

GEOMETRIA DINÂMICA – construções lúdicas

Armando Cassol¹
Margarida Hammer²

Resumo: Neste artigo apresentamos a construção de um limpador de pára-brisa com o Cabri Géomètre II. Os relatos e as lições foram retiradas de uma pesquisa que está em andamento, há três anos, na qual, entre outras ações, foram feitas construções com as quais pretendíamos que informações sobre a geometria euclidiana fossem aprendidas durante – e por causa – da construção desses equipamentos.

Palavras-Chave: Ensino-aprendizagem; geometria; construções; lúdico.

INTRODUÇÃO.

Em um dos encontros sobre Educação Matemática da UNISINOS, uma das perguntas vindas da platéia e dirigida à conferencista foi quase um pedido de socorro. A pergunta se referia à estratégia que poderia ser adotada a fim de interessar os alunos nas aulas de Matemática. Mais importante do que a pergunta foi o relato que a introduziu. A professora narrou que, durante muitos anos, no início da sua carreira, havia dado aulas em turmas de uma determinada série. Depois, passou a lecionar para turmas em níveis mais elevados e, duas dezenas de anos depois, voltou a trabalhar em turmas do mesmo nível daquele do início de sua carreira. Segundo seu corajoso relato, tivera muito

êxito nesse nível, no início de sua carreira. Mas, quando do seu retorno, ficou decepcionada: o aluno não manifestava interesse para o estudo, ninguém mais a acompanhava na linguagem, pois, os termos usados por ela estavam em desacordo com os usados pelos alunos em seu dia-a-dia. Alguns nem mais faziam parte de seu vocabulário. Em geometria, então, nem se fala. Termos como **lugar geométrico, teoremas, hipóteses, teses, demonstração, retas normais** e muitos outros, passaram a ser termos ininteligíveis para os estudantes de hoje. Após o relato, pediu socorro.

A constatação sobre o comportamento dos alunos daquela professora não é apenas dela. É compreensível que tenha sido assim. Afinal, as vivências dos estudantes de hoje são muito diferentes daquelas que seus pais e professores tiveram. Isso todos nós sabemos e lemos em muitos tratados e teses sobre assuntos pedagógicos e didáticos. O difícil é adequar-se a essa nova minicultura e, nesta adequação, provocar aprendizagem, em Matemática, que tenha sentido para esses alunos. Um dos perigos que nós professores corremos é o cansaço e a conseqüente desistência da busca de soluções. Seria desastroso. O objetivo deste artigo é relatar nossa

experiência de pesquisa com o Cabri, fazendo apreciações e ensaiando soluções.

Uma das alternativas que adotamos foi transformar o ensino-aprendizagem de geometria em atividade lúdica. O perigo é, neste caso, excluir deste ensino, temas que, embora importantes, apresentam dificuldades e, por isso, não lúdicos. Nossa posição, portanto, não é privilegiar o aspecto lúdico em prejuízo de uma aprendizagem sem qualidade. Queremos que o ato de aprender e de ensinar tenha a seriedade e a responsabilidade próprias deste ato, mas, sem o transformar numa atividade maçante, deslocada de seu tempo e do seu modo de vida. O ato de aprender pode, dessa forma, ser transformado numa atividade da qual se possa conversar sobre ela com os colegas e expor suas idéias aos professores. Exercitar isso permite desenvolver hábitos de fazer hipóteses e conjecturas, experimentá-las e refazê-las.

Neste artigo, apresentamos metodologias para ensinar e aprender geometria, utilizando a construção de “equipamentos” ou “brinquedos”, com o uso do *Cabri Géomètre II*. Os relatos e lições retiradas destes vêm de uma pesquisa que está em andamento, há três anos, na qual, entre outras

¹ Mestre em Educação Matemática pela UNESP e professor da UNILASALLE e UNISINOS, São Leopoldo, RS. E-mail: acassol@exatas.unisinos.br
² Especialista em Matemática pela UNISINOS e professora da UNISINOS, São Leopoldo, RS. E-mail: marga@exatas.unisinos.br

ações, foram feitas construções com as quais pretendíamos que informações sobre a geometria euclidiana fossem aprendidas durante – e por causa – da construção destes equipamentos.

As nossas observações, conclusões ou simples constatações, decorrentes das atividades da pesquisa, serão colocadas logo após o registro das mesmas. Desta forma, o leitor não necessitará retornar muitas páginas para reler o fato gerador de uma observação, conclusão ou constatação.

A CONSTRUÇÃO DO LIMPADOR DE PÁRA-BRISA

A idéia de construir um limpador de pára-brisa de automóvel foi concebida como uma forma de explorar a ferramenta *animação* do *Cabri*. Para iniciar, não convinha que as dificuldades geométricas superassem a idéia do lúdico. Por isso, pensamos, inicialmente, num limpador absolutamente simples, de uma só haste, preso no centro da base do pára-brisa. Não é importante, no começo, uma sofisticação maior. Depois de construído o simples, então o próprio aluno poderá ficar desafiado a realizar a construção de outro, com duas hastes, como ele vê nos automóveis, que se movimentam de forma sincronizada. Antes de iniciar a atividade da construção, julgamos necessária alguma familiarização com as ferramentas que produzem movimento no *Cabri*. Não é atraente uma demorada exposição das ferramentas *animação* e *simetria*, por si mesmas se, ainda, não forem conhecidas. O *Cabri* não é um software de interface difícil. É apenas uma questão de familiarizar o aluno com o recurso de animação, a fim de que sua concentração, durante a construção, não seja desviada para a ferramenta em si mesmo. A exploração das duas

ferramentas citadas e outras, que se fizerem necessárias, pode ser assim: *traçar um segmento, um ponto sobre o mesmo e animar este ponto*; algumas explorações a mais, provocando a percepção das diferenças entre animar o centro de uma circunferência e animar a própria circunferência. Para falar da simetria, usamos comparações com as imagens produzidas por um espelho.

Para avaliar as dificuldades ou facilidades que tivemos, esclarecemos que a clientela da pesquisa era constituída de grupos de estudantes (entre 15 e 18 alunos em cada grupo) da 8ª série do Ensino Fundamental. Traçamos algumas atividades e fizemos perguntas que os alunos deveriam responder. Em algumas atividades, eles tinham dificuldades e conseqüente resistência (ou desinteresse) em responder. Mesmo assim, tivemos respostas que fluíram naturalmente. Até, para nossa surpresa, as respostas sobre simetria foram em muito bom número e de bom nível. Registramos, a seguir, uma ilustração das atividades e respostas obtidas.

Atividade:

- Desenhar um triângulo ABC. Pintá-lo.
- Desenhar uma reta r que não corte o triângulo.
- Imaginar que a reta r representa um espelho e desenhar a imagem do triângulo ABC vista no outro lado do espelho. Pinte esta imagem de outra cor.
- Com 6/1 "simetria axial" trace um triângulo simétrico a ABC em relação à reta r (clicar no triângulo original e depois na reta).

Figura 1: simetria com e sem o cabri

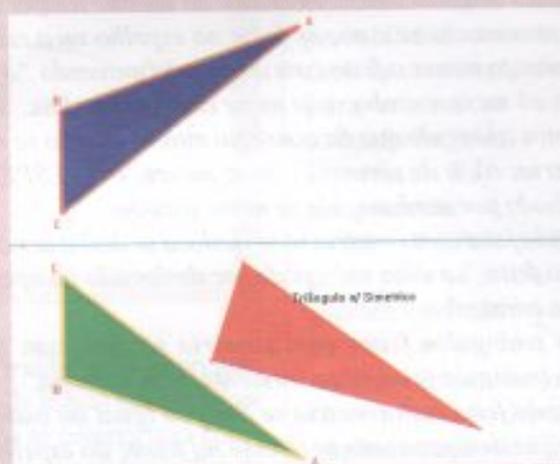
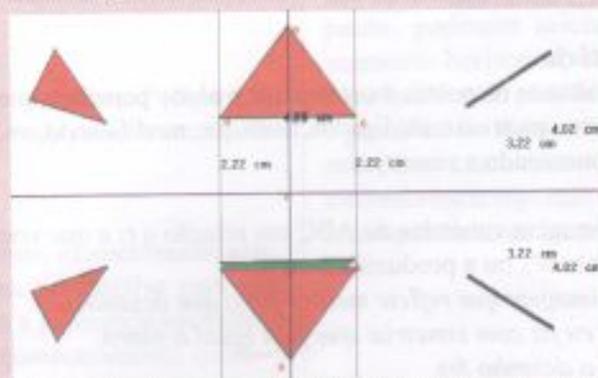


Figura 2: simetria com e sem o cabri



Comentário

O triângulo da figura 1, sem letras em seus vértices, deve ter sido feito pelo aluno e, depois, deslocado para a direita, a fim de abrir espaço para o simétrico, feito com o *Cabri*. Se isso for considerado, a noção de simetria percebida pelo aluno foi satisfatória.

Na figura 2, o aluno construiu três objetos: dois triângulos e um segmento. As simetrias do triângulo da esquerda e do segmento foram feitas com o *Cabri*. A do segundo triângulo foi feita primeiro, sem a ferramenta. O interessante foi o uso de retas perpendiculares ao eixo de simetria. As distâncias foram marcadas depois e em nada contribuíram para a tarefa desejada. Portanto, um dos elementos de simetria – as retas perpendiculares – foi usado. Mas, o outro – as distâncias – não. Entretanto, são ocasiões aproveitáveis para abrir diálogos sobre as condições de simetria.

Perguntas e Respostas

Comparar o desenho que você fez, sem o uso da ferramenta 6/1, “simetria”, com o último traçado usando a ferramenta 6/1. Coincidiram os dois triângulos?

- Não coincidiram.
- Elas não coincidiram, porque eu coloquei em distância errada.

Tente deslocar os triângulos, o que fez e aquele feito com “simetria”. O que observa? Por que acontece isto?

- O triângulo simétrico não é possível ser movimentado. Mas, o normal é possível.
- O triângulo original é movimentado; ao mesmo tempo, o feito com a simetria, movimenta-se como se fosse no espelho ou a reta.
- Eu só consigo mexer o feito com a simetria movendo “o original”. O que eu fiz, só mexe sozinho; não mexe com outros dois.
- O primeiro triângulo que fiz consegui mover, e junto se moveu o feito com simetria; só, o de simetria não se mexeu, e o “ESPELHO” não é acompanhado por nenhum; ele se move sozinho.
- O triângulo feito com simetria só se desloca se deslocarmos o triângulo superior, o feito “a olho nu”, pode ser deslocado independentemente dos outros triângulos.
- Os dois triângulos feitos com simetria se deslocam igualmente e aparece o triângulo feito, anteriormente, sem simetria.
- O triângulo feito com simetria se desloca igual ao outro, porque na “simetria” se desloca como se tivesse na frente do espelho.
- Quando eu movimento o primeiro, que fiz, o outro se movimenta e quando eu tento movimentar o feito com “simetria”, nenhum movimento.

Comentário

As três últimas respostas mostram que o aluno percebeu que o primeiro triângulo e seu simétrico estão ligados, tanto que, modificando um, modificou-se o outro, mantendo a simetria.

Qual a imagem simétrica de ABC em relação a r: a que você fez sem a ferramenta 6/1 ou a produzida com 6/1?

- Foi a imagem que reflete melhor foi a que desenhei.
- A que eu fiz com simetria, que fica igual a outra.
- A que o desenho fez.

Quais condições deveriam ser seguidas para que o triângulo desenhado sem o uso da ferramenta 6/1 seja simétrico.

- Construir retas e pontos, medindo a partir de uma reta, com medidas iguais, através do ponto.
- Tem que ter distâncias iguais em relação à reta.
- Que todo o ponto de cada figura tivesse distâncias iguais até a reta.
- Eu tenho que passar a figura para o outro lado e deixar um espaço.
- Para fazermos sem usarmos a ferramenta 6/1, eu usei retas (Nota do pesquisador: O termo “reta”, usado por muitos alunos, significava segmento de reta), procurei as medidas de distância, procurei a área do triângulo original e movi a segunda, até ficar com as mesmas medidas do original.

Comentário

O objetivo das atividades e das perguntas sobre simetria foi construir conceitos relativos às regras geométricas, necessárias para traçar objetos geométricos simétricos em relação a um eixo. Não foi possível detectar quanto ajudou o fato de propor um espelho em lugar do eixo. A intenção de imaginar um espelho foi aproximar o aluno de coisas familiares.

Se levarmos em conta as dificuldades de se expressar, de forma completa e clara, as idéias surgidas sobre simetria, depreendidas das afirmações dos alunos, indicam que o procedimento foi um bom caminho. Mesmo que se cogite que isso é possível fazer sem uso do *Cabri* ou outro software, é certo que, com ele, há mais facilidade de manuseio e está mais de acordo com a contemporaneidade de grande parte dos alunos. A

dependência do objeto desenhado por simetria em relação àquele traçado primeiro foi uma constatação que se nos afigura importante, exatamente para formar o conceito de simetria.

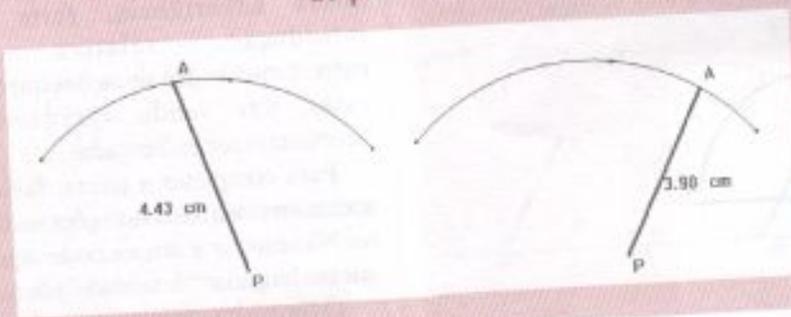
Mesmo que estivéssemos em atividade de pesquisa e, por consequência, devéssemos usar o tempo necessário para observar melhor e chegar a conclusões com maior segurança, na prática isso nem sempre aconteceu. O tempo que o aluno se mantém concentrado é pequeno: em média, 20 min. Depois disso houve a necessidade de quebrar o ritmo: dar uma explicação coletiva, traçar alguma coisa para todos, usando o "canhão" ou, simplesmente, chamando a atenção, de forma oral, sobre cuidados e desvios que provocassem erros.

UMA PRIMEIRA TENTATIVA DE CONSTRUÇÃO DO "LIMPADOR"

No intuito de construir o limpador de pára-brisa, foi proposto o traçado de um arco (com uso da ferramenta *arco*), um ponto P fora do arco e abaixo dele, um segmento de reta com uma extremidade no ponto P e a outra sobre o arco, no ponto A. O visual da tela do computador era como o da figura 1.

Ao implementar a animação do ponto A, a impressão causada no aluno foi a do movimento de um limpador de pára-brisa. Todos os estudantes foram unânimes em afirmar que o que estavam vendo era o movimento de um limpador de pára-brisa. Efetivamente, esta era a impressão visual.

Figura 1: posições diferentes da haste de um "limpador" de pára-brisa



Constatamos, por diversas vezes, que o aluno é "traído" pela impressão visual. Nesta oportunidade não foi diferente. A falta de hábito em examinar detalhes impediu-o de verificar que o "limpador" não se comportava como um limpador "de verdade". Haveria necessidade de provocá-los, a fim de desestabilizar sua convicção (PIAGET, 1983). A forma que encontramos foi fazendo a pergunta:

Qual o comprimento da haste em duas posições diferentes? (figura 1). E outra pergunta: já viram a haste de um limpador de pára-brisa mudar seu comprimento durante o movimento?

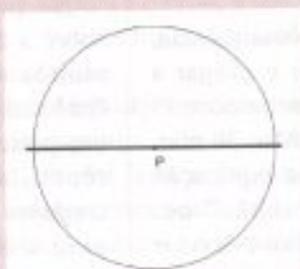
A pergunta os surpreendeu de tal forma que ficaram, momentaneamente, sem ação e em silêncio completo. Era uma ótima perspectiva para que explicações fossem aceitas. Por esta porta entraria a geometria necessária para que o mecanismo a ser construído tivesse comportamento como o limpador real.

A SEGUNDA TENTATIVA E A GEOMETRIA NECESSÁRIA

Se perguntarmos aos alunos sobre o que é uma circunferência, muitos deles, como foi o caso, lembrarão que já foi definida e, com um pouco de ajuda, conseguem repeti-la: *circunferência é o conjunto de pontos de um plano, cuja distância até um ponto, chamado centro, é constante*. Entretanto, não é feita ligação sobre o uso deste conceito na construção do limpador, para manter o mesmo comprimento de haste. Uma ótima estratégia metodológica, para que conceitos possam ser entendidos, é que os mesmos tenham que produzir efeitos no momento em que são apresentados. Assim, se o conceito de circunferência for apresentado e, junto com ele, algum mecanismo no qual tal conceito é utilizado como, por exemplo, seria no percurso do ponteiro de um relógio, então, tal conceito tem muito maior probabilidade de ser assimilado. No caso da construção do limpador de pára-brisa, o conceito de circunferência deve produzir efeito imediato. E isso facilita sua compreensão.

São diversas as formas pelas quais pode-se iniciar a exploração geométrica. Poderia ser assim: Antes de iniciar alguma construção, realizar algum planejamento do que fazer primeiro; depois, pensar na implementação de ligações entre as figuras geométricas para produzir os efeitos desejados. Na construção em pauta, podemos iniciar com um segmento horizontal, o qual será a base inferior do pára-brisa. Marcar o ponto médio P do mesmo e, tendo este ponto como centro, traçar uma circunferência cujo raio determinará o comprimento da haste.

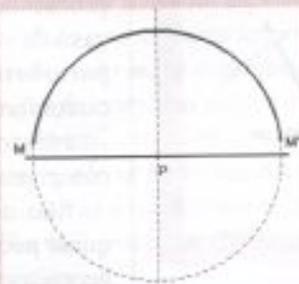
Figura 2: segmento – ponto médio – circunferência



Uma das extremidades da haste (constituída de um segmento) do limpador deverá ser fixada em P. A outra extremidade deverá se movimentar sobre a circunferência. Será isso mesmo? Se não for imposta nenhuma outra condição, a haste ficará dando voltas na circunferência. Isso aconteceu para vários alunos. E eles logo perceberam que a extremidade móvel da haste não poderá deslocar-se por toda a circunferência. Haveria necessidade, portanto, de limitar o trajeto, restringindo-o a um arco de circunferência (será conveniente referir-se ao conceito de arco e de sua implementação).

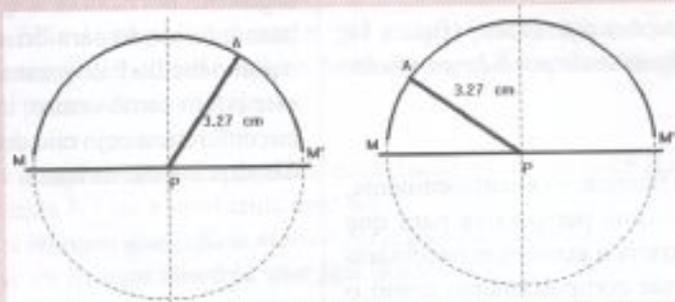
A simetria também será necessária. A haste do limpador, geralmente, não se desloca até a base do pára-brisa. Fica um pouco acima dela. Uma ferramenta para isso é a simetria axial.

Figura 3: pontos M e M' simétricos em relação à reta vertical (simetria axial) – arco



A haste deverá ser fixada no centro P. Seu comprimento constante está garantido se a extremidade A for posta sobre o arco. Pelo menos, aquele efeito indesejado, exibido na fig. 1, de variar o comprimento da haste estava eliminado.

Figura 4: haste e seu trajeto com comprimento constante

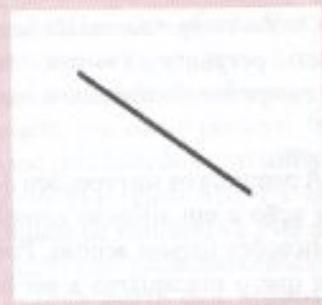


Mais uma providência: testar o funcionamento do mecanismo. Assim, os alunos foram incentivados a verificar se o funcionamento era o projetado. Neste teste não costumamos usar a ferramenta *animação* para movimentar a extremidade A. Usamos o *ponteiro*. A razão disso está na tentativa de conduzir o aluno a ser mais reflexivo e agente do seu invento. Assim, consideramos que a ação feita com *animação* sobre o ponto A produz uma atividade mais autônoma do que o *ponteiro*, o qual necessita da ação do aluno para produzir movimento. Uma vez realizado o teste com o *ponteiro*, fazemos o teste com *animação* sobre o ponto A. Se alguma coisa não funcionar de acordo com o esperado, teremos mais uma lição a enfrentar: a necessidade de rever. A busca do erro praticado não é lúdica. Por isso, nossa advertência, feita na introdução, relativa ao enfrentamento das situações quando estas, não sendo agradáveis, necessitam ser enfrentadas.

Para completar a tarefa, faltava apenas a retirada das construções auxiliares. Não é retirar, e sim, *esconder* aquilo que um limpador "de verdade" não tem.

O limpador simples deverá ter o aspecto como o da figura 5, mas, que pode movimentar-se como se fosse um limpador de pára-brisa.

Figura 5: haste de um limpador de pára-brisa



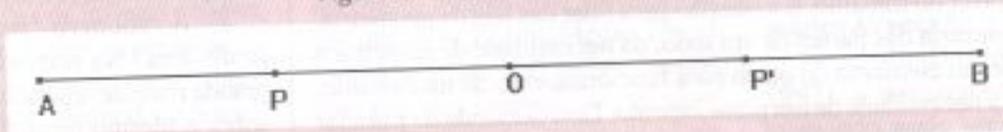
Até aqui, a construção é demorada e o aluno necessita ser estimulado com a perspectiva final de vislumbrar alguma coisa que se movimenta e que pareça com a construção proposta. Até convém que algum tempo seja gasto na contemplação da obra. Conceda-se tempo para que incremente o que fez. Coisas como engrossar a haste, colocar alguma coisa na extremidade da mesma e que se movimenta junto, desenhar o pára-brisa, afinal, permita-se que a imaginação trabalhe.

DOIS LIMPADORES SINCRONIZADOS: hora de criatividade
É possível que, na sala de aula, tenha alunos alertando sobre a presença de dois limpadores de pára-brisa. Em oficinas apresentadas em eventos de Educação Matemática, isso ocorreu. Se não ocorre de forma espontânea, chamamos que tem que ser provocada. Mesmo porque, construído o limpador

simples, é natural que se queira desenvolvê-lo, criando novas opções.

Com duas hastes sincronizadas.
Para iniciar, construímos um segmento de reta AB , que indique a base do pára-brisa. Marcamos o ponto médio O , de AB , e o ponto médio P , de AO . Por *simetria central*, marcamos P' simétrico de P em relação a O . A figura que deveremos ter é esta:

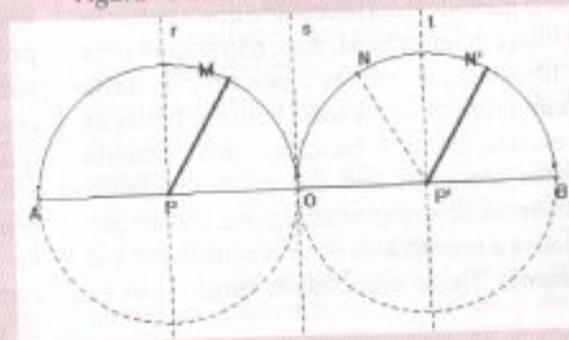
Figura 6: simetria axial de pontos



Construindo circunferências com raios iguais ao comprimento da haste que queremos, e centros em P e P' , desenhando arcos sobre estas circunferências que sejam o percurso da extremidade livre das hastes,

obteremos uma aparência de um limpador de movimento sincronizado.

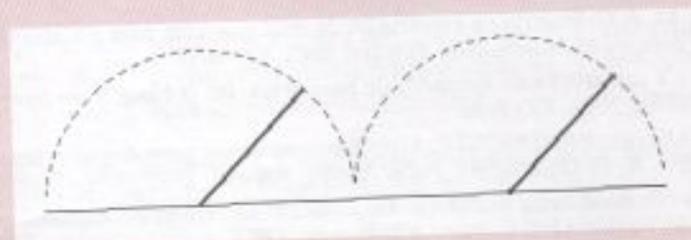
Figura 7: duas hastes sincronizadas



Na construção da figura 7, foi usada a *simetria axial*. Alertamos, especialmente, este uso na construção do ponto N' , o qual é simétrico a N em relação à reta t . A haste definitiva direita será $P'N'$, não $P'N$.

Escondendo as construções auxiliares, obtemos um limpador de duas hastes com movimento sincronizado, como indicado na figura 8.

Figura 8: limpador de duas hastes



São várias as possibilidades de construir o limpador com duas hastes. Apresentamos apenas uma. Outras modalidades, os alunos poderão descobrir. O instrumental do Cabri mais usado nas diferentes modalidades de construir um mecanismo, que se aproxime de um limpador, são: *segmento, ponto médio, simetria axial, simetria central, paralelismo, perpendicularismo, circunferência, arco*. As várias possibilidades de realizar a mesma tarefa, seguindo caminhos diferentes, é um dos incentivos à criatividade e à autonomia do aprendiz. Essas possibilidades propiciam o intercâmbio de idéias.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao propor desafios, como acima, e outros, que, com alguma facilidade, podemos criar, não podemos deixar de lembrar que expectativas não alcançadas geram frustrações. Há a necessidade de interferência de colegas e do professor. Mas há, também, a possibilidade de exercitar habilidades, imaginação, autonomia, criatividade. A tarefa propicia, também, a exploração de conceitos como os de circunferência, de arcos, simetrias e outros, que surgem no decorrer do trabalho. É a ocasião para falar das leis da geometria, da ordem de primazia das partes de um todo, da necessidade de respeitar a dependência de um elemento do outro para funcionamento do mecanismo. Em resumo, há a necessidade de um planejamento. Essa demanda de planejar é, evidentemente, propícia para desenvolver capacidades. O “construtor” necessita refletir sobre o que faz, na ordem que o faz e como “ligar” um objeto ao outro, para poder usufruir a satisfação de vencer o desafio.

Na decisão do que fazer e em que ordem, é que se faz presente a necessidade de aprender geometria. Para tornar mais claro o que acabamos de afirmar, ilustramos: usar um arco como percurso da extremidade do limpador não é suficiente para que a haste mantenha o mesmo comprimento. Para que o comprimento da haste seja mantido, será necessário que o percurso da sua extremidade faça parte de uma circunferência, mas, não poderá ser a circunferência inteira. Por isso, teremos que colocar o percurso da haste sobre um arco e este sobre uma circunferência. Ficaram bem explícitas as ocasiões para exploração de conceitos de circunferência, raio, arco, simetria e outros. Como o benefício destes conceitos tem que produzir efeitos imediatos, pode-se dizer que a exigência de atributos de alguma construção antecede o conceito. Ilustrando: houve a necessidade de uma construção que mantivesse a medida de um segmento. Desta necessidade surge o uso da circunferência e de seu conceito.

Entendemos que o professor continua como um ator insubstituível no ambiente de aprendizagem. Mas, entendemos que este ator deverá perceber que, ao não se atualizar, estará se eximindo de exercer seu papel de condutor

do processo do ensino-aprendizagem (BORBA; PENTEADO, 2003).

Por fim, e sem desmerecer o software, mas, também, sem supervalorizá-lo, lembramos que ele não faz demonstrações, mas, estas poderão ser provocadas por ele. Ao serem provocadas pelo aluno, a demonstração terá outro significado. Se conseguirmos que sejam provocadas pelo aluno, o significado deste fato vai bem além do ato de demonstrar. Ao solicitar isso, manifesta o desequilíbrio do qual Piaget fala e, portanto, a necessidade de equilibrar-se (PIAGET, 1983).

E o socorro pedido pela professora? Na resposta, corremos grande risco de repetir idéias já ditas sobre o mesmo tema. E não temos nenhuma preocupação quanto a isto. Obter a adesão do aluno, com nossas preocupações de um bom aprendiz, não depende apenas de boas propostas. Há outros fatores que só podem ser percebidos com acurado exame de turma e do que desperta seu interesse: a economia da região, preocupação daquela sociedade, suas diversões, prestações de serviços, os interesses do momento... O que fizemos aqui foi apresentar propostas com potencial de, também, ajudar a despertar o interesse do aluno. Mas, não há como ter certeza do resultado. Entretanto, não se pode deixar de tentar essa ou outras formas. É essa busca constante que, também, sustenta a profissão de colaborar com o ensinar e aprender.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALDIN, Y. Y.; VILLAGRA, G. A. L. *Atividades com Cabri-Géomètre II*. São Carlos: EdUFSCar, 2002.
- BORBA, M. de C. de; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- CASSOL, A. Desafios: Uma Estratégia para Ensinar e Aprender. *Educação Matemática em Revista*, nº 1, Rio Grande do Sul, maio 1999. p. 17-22.
- CASSOL, A.; HAMMER, M. A Geometria na construção de uma gangorra com o Cabri Géomètre II. In: *8º Egem - Encontro Gaúcho de Educação Matemática*, Pelotas, 2003. CD-Rom.
- _____. O Cabri e a construção do limpador de pára-brisa. In: *II Congresso Internacional de Ensino da Matemática*. Canoas: Ulbra, 2003. CD-Rom.
- DWYER, D. C.; RINGSTAFF, C.; SANDHOLTZ, J. H. *Ensinando com tecnologia: criando salas de aula centradas nos alunos*. Trad.: Marcos A. G. Domingues. Porto Alegre: Artmed, 1997.
- PIAGET, J. *Os Pensadores: Problemas de Psicologia Genética*. 2ª ed. Trad.: Nathanael C. Caixeiro, Zilda A. Dacir, Célia E. A. Di Piero. São Paulo: Abril Cultural e Industrial, 1983.