

TOMANDO O ENSINO DA **GEOMETRIA** EM NOSSAS MÃOS...

Geometria Euclidiana - a grande excluída

● Homem faz, desde os tempos pré-históricos, uso da imaginação para compor suas imagens visuais e mentais, traduzindo, em desenhos, não somente as imagens reais da natureza a sua volta, como também, as imagens mentais relacionadas com suas emoções e com seus sentimentos, expressão de seu mundo interior. Foi da necessidade do Homem em compreender e descrever o seu meio ambiente (físico e mental), que as imagens, representadas através de desenhos, foram lentamente conceitualizadas até adquirirem um significado matemático, na Geometria e uma forma, nas Artes.

Das necessidades práticas das sociedades, que viviam às margens de grandes rios como o Nilo, o Eufrates e o Ganges, de demarcar, delimitar e quantificar as superfícies alagadas pelas enchentes e de calcular custos e impostos relativos as áreas dessas superfícies, foram sendo formadas e estabelecidas as idéias geométricas. Assim, teve origem uma geometria utilitária caracterizada pelo traçado de desenhos de formas, pelo estabelecimento de fórmulas e pelo cálculo de medidas de compri-

Ana Maria Kaleff

Depto. de Geometria UFF - Niterói - RJ

mento de área, de volume, etc. Foi, no entanto, com a compilação desses conhecimentos feitas por Euclides (300 A.C) nos livros "Elementos", que esses conhecimentos foram apresentados, pela primeira vez, de forma estruturada. Esta forma partia de conceitos primitivos (ponto, reta e plano), de axiomas ou postulados (considerados verdades estabelecidas por si mesmas) e de algumas definições. Da combinação desses elementos através de leis da lógica usual, estabeleceram-se verdades (teoremas) que podiam ser constatadas através de seqüências lógicas de raciocínio, nas quais a veracidade de cada passo do raciocínio envolvido podia ser verificada. Os conceitos e as relações geométricas assim estruturados formam a Geometria Euclidiana.

A Geometria Euclidiana tornou-se o modelo descritivo do Universo físico da Antiguidade e sua forma de apresentação e encaminhamento lógicos, a qual denominamos método axiomático dedutivo, se tornou o modelo lógico-filosófico da cultura ocidental. Apesar de alguns questionamentos, estes modelos perduraram até o século passado, influenciando a longa história evolutiva do conhecimento ocidental, levando ao aparecimento das Geometrias não-Euclidianas, que embasaram os conhecimentos da Física Relativista e revolucionaram as Ciências do nosso século.

Durante séculos, a Geometria foi ensinada na sua forma dedutiva, até mesmo para adolescentes que quase sempre recorriam à memorização (decorando) para enfrentar as dificuldades lógicas apresentadas pelo método dedutivo. Ainda assim, a Geometria formava a base das Ciências Exatas, da Engenharia, da Arquitetura e do desenvolvimento tecnológico. A partir da metade do nosso século porém, o chamado movimento da "Matemática Moderna" levou os matemáticos a desprezarem a abrangência conceitual e filosófica de Geometria Euclidiana, reduzindo-a a um exemplo de aplicação da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra Vetorial (para mais esclarecimentos sobre

este movimento ver Carvalho, 1988). Desta forma, a Geometria Euclidiana foi praticamente excluída dos programas escolares e também dos cursos de formação de professores de primeiro e segundo graus, com conseqüências que se fazem sentir até hoje. Em muitas escolas de primeiro grau, o ensino da Geometria não só é confundido com o do Desenho Geométrico, como também as suas aulas são ministradas separadamente das de Matemática. Como conseqüência desta separação, não são professores com formação em Matemática que, na maioria das vezes, ministram as aulas de Geometria, porém outros profissionais cuja formação pode não ser adequada à tarefa em questão.

Acreditamos que seja necessário nos esforçarmos para evitar que tal situação persista em nossas escolas, voltando a Geometria Euclidiana a ocupar o espaço que lhe é devido nas aulas de Matemática, porém adequando-se o seu ensino a realidade educacional, científica e tecnológica de nossos dias.

É necessário que voltemos a tomar o ensino da Geometria em nossas mãos...

Durante séculos a Geometria foi ensinada na sua forma dedutiva, até mesmo para adolescentes que quase sempre recorriam à memorização (decorando)

Resgatando a Geometria Euclidiana

A partir dos anos setenta, iniciou-se, em todo o mundo, um movimento a favor do resgate do ensino da Geometria, visando ampliar sua participação na formação integral do educando. Dentre os objetivos a serem alcançados foram priorizados os seguintes:

(a) induzir no aluno o entendimento de aspectos espaciais do mundo físico e desenvolver sua intuição espacial e seu raciocínio espacial;

(b) desenvolver no aluno a capacidade de ler e de interpretar argumentos matemáticos, utilizando a Geometria como o meio para representar conceitos e as relações Matemáticas;

(c) proporcionar ao aluno meios de estabelecer o conhecimento necessário para auxiliá-lo no estudo de outros ramos da Matemática e de outras disciplinas, visando uma interdisciplinaridade dinâmica e efetiva;

(d) desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção do seu pensamento lógico, preparando-o para os estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade.

No que se segue, teceremos algumas considerações sobre esses objetivos recorrendo a atividades didáticas que fazem uso de materiais concretos, dando ênfase, porém, ao primeiro deles, por nos parecer o mais negligenciado no nosso meio escolar.

Considerações sobre o raciocínio espacial.

Muitas vezes realizamos com nossos alunos atividades que são encaradas como simples divertimentos tais como quebra-cabeças, jogos de montar, pinturas, colagens, etc., aparentemente mais indicadas as aulas de Artes do que as de Matemática. Porém, tais atividades não só são importantes para o desenvolvimento da intuição espacial e de habilidades para visualizar, desenhar, interpretar e construir, mas têm relação com a formação do pensamento geométrico dedutivo. Na grande maioria de nossas escolas de primeiro grau, contudo, não é habitual serem realizadas atividades nas aulas de Matemática que favoreçam a visualização e a percepção do espaço em nossa volta.

Embora muitos educadores afirmem que o raciocínio espacial e a Geometria estão relacionados (entendendo-se por raciocínio espacial o conjunto de processos cognitivos por meio dos quais as representações mentais de objetos, relações e transformações espaciais são construídas e manipuladas), nossa prática escolar parece indicar que não estamos conscientes de quão complexas são as relações que se estabelecem em nossas mentes e nas de nossos alunos, quando tratamos com figuras espaciais, com relações entre figuras, suas

representações, etc.

Apesar de vivermos num mundo tridimensional, a maior parte do material visual geométrico didático que apresentamos às crianças e bidimensional como, por exemplo, desenhos no papel ou no quadro-negro. Mesmo quando apresentamos fotografia e desenhos animados, os quais mostram até movimentos, ou empregamos sofisticados gráficos advindos de programas de computador, que até reproduzem objetos tridimensionais, ainda assim estamos trabalhando num ambiente bidimensional. É necessário portanto, que, tanto o professor quanto o aluno recorram ao raciocínio espacial para representar o mundo real.

Em nossa própria prática pedagógica, temos observado que poucas crianças são capazes, à primeira vista, de perceber as faces "ocultas", de um cubo desenhado no quadro-negro, mesmo quando usamos linhas pontilhadas e sombreados para indicá-las. As pesquisas feitas por Alan Bishop nos revelam que as representações de um objeto tridimensional (espacial) por meio de um diagrama bidimensional (plano), como normalmente fazemos em nossas salas de aula, requerem "uma quantidade considerável de convenções que não são, de forma alguma, imediatamente reconhecidas por indivíduos de cultura não ocidental" (1979, p.137). Isto nos indica que, nas culturas ocidentais e, portanto, em nossas salas de aula, o ensino de tais convenções exige um grande cuidado, pois não podemos requerer que o conhecimento de tais convenções seja inato às crianças. A professora Sônia Castilho afirma, com muita propriedade, em um de seus artigos que :

"seria ingenuidade de nossa parte esperar que as crianças interpretassem com facilidade as representações habituais das figuras de três dimensões, onde a idéia de perspectiva é passada através de linhas pontilhadas que visam denotar a profundidade."

Em muitas escolas de primeiro grau o ensino da Geometria é confundido com o do Desenho Geométrico.

e, ainda, expressando o pensamento de uma corrente de educadores, indica como deveríamos orientar o desenvolvimento da nossa ação pedagógica:

"o que caracteriza o trabalho em Geometria nas séries iniciais é a predominância de concretização sobre a simbolização. Mais importante que "designar" e "definir", como ações meramente repetidoras das palavras e proposições que o professor fala ou escreve, é observar, descrever, comparar, tocar, construir. Esta fase inicial, se caracteriza por atividades ligadas a ação : o aluno manipula e constrói objetos das mais variadas formas para então analisar suas características físicas e geométricas". (1989.p.25)

Portanto, para que uma criança possa interpretar um desenho de um sólido espacial ou representar um sólido espacial por meio de um desenho, ela necessita de um nível adequado de abstração que deve ser desenvolvido através das atividades diversas de construção, inclusive as que utilizam materiais concretos, como argila, papel cartão, cartolina, dobraduras de papel e outros (vide AMAE, 1992a e AMAE, 1992b). A seguir analisaremos algumas atividades desse tipo, desenvolvidas no decorrer de nossa prática.

Sugestões das atividades para a representação de figuras geométricas e materiais concretos

Entre as atividades que desenvolvem o raciocínio espacial, como a construção de sólidos geométricos do tipo poliedro por meio de varetas de madeira e anéis elásticos, essas atividades devem ser apresentadas numa seqüência de etapas de dificuldade crescente. As três etapas que analisaremos a seguir, podem ser realizadas mesmo por crianças de cerca de oito anos de idade.

Inicialmente, pedimos à criança que crie figuras da sua imaginação, por meio da junção de varetas com elásticos. Com certeza, ela construirá "pipas", "balões", etc. que fazem parte de seu mundo de fantasia e tomará contato com o material que está começando a manipular. É importante que a criança vivencie esta etapa, para poder dar asa a sua imaginação e para que possa criar algo por si mesma com o novo material, o que lhe causará grande satisfação e a motivará para continuar com as construções. Atividades nas quais a criança pode exercer livremente a sua criatividade ajudam-na a se concentrar nas ações a serem realizadas posteriormente.

... ela construirá "pipas", "balões", etc. que fazem parte de seu mundo de fantasia e tomará contato com o material que está começando a manipular.

A seguir, pedimos que construa uma estrutura que represente as arestas de um determinado poliedro, a partir da observação de um modelo deste poliedro confeccionado em madeira, cartolina, ou papel cartão. É importante enfatizar que, nestas etapas iniciais, as construções não devem ser feitas a partir de desenhos do poliedro e que este deve ser uma figura bem simples, de preferência um tetraedro regular. Se, ainda assim, as crianças apresentarem dificuldades na construção, devemos orientá-las para que observem as arestas do poliedro ou até que realizem a própria construção enquanto nos observam ao construirmos a mesma estrutura. Nesta etapa de construção devemos introduzir um vocabulário geométrico simples, sem preocupação com a precisão da linguagem e muito menos com o rigor dos conceitos. A designação dos elementos que compõem o sólido deve surgir normalmente como consequência da necessidade dos alunos de darem nomes aos elementos observados (como faces, vértices, arestas, etc.) para poderem desenvolver um diálogo sobre os mesmos. Por sua vez, é importante que estejamos atentos ao uso da linguagem corrente como fator de estímulo à expansão da criatividade e da intuição do aluno. A linguagem técnica, não deve ser fator restrito e sim, ordenador no processo do desenvolvimento das idéias geométricas, devendo ser ampliada no

decorrer do processo educacional.

Numa terceira etapa, as estruturas podem ser construídas a partir da descrição ao oral do processo de construção ou alternando-se tal descrição com conjecturas sobre o mesmo. Por exemplo, para se construir a estrutura de um tetraedro, sugerimos que a criança construa um triângulo e que, com um de seus lados e mais duas varetas construa outro triângulo, então, observando o que construíram, perguntamos o que devem fazer para terminar a construção. Se as crianças apresentarem facilidade na realização desta última atividade, podemos solicitar-lhes que registrem graficamente as figuras obtidas durante a construção.

Alternativamente às varetas de madeira, podemos utilizar para a construção da estrutura de um sólido geométrico, pedaços de canudo plástico (do tipo para refrigerante) ligados por um fio de linha, que deve ser de um tipo mais grosso do que o usado para empinar pipas. Nessas construções podemos aproveitar as diferentes cores dos canudos para destacar características dos sólidos que queremos enfatizar. Algumas vezes, como no caso da construção de pequenas estruturas, podemos substituir os canudos de refrigerante por canudos de plástico rígido, do tipo usado na fabricação de pirulitos. As estruturas construídas com os canudos coloridos apresentam diversas vantagens pois, além de serem mais bonitas que as de madeira apresentam características geométricas melhores definidas e temos observado que sua beleza motiva os alunos mais avessos as tarefas manuais a colocarem mãos a obra. Devemos considerar, no entanto, que o emprego de canudos exige uma maior habilidade manual e, portanto, é indicado para crianças maiores, com cerca de dez anos.

Numa quarta etapa, as estruturas podem (vide figura 1 - para o caso de tetraedro) ser construídas a partir de desenhos de esquemas de construção das figuras. Temos observado que crianças com cerca de onze anos e que vivenciaram as atividades anteriores, conseguem interpretar os desenhos, realizando com

desembaraço as construções neles indicadas.

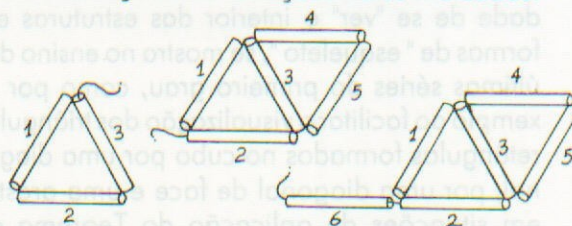


figura 1 - Esquema de construção do tetraedro.

Alguns professores estranham esta construção dos poliedros por meio das arestas, pelo fato de não privilegiar o aparecimento das faces, alegando que a estrutura obtida, apresenta somente o "esqueleto" da figura desejada, não dando idéia real das faces do poliedro. Todavia, acreditamos que a construção dos "esqueletos" seja indicada para as primeiras séries, pois o aluno pode "ver" a parte interna da figura formada e construir suas diagonais, alturas, etc. Porém, é necessário que também exploremos construções que enfatizem as faces do sólido, o que pode ser feito a partir de planificações do mesmo, traçadas sobre cartolina ou papel cartão. Na figura 2 estão traçadas duas planificações de um tetraedro regular, a) e b), enquanto c) não é uma planificação. Vale lembrar que as partes hachuradas dos desenhos não fazem parte da planificação, mas indicam partes do material destinadas a colagem das faces.

Também, é importante que a criança seja levada a questionar se os desenhos são de planificações do sólido em questão, isto é, se a partir dessas figuras desenhadas, realmente se pode construir o sólido. Outra forma de se enfatizar as faces é através de atividades de "desmonte" de caixas, isto é feito pelo recorte de algumas arestas da caixa (sem separá-las do todo) e pela "abertura" e "achamento" da caixa sobre o plano.

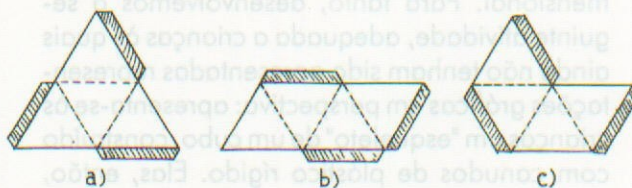


figura 2 a) e b) são planificações de um tetraedro regular; c) não é.

Uma vantagem adicional da possibilidade de se "ver" o interior das estruturas em formas de "esqueleto", se mostra no ensino das últimas séries do primeiro grau, como por exemplo ao facilitar a visualização dos triângulos retângulos formados no cubo por uma diagonal, por uma diagonal de face e uma aresta, em situações de aplicação do Teorema de Pitágoras, tão freqüentes nos exames vestibulares.

Um fato interessante, que observamos numa turma de quinta série, foi que algumas crianças ao terminarem de construir, com canudos, o "esqueleto" de um cubo, perceberam que ele não apresentava a mesma rigidez estrutural de um tetraedro que haviam construído anteriormente. Após fazerem várias conjecturas, resolveram colocar diagonais no cubo para que ele "parasse em pé", concluindo que, para isso, tinham criado diversos triângulos. A partir deste questionamento, passaram a fazer conjecturas sobre a rigidez do triângulo comparada à de outros polígonos. Para tanto construíam com pedaços de canudos, diversos polígonos e observaram as possibilidades de movimentos que apresentavam. Atividades como estas, preparam e motivam as crianças para entenderem algumas propriedades da congruência de triângulos. Podemos notar, portanto, que uma atividade realizada com uma figura espacial, desencadeou um questionamento sobre conteúdos da geometria plana.

Observamos que a característica de falta de rigidez do "esqueleto" de um cubo, pode ser utilizada como fator de motivação para a introdução de convenções do desenho tridimensional. Para tanto, desenvolvemos a seguinte atividade, adequada a crianças às quais ainda não tenham sido apresentadas representações gráficas em perspectiva: apresenta-se às crianças um "esqueleto" de um cubo, construído com canudos de plástico rígido. Elas, então, devem ser induzidas tanto a manter o "esqueleto" na sua forma de cubo, como a tombá-lo

Ao se permitir que o "esqueleto" vá tombando sobre a mesa, pode-se observar que a estrutura original do cubo se transforma numa figura plana.

sobre uma mesa, conservando, para isso, uma de suas "faces" sobre a mesma. Ao se permitir que o "esqueleto" vá tombando sobre a mesa, pode-se observar que a estrutura original do cubo se transforma numa figura plana, que pode ser facilmente reproduzida no papel. Naturalmente, devemos orientar o processo de "tombamento" da figura a fim de assegurarmos uma representação do cubo em perspectiva (como na figura 3). Alertando as crianças para a posição das arestas que ficam em contato com o tampo da mesa e que estariam ocultas, caso não se pudesse "ver" através do "esqueleto", podemos apresentá-las às convenções usuais da indicação de tridimensionalidade em desenhos, através das linhas pontilhadas que indicarão as arestas "ocultas" e conseqüentemente a profundidade. Observamos, portanto que nessa atividade, todo o processo de representação da figura espacial no plano é construído pela criança, não lhe sendo exigida nenhuma aptidão inata para a visualização das partes "ocultas" do cubo.

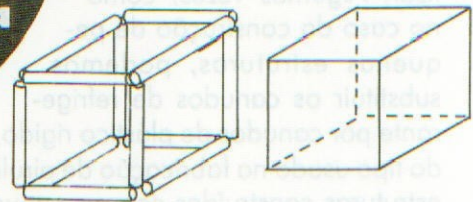


FIGURA 3 – Cubo de canudos achatados sobre o plano e sua representação em perspectiva.

Julgamos importante, ainda, mencionar que, embora tenha sido dada ênfase ao uso de materiais concretos na realização das atividades apresentadas, também foram criadas situações nas quais estava sendo incentivado o desenvolvimento de habilidades que favorecem a construção do pensamento lógico do aluno. De modo geral, isto sempre se dará quando forem desenvolvidas atividades em que o aluno necessite avaliar, interpretar e analisar informações e hipóteses, isto é, atividades que o capacitarão a conjecturar sobre afirmações ou, ainda, a refutar ou a aceitar argumentações e fatos. Assim, estaremos preparando o aluno

para ordenar seu raciocínio numa seqüência lógica, o que será fundamental para que ele possa demonstrar suas verdades e as verdades matemáticas, ainda que, nas séries do primeiro grau, isso deva se dar somente de maneira informal.

Concluindo ...

Sugerimos que, além de levarmos para as nossas escolas mais atividades que envolvam manipulação de materiais concretos, nos preocupamos com a elaboração de materiais didáticos que estimulassem, não somente, a percepção visual, mas também outras sensações e ainda a intuição, induzindo, no aluno, a manifestação da criatividade individual, o fortalecimento da sua autonomia e personalidade.

"Tomando a Geometria em nossas mãos".

BIBLIOGRAFIA

- AMAE(1992a) "Matemática em Construção". Caderno nº 1, Fundação AMAE para Educação e Cultura, Belo Horizonte.
- AMAE(199b) "Reflexões Construtivas". Caderno nº 2, Fundação AMAE para Educação e Cultura, Belo Horizonte.
- Bishop, A.J.: "Visualizing and mathematics in a pre-technological culture", Educational Studies in Mathematics, 10, p. 135-146, 1979.
- Carvalho, J.B.P.: "As idéias fundamentais da Matemática", Boletim - GEP-EM, Rio de Janeiro, 23, p. 7-24, 1988.
- Catilho, S.F.R (1989), "Geometria" - até onde a vista alcança", Revista AMAE-Educando, 203,p.24-26, Belo Horizonte.

