitos que não decorrem diretamente daqueles já abordados no Ensino Médio. David Tall afirma que *"although the function concept is central to modern mathematics, its the concept of a limit that signifies a move to a higher plane of mathematical thinking"*[3] (TALL, 1992, p. 501), ou seja, o primeiro conceito referente ao pensamento matemático avançado que o aluno tem contato é o de limite.

As imagens conceituais que os alunos constroem para representar os conceitos de limite e infinito estão carregadas de sentidos equivocados, influenciados, muitas vezes, pela linguagem corrente, que atribui outros significados não matemáticos para as palavras "limite" e "infinito".

O presente artigo decorre da elaboração e aplicação de atividades em oficina para professores de Ensino Fundamental e Médio. Estas atividades versam sobre Geometria, mas, ao abordarem área, perímetro e volume máximos ou mínimos evocam as noções de limite e infinito. Apresenta-se o relato da realização dessa oficina, comentado à luz da Teoria de David Tall, precedido por uma breve seção dedicada à construção de imagens conceituais relacionadas a limite e infinito.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. O Pensamento Matemático Avançado

Segundo David Tall (1992, 1997), o pensamento matemático avançado pode ser caracterizado pela presença de dois elementos básicos. São eles: definições matemáticas precisas, o que inclui definições básicas e axiomas, formando um sistema axiomático que sustenta determinada teoria; dedução lógica de teoremas, proposições e corolários, a partir do sistema axiomático, levando ao desenvolvimento da teoria em questão.

A transição para o pensamento matemático avançado envolve a mudança da noção, meramente intuitiva, de conceitos para a construção e assimilação de definições formais e deduções lógicas, a partir destas. Essa transição, geralmente, se dá no primeiro ano da universidade, causando, muitas vezes, um grande impacto, contribuindo para a decepção do aluno com seu curso e, em algumas situações, a evasão deste.

Essa transição pode ser menos difícil se os alunos já tiverem construído algumas imagens sobre conceitos, trabalhados neste primeiro ano, como limite e infinito.

[1] ULBRA – Universidade Luterana do Brasil, Canoas/RS; FACOS, Faculdade Cenecista de Osório, Osório/RS. E-mail: marilaine.fraga@ulbra.br
[2] ULBRA – Universidade Luterana do Brasil, Canoas/RS. E-mail: priscilatedesco@bol.com.br
[3] "Embora o conceito de função seja central para a matemática moderna, é o conceito de limite que caracteriza uma mudança para um plano mais elevado do pensamento matemático" (Tradução das autoras).

Não se está defendendo a inclusão de tais conteúdos, de maneira formal, no currículo do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio, mas, a discussão dessas noções, de forma integrada a outros conteúdos, fornecendo o levantamento de questões e formulação de hipóteses que levem o aluno a refletir sobre esses conceitos.

2.2. Imagens Conceituais para Limite e Infinito

Como já se mencionou acima, as primeiras noções matemáticas não decorrentes, diretamente, do Ensino Médio que o estudante universitário tem contato são limite e infinito. *Mas, estas não são expressões desconhecidas para o aluno; ao* contrário, ele já tem uma série de imagens construídas a respeito desses assuntos; imagens relacionadas a outros sentidos atribuídos à palavra limite, como "limite de velocidade" ou "limite de peso", ou, ainda, decorrentes de afirmações como: "o Universo é infinito".

Segundo o Dicionário Aurélio, a palavra limite significa: "Linha de demarcação; raia. Local onde se separam dois terrenos ou territórios contíguos; fronteira. Parte ou ponto extremo; fim, termo" (FERREIRA, 2004, p. 439). Ou seja, está muito mais relacionada à noção matemática de fronteira de um conjunto limitado do que à noção matemática de limite. Dessa forma, pode-se inferir que não é natural, para o aluno, atribuir à palavra limite o sentido matemático que se apresenta pela definição, e estes outros sentidos, já atribuídos pela linguagem, não deixam de permear as imagens conceituais construídas para representar esta definição.

Davis e Vinner (1986) observam que, alguns alunos, mesmo após o estudo da definição de limite, recorrem às concepções equivocadas, influenciadas pela linguagem. Essa ocorrência não significa, necessariamente, que o aluno não sabe a definição, pois, em muitos casos, eles não abandonam as concepções anteriores, mantendo presente duas ou mais imagens conceituais para limites. Embora algumas dessas imagens sejam conflitantes, este conflito não ocorre até que as imagens sejam utilizadas simultaneamente.

Também, segundo o Dicionário Aurélio, a palavra infinito significa: "Sem fim, termo ou limite; infindo. De extensão ou intensidade extremas; imenso. Inumerável. Infinitivo" (FERREIRA, 2004, p. 399). Tais sentidos vêm de encontro *à criação, segundo Tall (1992), de* imagem conceitual relacionada ao infinito potencial, visto como um processo que não acaba; algo que não é atingido. Também o sentido de infinito como ilimitado pode contribuir para a formulação de imagens conceituais equivocadas, gerando uma confusão entre conjuntos infinitos e ilimitados, criando a falsa impressão de que um conjunto limitado não pode ser infinito. É comum o aluno não aceitar a idéia de um intervalo limitado ser um conjunto infinito.

Os sentidos atribuídos às palavras limite e infinito já existem e não podem ser modificados, afinal são naturais da linguagem. Mas, podemos contribuir para a criação, pelo aluno, de imagens conceituais prévias, para representarem limite e infinito que, no momento em que este aluno entrar em contato com as definições conceituais, possam ser evocadas e contribuam para a compreensão destas.

3. METODOLOGIA

Neste trabalho, apresentamos o relato da realização de uma oficina pedagógica, para trinta e sete professores de Matemática de Ensino Fundamental e Médio. Nesta atividade, uma acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática foi observadora, realizando registros, com auxílio de três colegas. Os professores participantes da oficina se dispunham em grupos nos quais se inseriam os acadêmicos.

Apresentamos, a seguir, o relato de atividades, realizadas nesta oficina, bem como as observações feitas.

4. APRESENTAÇÃO DE ATIVIDADES REALIZADAS E ANÁLISE DE OBSERVAÇÕES

Relatamos duas atividades realizadas nesta oficina.

Utilizaremos os termos "a *professora", quando se tratar da ministrante da oficina* e "o participante", quando se tratar dos professores participantes, enumerando-os como P_1, P_2, etc.

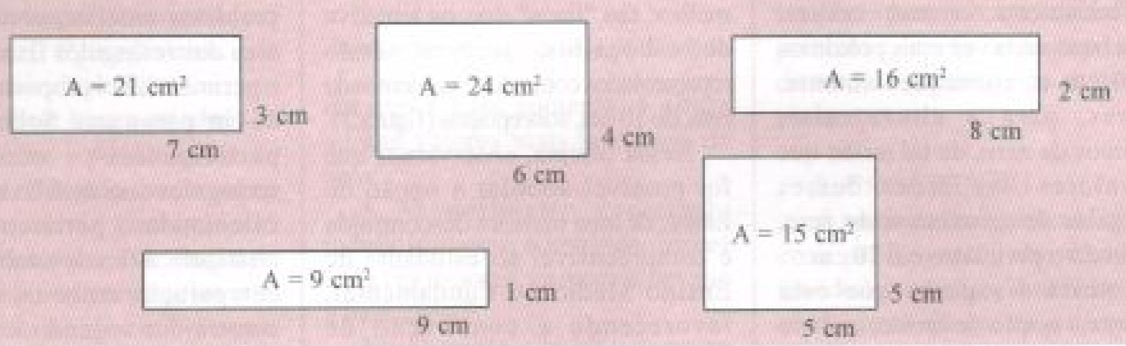
4.1. Atividade 1

A primeira atividade consiste em uma investigação a respeito de retângulos, com área máxima ou mínima, mantendo a medida dos perímetros fixa em 20 cm.

A professora solicitou a construção de retângulos com perímetro de 20 cm e cálculo da área de cada retângulo construído, estabelecendo uma ordem segundo as medidas encontradas. Os participantes construíram os retângulos, representados abaixo, na figura 1:

Os participantes classificaram os retângulos segundo as medidas de suas áreas, ou seja, o "menor" retângulo considerado foi o de medidas 9 cm por 1 cm e área igual a 9 cm²; em seguida, colocaram em ordem os retângulos de medidas 8 cm por 2 cm e área igual a 16 cm², 7 cm por 3 cm e área igual a 21 cm², 6 cm por 4 cm e área igual a 24 cm² e, ao final, consideraram como "maior" retângulo aquele com medidas 5 cm por 5 cm e área igual a 25 cm², isto é, um quadrado.

Figura 1: Retângulos com perímetros iguais a 20 cm.



O participante P_1 afirmou que o etângulo com maior área e erímetro igual a 20 cm é o quadrado om lados 5 cm por 5 cm. A rofessora salientou que isto é erdade, embora necessite da omprovação. A seguir, a professora olicitou que se partisse para a ormalização e comprovação atemática da afirmação, esclarecendo que a comprovação não é, ecessariamente, a mesma a ser alizada em sala de aula com os unos, mas, sim, aquela realizada elo professor, a fim de justificar oricamente suas afirmações.

Considerando os lados de um tângulo com 20 centímetros de erímetro e medidas x e y para os dos, o participante P_2 foi ao quadro expressou o perímetro e a área em nção dos lados, isto é, $=2x+2y=20$ e $A=x.y$. Em seguida, xpressou a área do retângulo em nção de um dos lados, usando para l a expressão do perímetro, de onde oteve $y=10-x$. Assim, $A=10x-x^2$.

O grupo observou que a comprovação pode ser argumentada de duas maneiras:

- A função $A=10x-x^2$ é representada graficamente por uma parábola, cujas coordenadas do vértice são $x=5$ e $A=25$ – comprovação expressa pelo participante P_2;

ou

- A derivada da função $A=10x-x^2$ é $A'=10-2x$. Como o máximo ocorre quando a derivada se anula e $10-2x=0$, quando $x=5$, obtém-se o máximo quando um dos lados do retângulo é igual a 5 cm e, portanto, o outro também, e a área é igual a 25 cm² – comprovação expressa por um acadêmico do curso de Matemática.

Nesse momento, a professora observou a necessidade de se trazer à tona os assuntos abordados nas disciplinas de Cálculo, para o cotidiano do professor atuante nos Ensinos Fundamental e Médio. Também, observou-se que os professores apresentavam grandes dificuldades em aplicar estes conhecimentos. Muitos revelaram não saber mais calcular derivadas, o que teve que ser brevemente retomado pela professora, embora recordassem a relação entre derivadas e otimização, o que evidencia um esboço de imagem conceitual para derivada associada a esta aplicação.

Finalmente, a professora questionou se seria possível obter um retângulo com área mínima e perímetro igual a 20 centímetros. Nesse momento, os participantes manifestaram que não costumam fazer questionamentos dessa natureza aos seus alunos.

A professora colocou alguns exemplos de retângulos, que não foram, inicialmente, citados como o primeiro retângulo representado na figura 2, com lados medindo 9,5 cm por 0,5 cm e área igual a 4,75 cm², ou o segundo retângulo, representado na figura 2, que tem lados medindo 9,9 cm por 0,1 cm e área igual a 0,99 cm², ambos preservando o perímetro de 20 cm.

Figura 2: Retângulos com perímetro igual a 20 cm e situação limite

A professora observou que poderíamos continuar este processo indefinidamente, tomando valores, para a base, cada vez mais próximos de 10 cm e, conseqüentemente, valores, para a altura, mais próximos de zero, de tal modo que os valores das áreas desses retângulos se aproximam de zero, mantendo o perímetro em 20 cm.

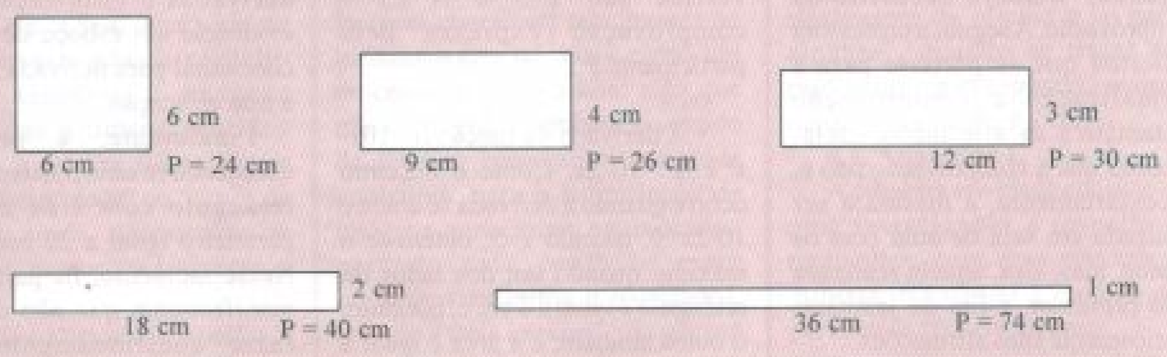
É nesta discussão que está presente a noção de limite, embora não definida formalmente. Esses questionamentos visam a despertar no aluno a curiosidade e a imaginação, construindo, mentalmente, figuras de retângulos muito "finos", tão "finos" que não seja possível esboçar, ou melhor, tão "finos" que, na tentativa de esboçá-los, acabam sendo representados como dois segmentos de reta, de 10 cm, sobrepostos (figura 2).

Nessa oficina, observamos que foi possível abordar a noção de limite, de uma maneira descontraída e compreensível ao estudante de Ensino Médio ou Fundamental, favorecendo a construção de imagens prévias, para a definição de limite, mais próximas do sentido matemático atribuído a este.

4.2. Atividade 2

Na segunda atividade, a professora propôs uma mudança no problema anterior, conservando a área dos retângulos fixa e variando o perímetro. Foi proposto o valor de 36 cm² para a área. Solicitou que os participantes construíssem retângulos com área fixa de 36 cm², calculando o perímetro de cada retângulo, a fim de estabelecer uma comparação entre os retângulos construídos segundo a medida de seus perímetros, colocando-os em ordem crescente de perímetros. Os participantes construíram os retângulos representados na figura 3.

Figura 3: Retângulos com área igual a 36 cm², indicando os valores de perímetros



Os participantes classificaram os retângulos segundo seus perímetros, iniciando pelo menor, isto é, o quadrado de lado 6 cm e perímetro igual a 24 cm, seguido pelos retângulos de lados: 9 cm por 4 cm e perímetro igual a 26 cm; de lados 12 cm por 3 cm e perímetro igual a 30 cm; de lados 18 cm por 2 cm e perímetro igual a 40 cm; e, finalmente, o maior perímetro dentre os exemplos obtidos, de lados 36 cm por 1 cm e perímetro igual a 74 cm.

Os participantes observaram que o menor perímetro ocorre quando se tem um quadrado com medida para o lado igual a 6 cm, mas, a professora, novamente, salientou a necessidade de comprovar este fato teoricamente. Para tal, a professora considerou um retângulo genérico com área igual a 36 cm², atribuindo, aos lados, medidas x e y. Em seguida, solicitou-se que expressassem o perímetro e a área, em função dos lados, ou seja, $P=2x+2y$ e $A=xy=36$, o que foi feito no quadro, pelo participante P_3. Em seguida, os participantes representaram o perímetro do retângulo em função de um dos lados, o que foi obtido com auxílio da expressão da área, isto é, como $xy=36$, $y=\dfrac{36}{x}$. Assim, o perímetro tem a expressão $P=2x+\dfrac{72}{x}$. Novamente, o participante P_3 registrou o desenvolvimento, no quadro.

Observamos que esta situação é diferente daquela investigada na primeira atividade, pois a função a ser otimizada não é representada graficamente por um formato tão simples; seu gráfico possui assíntotas, assunto que a professora teve que recordar, brevemente. A forma mais fácil encontrada para a otimização foi através da derivada. Os participantes calcularam, então, a derivada da função perímetro, a $P'=2-\dfrac{72}{x^2}$, qual igualaram a zero, $2-\dfrac{72}{x^2}=0$, obtendo, $x^2=36$. Como x representa a medida do lado de um retângulo, a única raiz admissível para a equação $x^2=36$ é $x^2=36$ é $x=6$, o que acarreta $y=6$, ou seja, o retângulo com área igual a 36 cm² e menor perímetro é, de fato, obtido quando este é um quadrado de lados medindo 6 cm. Neste segundo momento, os participantes demonstraram mais facilidade para calcular a derivada. Novamente, um participante, P_4, registrou, no quadro, os cálculos realizados.

A professora levantou, então, a discussão sobre a possibilidade de se obter um retângulo com o maior perímetro possível e área igual a 36 cm². Questionou a existência de outros exemplos de retângulos com áreas iguais a 36 cm². Foram citados, pelos participantes, os exemplos de retângulos com lados 72 cm por 0,5 cm, que tem perímetro igual a 145 cm, também com lados 144 cm por 0,25 cm, que tem perímetro igual a 288,5 cm e 36000 cm por 0,001 cm, que tem perímetro igual a 72000,002 cm.

A professora observou que é possível aumentar a base do retângulo, indefinidamente, desde que a altura diminua, suficientemente, para manter seu produto igual a 36. Nesta situação, a questão abordada é bem mais delicada que na primeira atividade, uma vez que temos:

- A base do retângulo crescendo indefinidamente, admitindo valores infinitamente grandes;
- A altura do retângulo, decrescendo para zero, uma vez que se relaciona com a base pela $altura = \dfrac{36}{base}$ ou seja, a medida em que a base aumenta, a altura admite valores mais próximos de zero;
- O perímetro crescendo indefinidamente, admitindo valores cada vez maiores, na medida em que a base cresce.

Finalmente, a professora observou que, na medida em que a base cresce, o retângulo se torna mais "fino", mas, com base e perímetro cada vez maiores, de tal forma que é impossível esboçar este retângulo e, no caso de uma tentativa de esboço, obteríamos duas retas sobrepostas.

Observamos que a situação difere daquela obtida, no processo limite da primeira atividade, quando o objeto resultante do processo era formado por dois segmentos de comprimentos finitos sobrepostos. Neste caso, os objetos são duas retas, de comprimentos "infinitos", sobrepostas.

Acreditamos que, refletindo acerca destas questões em sala de aula, é possível não só contribuir para a formação de imagens conceituais para limites, mas, também, para a noção de infinito, presente na evolução deste processo de medida da base e de medida do perímetro.

5. CONCLUSÃO

A partir da realização da oficina com professores, abordando as atividades escritas, anteriormente, observamos que, neste grupo, não é clara a relação entre as disciplinas cursadas na graduação e a prática profissional. Os professores apresentam muita dificuldade para estabelecer este vínculo. Esta situação, certamente, se reflete na formação do aluno, que, quando entra na Universidade, se depara com uma forma inesperada de pensar e fazer Matemática, para a qual ele não tem preparação alguma.

Faz-se, então, necessária a utilização de atividades e questionamentos, como estes aqui sugeridos, que possibilitem a discussão destas noções, visando à construção de imagens conceituais adequadas às definições formais em questão, não influenciadas por concepções alternativas equivocadas.

REFERÊNCIAS

DAVIS, R.; VINNER, S. The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behaviour*, n. 5, v. 3, 1986. Amsterdan, Elsevier Science. p. 281-303.

FERREIRA, A. B. H. *Mini Aurélio*, O Dicionário da Língua Portuguesa. Curitiba: Posigraf , janeiro de 2004.

MOREIRA, M. A. *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1999. 195 p.

TALL, D. Matehematical Intuition, with Special Reference to Limiting Process. Proceedings of *PME Conference*, 4th. Berkeley, 1980, p. 179-186.

______. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan, New York: NCTM. Grows D. A. , 1992. p. 495-510.

______. Functions and Calculus. *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht, Kluwer, A. J. Bischop et al, 1997. p. 289-325.