

ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO NA SALA-DE-AULA

Começemos com uma pergunta: por que é que o ensino da álgebra feito daquela maneira tradicional — que também chamamos de "formalista"-funciona para alguns alunos e alunas, mas não funciona para outros tantos? Por que é que muitos dos que são capazes de lidar com a álgebra formal, nunca a utilizam para resolver problemas, a menos que explicitamente solicitados?

Neste artigo, eu não vou tentar responder a estas perguntas diretamente. Vou, ao invés, sugerir uma atividade para a sala-de-aula. Enquanto vocês e seus alunos e alunas trabalham nela, sugiro que você vá pensando um pouco naquelas perguntas. E eu não me surpreenderia se, ao final do trabalho, as perguntas parecessem mais acessíveis do que quando vocês começaram.

Primeiro Bloco

Você acha que seus alunos e alunas de quinta e sexta séries são capazes de lidar sem dificuldade com expressões literais? Não? Então vamos tentar uma coisa.

Começamos com uma situação absolutamente simples, representada na figura 1.

Temos dois tanques de mesma capacidade, que chamamos de T_1 e T_2 . No tanque T_1 há um certo tanto de água, e no tanque T_2 há um outro tanto de água, menos que em T_1 . Você diz aos alunos e alunas que para completar T_1 seriam necessários mais 3 baldes de água, e para completar T_2 seriam necessários mais 7 baldes de água. Estes números de baldes faltando poderiam ser outros maiores, se você quiser; o que importa é que eles entendam a situação.

Rômulo C. Lintz

Depto. de Matemática - UNESP - Rio Claro - SP

Pronto. Pode começar.

Como? O que? É verdade! Começar o que? Eu ainda não falei qual é o problema ... E nem vou falar, simplesmente porque não há um "problema" para ser resolvido. A atividade é a seguinte: vamos falar a respeito da situação dos tanques. Eu sugiro que, antes de continuar a leitura, você gaste uns minutos pensando sobre coisas que se pode falar a respeito da situação dos tanques.

Intervalo

É Este intervalo também é para "forçar" você a pensar um pouco sobre os tanques. Mas aproveite para dizer umas outras coisas. Por exemplo: que esta atividade foi trabalhada com duas classes da sexta série da Escola de Aplicação da USP, em 1990 e, também, com um grupo de alunos ingleses. Eu trabalhei assim: primeiro em pequenos grupos, de dois ou três alunos. Depois, o trabalho dos grupos, sendo comunicados para o grande grupo, força os alunos e alunas a falar uns com os outros e a registrar tudo que vão dizendo, mesmo que não estejam muito seguros de estar certo ou não.

Na fase da comunicação do que os grupos fizeram, aí a regra geral é um falar de cada vez, embora aconteçam discussões espontâneas muito interessantes, que não precisam ser "cortadas". Jogo de cintura em coordenar trabalho em grupo ajuda, é claro, mas esta atividade é dirigida o bastante para que não seja uma coordenação difícil.

Segundo Bloco

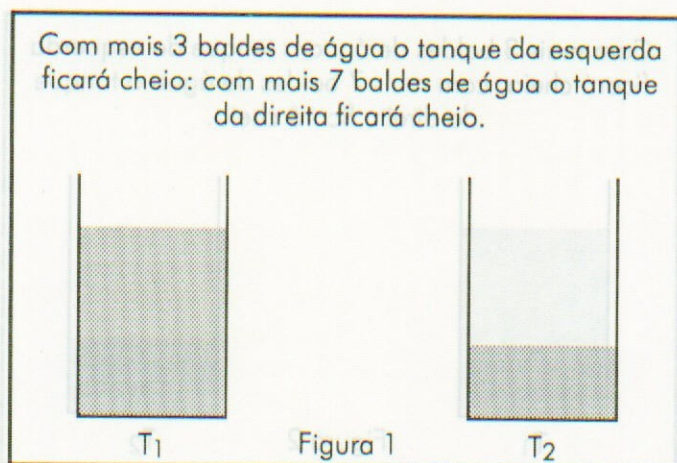
Já pensou? Vejamos ... Você de blusa azul. O que você quer dizer sobre a situação dos tanques? Sei, que T_1 é igual a T_2 . Certo.

Não, não! Nada de ficar dizendo que essa é óbvia demais! Ninguém falou que o óbvio não pode ser dito. Na verdade, é de tanto não discutirmos "o óbvio" nas aulas de Matemática que muitos alunos se perdem.

"É óbvio" que num segmento de reta há infinitos pontos... "É óbvio" que um quadrado é um quadrado mesmo que esteja "inclinado" ... O óbvio só se torna óbvio depois que é dito e examinado e, muitas vezes, a constatação de que algo "era" óbvio pode ser fonte de grande prazer intelectual, como quando achamos a solução simples para um problema que nos desafiava há dias.

De volta. Você deve ter notado que me aproveitei um pouco da situação. É claro que aquela primeira afirmação é óbvia. Mas podemos fazer um bom uso dela; podemos usá-la como motivo para estabelecer uma notação: "Certo, sei que T_1 é igual a T_2 ; alguém discorda que eu escreva $T_1 = T_2$ para dizer isto?" É óbvio que ninguém vai estranhar.

Quem quer dizer outra frase? A senhora aí... sim, a senhora que ajeitou os óculos, poderia falar mais alto? Um, sei, colocando mais sete baldes de água em T_2 e três baldes de água em T_1 , eles ficam com a mesma quantidade de água. Certo. E como podemos escrever isto de forma mais simples? $T_2 + 7$ baldes = T_1 mais 3 baldes. Eu acho que tem alguma coisa errada aí, pois acabamos de concordar que $T_1 = T_2$... É... Parece que temos um problema de notação. Não seria melhor se tivéssemos um nome especial para a água em cada tanque? Será que posso usar X e Y, X para a água em T_1 e Y para a água de T_2 ? Vamos completar o desenho.



Bem, agora fica mais fácil evitar a con-

fusão: $Y + 7 \text{ baldes} = X + 3 \text{ baldes}$. Eu estou vendo que o Professor Paulo e o Professor Bigode, aí no fundo, estão conversando. Será que é sobre os tanques? Ah! Vocês não gostaram de eu ter usado a palavra "baldes"? Parece que a Professora Solange também reclama que "baldes" não é muito formal, mas o Professor Nesselman está dizendo que a notação sincopada já teve sua glória em outras épocas. Claro, Paulo, podemos usar b ao invés de "baldes". Todo mundo entendeu o que é o b ? É "baldes". Então a frase $Y + 7 \text{ baldes} = X + 3 \text{ baldes}$ vira $Y + 7b = X + 3b'$.

Escrita a frase está, mas quem disse que ela está correta com relação aos nossos tanques? Precisamos de uma justificação que diga por que acreditamos que a frase está correta. Estão sugerindo que ' $Y + 7b = 3b'$ ' está correta porque "se juntamos 7 baldes de água a Y nós completamos T_2 , e se juntamos 3 baldes de água a X completamos T_1 , e T_1 e T_2 são iguais. Alguém discorda desta justificação?

Intervalo

Até aqui demos três passos, todos igualmente importantes: (1) apresentar a situação e a atividade; (2) estabelecer uma notação; (3) estabelecer que, para cada frase gerada, iremos também gerar uma justificação, que diga por que a frase está correta.

Ao apresentar a atividade, não devemos querer nos certificar, totalmente e desde o início, que todos os alunos e alunas entenderam tudo, aos poucos e, na medida em que vamos solicitando que todos falem, vamos tendo oportunidade de fazer esta verificação e esclarecer as dúvidas. É por isso que é tão importante circular pelo grupos e acompanhar, nem que seja um pouco, o trabalho de cada um. Podemos, também, contar que os próprios alunos vão tirar muitas dúvidas de seus colegas,

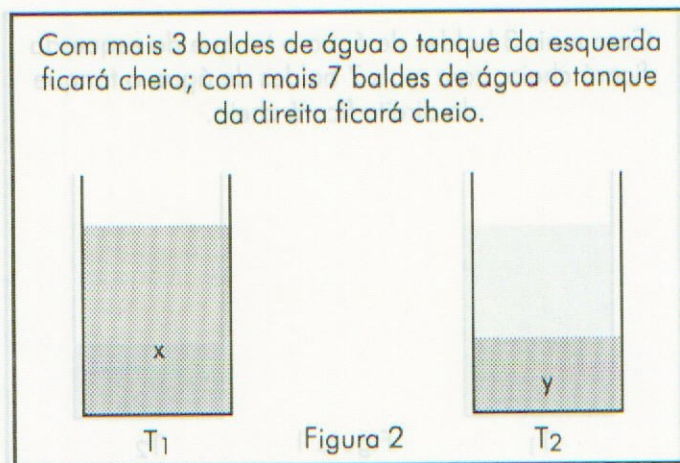
já que a falta de entendimento da atividade pode levar a discordância entre eles.

Quanto à notação, esta é uma parte chave. Talvez alguns dos leitores estejam achando que minha abordagem foi muito diretiva, mas eu tenho um argumento forte. Tudo o que fiz foi indicar aos alunos que eu, professor, considero satisfatório a prática de usar letras para indicar quantidades. Podemos comparar esta situação com o uso de letras para escrever palavras: se deixássemos nossos alunos usando ideogramas para comunicação escrita, sem intervenção nossa no sentido de chamar a atenção deles para o mundo de palavras que existem à nossa volta, quanto tempo eles levariam até chegarem à escrita habitual? Eu diria

que eles, como indivíduos, não chegariam nunca a ela. Pode-se argumentar que eles haviam visto palavras escritas com letras, ou que em breve iriam ver, e é aqui, precisamente, que gosto de meu argumento: onde, em nossa vida cotidiana, temos oportunidade de ver uma nota-

ção literal usada para quantidade? Quase em nenhum lugar. Acredito que a escola mostra-se como um lugar privilegiado neste aspecto; acredito também que "ser econômico" na notação não é um princípio que "brote naturalmente". Se o professor prefere que os alunos percebam lentamente que ele e o resto de uma certa coletividade, na qual está sendo inserido, valorizam este princípio, tudo bem, mas é ingênuo acreditar que o uso de letras no lugar de palavras, no tipo de situação que estamos examinando, envolva algum profundo dilema da teoria do conhecimento.

Aliás, penso que é muito ao contrário. De tanto fazer mistério a este respeito, de tanto acreditar que o uso de letras, com a finalidade com a qual estamos usando até aqui, só pode ser feito por pessoas que já atingiram o "perío-



do operatório formal", é que vamos atrasando sua introdução de tal forma, que, quando o fazemos, as dificuldades se amontoam. Já houve quem observasse, corretamente, eu penso que, se fôssemos tomar à risca os níveis de desenvolvimento intelectual que o modelo piagetiano propõe, só começaríamos o ensino da língua escrita aos 14 anos de idade.

Você sabia que um russo, V.V. Davydov, fez uso de notação literal para trabalhar com relações quantitativas, numa classe de crianças de 8 anos?

Agora, a importância das justificações.

Na atividade que estou apresentando, as justificações não são importantes só para saber se o aluno "sabe de fato o que está dizendo. Este tipo de uso para as justificações não é dos mais interessantes; é o que muitos professores e professoras fazem quando dão errado em questões de prova para o aluno que resolve um problema sem "escrever a equação". Há algo de muito mais importante nas justificações. É

que através delas, e apenas através delas, podemos saber por que o aluno acredita no que acredita, isto é, como é que ele está pensando, como chegou a sua conclusão, qual a lógica das operações que está efetuando. No próximo bloco, você verá de que modo isto é essencial, e de que forma o trabalho com as justificações oferece a oportunidade de se superar as resistências e dificuldades com a manipulação direta de expressões literais.

Terceiro Bloco

Deve estar claro, a esta altura, que, nesta primeira fase do trabalho, estamos interessados em gerar frases sobre a situação dos tanques e gerar justificações para estas frases. No quadro abaixo apresento, junto com as que já temos, outras frases e justificações geradas pelos alunos.

Observe que as justificações são sempre relativas à situação do tanque: na justificação de cada nova frase é feita referência a um núcleo, que é a situação dos tanques. Esta

Frases X Justificações

1) $T_1 = T_2$

Os tanques são iguais.

2) $Y + 7b = X + 3b$

Se juntamos 7 baldes de água a Y, completamos T₂, e se juntamos 3 baldes de água a X completamos T₁, e T₁ e T₂ são iguais.

3) $Y + 4b = X$

A diferença entre X e Y é de 4 baldes, pois para completar T₂ faltam 7 baldes, e para completar T₁ faltam só 3.

4) $Y + 6b = X + 2b$

Juntando 6 baldes a Y ele fica com dois baldes a mais que X, e juntando 2 baldes a X eles ficam iguais.

5) $Y + 2b = X - 2b$

Y + 2 baldes vai encher o tanque com 5 baldes faltando. E se em X há 3 baldes faltando, e fazemos -2, fica -5.

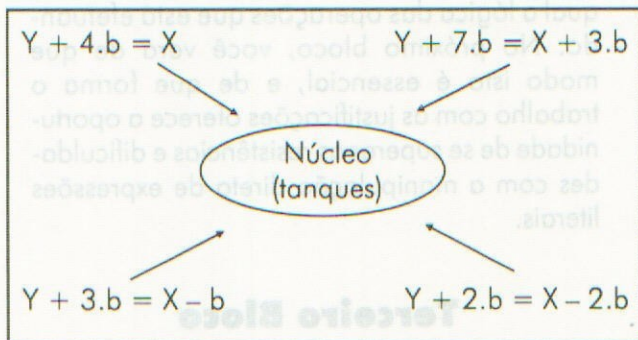
6) $Y + 3b = X - b$

4 baldes vão estar faltando em Y, e em X estão faltando 3; se um outro ficar faltando, também serão 4 faltando.

7) $Y = X - 4b$

A diferença entre X e Y é de 4 baldes.

nucleação é característica do modo de produzir justificações que estamos empregando. Veja o diagrama abaixo:



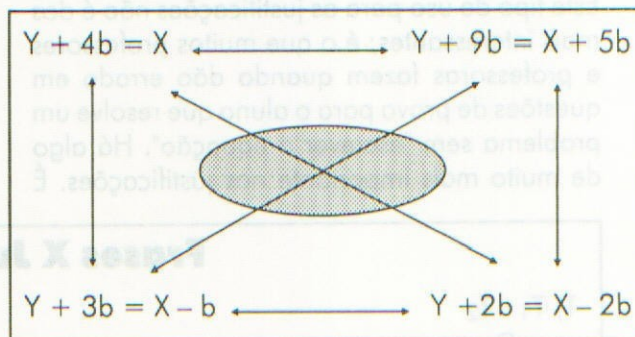
Podemos ir além de gerar e justificar frases. Podemos, por exemplo, procurar agrupar frases que expressam uma mesma situação, como é o caso das frases (3) e (7) : é na justificação "a diferença entre X e Y é de quatro baldes" que podemos perceber que as duas frases expressam a mesma coisa. E agora perguntamos : que outra frase pode corresponder àquela justificação? É bem possível que vários dos alunos digam , corretamente, que é a frase $X - Y = 4b$. Temos aqui uma excelente oportunidade para introduzir a noção de que as três frases $a + b = c$, $b = c - a$, e $a = c - b$ são, num certo sentido, a mesma coisa, que cada uma implica nas outras duas. Esse tipo de discussão pode, é claro, ser feito com outros grupos de frase.

Quarto Bloco

Neste ponto podemos dar um passo importante, que é começar a trabalhar a transformação direta de expressões. Por que não fizemos isto de saída? Simplesmente porque é essencial garantir que as expressões as quais vamos manipular sejam plenas de significado para os alunos e alunas, e isto quer dizer que as expressões devem ser objetos que os alunos e alunas reconheçam como legítimos independentemente do processo de manipulação direta.

Agora que estamos trabalhando com expressões, que produzimos significado para elas dentro do campo semântico dos tanques, podemos propor aos alunos que inventem "regras" para transformar uma frase correta em outra frase correta. Começamos sugerindo que

transformem $Y + 7b = X + 3b$ em $Y + 4b = X$. Não se deve estranhar se os alunos disserem que " basta tirar três baldes de cada lado". Excelente! E frases como correspondendo a transformações de situações que montamos com os tanques. O melhor é que esta regra, de "tirar dois lados", pode ser aplicada a outras frases verificadas, gerando novas frases corretas. Não vou me alongar aqui, pois acredito que o leitor pode pensar em outras regras. Mais importante é observar que este novo modo de produzir justificações é completamente diferente do anterior : não ficamos sempre pensando pelo núcleo, trabalhando, ao invés, com as regras, que podem ser pensadas como princípios que obedecem às expressões que geramos. O diagrama abaixo ilustra como mudou a situação :



Você deve já ter notado que este segundo modo de produzir justificações é bem próximo daquele que chamamos de pensamento algébrico, no qual a manipulação de expressões é feita apenas com base em propriedades da igualdade em relação às operações aritméticas. É essencial, no entanto, que os alunos reconheçam essa diferença entre os dois modos de produzir justificações que eles estão usando e é por isso que, mesmo depois da invenção das regras para manipulação direta, continuei pedindo que cada nova frase fosse justificada dos dois modos, uma justificação com referência aos tanques e outra por transformação de alguma frase já justificada.

Apartir daqui há muitas possibilidades. Eu, em particular, gostei de propor desafios do seguinte tipo: dou uma frase incompleta, por exemplo ' $Y - 2b = \dots$ ', peço que os alunos gerem a frase completa. Muitas coisas interes-

sante pode acontecer, como quando pedi que, a partir da frase ' $2a - b = x$ ', escrevessem outra frase onde só aparece a de um dos lados, e uma aluna escreveu... ' $a = x - b - a$ '!

Uma outra possibilidade é dar valores para X e Y e pedir que achem o valor de b , ou dar o valor de b e ver o que dá para descobrir. Ou outras combinações. O interessante é pedir que usem as transformações de expressões que estavam usando antes.

Bloco Final

Não preciso dizer que muitos outros contextos podem servir para este tipo de atividade. Devemos, no entanto, manter os olhos no que é principal:

(I) que as frases a serem diretamente transformadas devem ter significado, devem ser objetos para os alunos;

(II) que, em geral, há mais de um modo de produzir significado para novas frases, diferentes modos de se produzir justificações, do que a transformação direta apenas, e os alunos têm que estar conscientes disto;

(III) que é importante trabalhar em situações em que a qualificação é genérica, para que os alunos possam concentrar-se nos métodos e não em resultados numéricos.

Este último ponto é importante o bastante para que eu sugira uma releitura deste artigo com ele em mente. Procure comparar a atividade que propuser com uma situação em que os alunos tivessem um problema "com números" para resolver. Vale a pena experimentar e ver o que acontece...

Para terminar, vou colocar uma questão: a frase ' $Y + 1007b = X + 1003b$ ' pode

ser obtida por transformação direta, mas certamente não pode ser interpretada na situação dos tanques. Como você faria uso desta situação?

Pense também no uso de balanças de dois pratos para trabalhar na resolução de equações: que tal tentar "montar" uma balança a equação $3x + 100 = 10$? Que relação você vê entre esta situação e do parágrafo anterior?

Boa aula!

Pense também no uso de balanças de dois pratos para trabalhar na resolução de equações.

Indicação de leituras complementares:

Lins, R.C. (1993) Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases de pesquisa, Revista de Educação Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - São Paulo, ano 1, número 1, setembro.

Lins, R.C. (1994, a aparecer) O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da Álgebra e do Pensamento Algébrico; Revista Dinamis, Fundação Universidade Regional de Blumenau, julho.

