RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
OBSERVAÇÕES A PARTIR DO DESEMPENHO DOS ALUNOS

Antonio José Lopes
Maria Amabile Mansutti
Maria Lydia de M. Negreiros
Paulo Sergio de O. Neves
Dulce S. Onaga
Centro de Educação Matemática

A literatura sobre resolução de problemas de Matemática, no ensino primário, publicada no Brasil, é restrita. Há poucos livros sobre o assunto, e esses não se apóiam em pesquisas ou estudos sobre a sala de aula. Os artigos publicados, em sua maioria, também não são objeto de investigação, exceção feita aos produzidos através do Mestrado em Psicologia Cognitiva da UFPE, o chamado grupo de Recife, e alguns poucos casos isolados.

Quanto aos livros, devem ser citados os de Barbosa (1969) – um dos primeiros a discutir resolução de problemas, estratégias e esquemas de solução -e ainda Dante (1989), inspirado nos trabalhos de Lester (1982). Entretanto, esses livros não conseguem responder a objetivos didáticos e educacionais mais amplos relacionados à escola real, com professores e alunos reais. A tônica tem recaído sobre a classificação de problemas em algumas categorias gerais como: problemas de aplicação, problemas lúdicos, problemas de processo, problemas de lógica, etc... Tais classificações pouco auxiliam os professores na compreensão e exploração das atividades de resolução de problemas e expressam uma visão reducionista no que se refere a objetivos didáticos e educacionais pretendidos pela Educação Matemática.

O propósito deste artigo é trazer para este fórum – Educação Matemática em Revista – algumas reflexões sobre variáveis que inter-

• Equipe responsável pelo projeto Resolução de Problemas: Educação Matemática para os anos 90 (Projeto elaboração de materiais instrucionais sobre RP e formação de professores à distância), financiado pelo SPEC/PADCT/CAPES.
• Redação Final Antônio José Lopes e Maria Amabile Mansutti.

vêm nas atividades de resolução de problema, e um modo de considerá-las no trabalho de sala de aula.

O que intervém no processo de RP?

De acordo com Schoenfeld (1985a) e Fernandes (1989) o processo de resolução de problemas de Matemática envolve quatro aspectos diferentes de conhecimento:

(a) Conhecimento de fatos, de algoritmos e da Matemática em geral que cada indivíduo possui;

(b) Conhecimento de estratégias de resolução de problemas, também conhecidas por estratégias heurísticas;

(c) Conhecimento de estratégias de verificação (controle), que têm que haver com a forma como o indivíduo utiliza e gere a informação que está ao seu alcance;

(d) Sistemas de concepções/pré-conceitos (belief systems) que se relacionam com a visão que cada um tem de si próprio, da Matemática, dos problemas e do mundo geral.

Os problemas são propostos com a finalidade de verificar a aprendizagem e a aplicação de conceitos, algoritmos, propriedades e outros fatos da Matemática.

As práticas de ensino mais tradicionais ocupam-se quase que exclusivamente dos aspectos do item "a". Os problemas são propostos com a finalidade de verificar a aprendizagem e a aplicação de conceitos, algoritmos, propriedades e outros fatos da Matemática. Mais recentemente, detectam-se algumas experiências que dedicam sua atenção às estratégias que os alunos utilizam para a solução de problemas. Porém são raras as práticas que têm objetivos ou atenção centrada em concepções e aspectos metacognitivos.

O Centro de Educação Matemática (CEM)1 tem desenvolvido, analisado e elaborado materiais didáticos sobre resolução de problemas pautados: por estudos sobre concepções de professores e alunos; análise de variáveis que incidem na atividade; formulação de problemas por professores e alunos; objetivos didáticos; ambientes didáticos, contextos e cenários que interferem na atividade.

A fim de analisar a postura e a performance dos alunos frente a problemas, elaboramos uma atividade composta de quatro situações, que serão analisadas em seguida.

Os problemas:

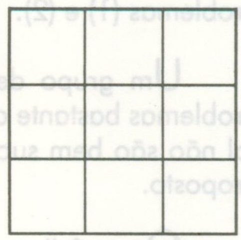
(1) Os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, devem ser colocados no quadrado 3x3 em seus lugares apropriados. Aqui estão as instruções:

a) 1, 8, e 6 estão na linha superior;

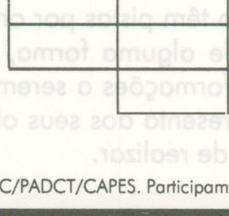
b) 2, 9, e 4 estão na linha inferior;

c) 1, 4, 2, 5, 7 e 6 não estão na coluna esquerda

d) 8, 1, 5, 9, 3, e 4 não estão na coluna direita



(2) Distribua os números de 1 a 8 no tabuleiro de modo que números consecutivos nunca possam estar vizinhos. Obs.: Entende-se que casinhas ligadas por vértices também são vizinhas.



(1) Projeto " Resolução de Problemas: Educação Matemática para os anos 90", financiado pelo SPEC/PADCT/CAPES. Participam: Antonio José Lopes, Dulce S. Onaga, Maria Amabile Mansutti, Maria Lydia de Mello Negreiros e Paulo Sergio de Oliveira Neves.

(3) A soma de dois números pares consecutivos é 43. Quais são esses números?

(4) Comprei dois cadernos por R$ 6 cada um, e um livro por R$ 13,00. Dei uma nota de de R$ 50,00. Quanto recebi de troco?

Quando propostos a professores, em cursos de formação, os problemas 1 e 2 costumam provocar encantamento. Porém sua importância extrapola a curiosidade e o desafio: trata-se de uma atividade complexa com forte componente de natureza metacognitiva.

Quando proposto aos alunos permite observar:

– a orientação espacial;

– a disponibilidade dos alunos em trabalhar com comandos simultâneos (situação de lógica com acúmulo de informações recorrentes);

– o desempenho dos alunos diante de situação problema que não envolve cálculo.

Apresentaremos agora uma análise sobre o desempenho dos alunos com idades de 9 a 11 anos de duas escolas diferentes, em problemas (1) e (2).

Um grupo de alunos considera estes problemas bastante complexos e de modo geral não são bem sucedidos diante do desafio proposto.

O que falha em casos como este ?

Em nosso estudo foram observados dois tipos de comportamento:

a. Os alunos não chegam a iniciar o processo de solução.

Provavelmente, os alunos ficam imobilizados pela dificuldade em lidar com as várias informações. Não têm pistas por onde devem começar, mas, de alguma forma, percebem que há muitas informações a serem controladas, e isso se apresenta aos seus olhos como algo muito difícil de realizar.

Trata-se de uma tarefa não convencional, que não faz parte da cultura escolar acostumada a adestrar os alunos para resolverem problemas tipo: problemas de adição, problemas de multiplicação, etc. Os alunos se desencorajam diante da ausência de um modelo.

b. Alunos que produzem respostas parcialmente certas.

Nesses casos, há evidência de que os os alunos decodificam as informações e até certo momento conseguem trabalhar bem com elas. Se prosseguissem por esse caminho, provavelmente serão bem sucedidos. Mas em um dado momento interrompem o processo, talvez devido à falta de hábito de proceder a verificação contínua daquilo que vai sendo produzido. Isso pode ocorrer por duas razões:

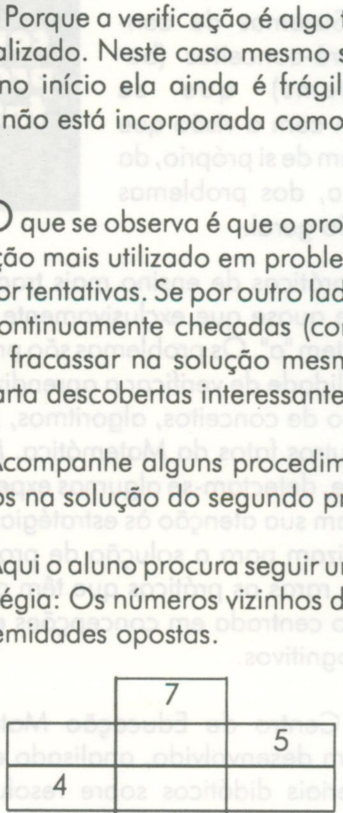
— Porque os alunos não reconhecem a verificação como uma etapa da resolução do problema. Por não praticá-la, não conseguem organizar o controle a que devem submeter o que vai sendo produzido.

— Porque a verificação é algo trabalhoso a ser realizado. Neste caso mesmo sendo praticada, no início ela ainda é frágil enquanto atitude, não está incorporada como hábito ou estilo.

O que se observa é que o procedimento de solução mais utilizado em problemas como esse é por tentativas. Se por outro lado elas não forem continuamente checadas (controladas), o aluno fracassar na solução mesmo que no início parta descobertas interessantes.

Acompanhe alguns procedimentos empregados na solução do segundo problema:

Aqui o aluno procura seguir uma primeira estratégia: Os números vizinhos devem ficar em extremidades opostas.



O trabalho de Pedro (10 anos) indica um certo controle. Ele reconhece a importância da verificação por mais trabalhosa que ela seja e se utiliza dela até chegar à solução.

	1	
4	7	5
6	2	3
	8	

	1	
2	7	5
4	6	3
	8	

	1	
5	7	4
2	6	3
	8	

	2	
6	8	5
4	1	3
	7	

Os sinais apagados e os borrões são indicadores de que o aluno está procedendo à verificação.

Os alunos, cuja experiência matemática envolve elementos de problematização e argumentação, iniciam a atividade a partir de uma hipótese: "Os números que têm menos vizinhos são o 1 e o 8, então eu os coloco nas casas que tem mais vizinhos".

	1	
	8	

Daqui em diante não resta outra alternativa para o 2 e o 7 que devem estar longe do 1 e do 8.

Deste modo, a solução do problema fica próxima.

Quanto ao primeiro problema, observou-se que, embora em número reduzido, há alunos que não conseguiram resolvê-lo, porque não sabiam o significado de linha superior, linha inferior ou não conseguiram distinguir, na figura, a coluna da direita e coluna da esquerda. O desconhecimento de vocabulário específico é um dos aspectos da formulação de problemas, que influencia no desenvolvimento da atividade. É preciso estar atento para esse fato. Além disso, este problema envolve orientação espacial e envolve a necessidade de organizar comandos simultâneos.

O desconhecimento de vocabulário específico é um dos aspectos da formulação de problemas, que influencia no desenvolvimento da atividade.

Respostas obtidas para o primeiro problema.

Na faixa (10-11) anos – 25 alunos

ALUNOS	20	2	1	1	1
SOLUÇÕES	816 357 942	816 357 492	816 357 429	942 357 816	618 573 249

Certos: 20 errados: 5

Respostas(9-10)anos-24alunos

AL.	12	3	1	2	1	1	1	2	1
SOL.	816 357 942	186 357 294	861 376 942	816 357 924	816 249 357	816 347 525	618 375 924	816 375 942	816 537 942

Certos: 12 errados: 12

Observe, a resposta ao lado indica leitura na ordem direta dos números conforme aparecem no enunciado.

186
357
294

O que teria provocado isto ?

Sabe-se de investigações que mostram que é comum que alguns alunos dêem respostas burocráticas para os problemas, sem envolvimento ou interpretação.

É conhecido o problema da idade do capitão, aplicado a 97 alunos na cidade de Grenoble, França em 1980.

Em um barco há 26 cordeiros e 10 cabras.

Qual é a idade do capitão ?

78 % dos alunos de 8/9 anos responderam combinando os números do enunciado, evidenciando que para a grande maioria "a resposta de um problema deve ser sempre um número". Em muitos casos pouco importa aos alunos como surge esse número.

Problema 3

A soma de dois números pares consecutivos é 43.

Quais são esses números ?

Situações como essa, em geral, são apresentadas com o objetivo de verificar os conhecimentos que os alunos têm sobre equações. Para nós serviu para observar os alunos frente a uma situação insolúvel, propiciando que formulassem proposições e conjecturas a partir do enunciado.

Acompanhe o movimento de dois grupos diferentes de alunos com idades entre 9 e 11 anos.

Grupo 1

Após uma breve leitura, ensaiam uma resolução por tentativas, fazendo somas entre números pares, com maior ou menor grau de aproximação em relação ao resultado proposto.

Por ex.: 18 + 16

18 + 20

20 + 22

Surpreendem-se ao não encontrarem a soma 43 e constatam que o único par de números que satisfaz as condições dadas é 21 + 22 =43, porém 21 não é par. Muitos julgam que a formulação está incorreta. Afinal, – pensam – um problema não deve ter, sempre, uma resposta?

Outros afirmam que não conseguem resolver, manifestando certa desconfiança em relação aos seus conhecimentos. É bem possível que pensem que deveriam saber alguma coisa que ainda não sabem, para poderem resolver o problema.

A maioria não aceita que a resposta do problema é justa mente a inexistência de um par de números que satisfaçam as condições dadas. Observa-se aqui que não é a falta de conhecimentos que impede aos alunos produzirem uma resposta e, sim, uma atitude esteriotipada sobre a atividade matemática.

Também não é comum os alunos identificarem, de imediato que não há um par de números que satisfaça as condições. Geralmente isso só vai acontecer após algumas tentativas.

Talvez isto ocorra, porque não há um interpretação consistente no momento da leitura do enunciado, isto é, não acontece uma decodificação prévia, criteriosa, das informações contidas no texto, em suma, os alunos iniciam a resolução sem terem compreendido o problema. Compreendê-lo implica em dar sentido, a cada informação que ele contém, identificar a pertinência de cada uma delas.

Nesse grupo parece que a habilidade de interpretação, que é o início do processo de resolução, falha, embora os alunos tenham conseguido identificar a resposta. Para esses, o problema foi uma "pegada" e não despertou grande interesse, sequer deu margem a outras explorações.

Grupo 2

Houve um reconhecimento imediato da inexistência de um par de números que satisfizesse as condições.

Porém os próprios alunos, mobilizados pelo interesse e impulsionados por uma atitude de investigação, colocam para si próprios um novo desafio, um novo problema.

Verificam se a resposta é possível para um par de "números pares quebrados". É possível que isso tenha acontecido em função do estudo sobre os números decimais, que ocorria, paralelamente, ao desenvolvimento desta atividade.

A primeira questão que o grupo levantou foi discutir a definição para um "número par quebrado".

Marília exibe a seguinte solução:

$20,5 + 22,5 = 43$

Para ela, "par quebrado" é um número decimal cuja parte inteira é par.

Danilo exibe a sua:

$21,4 + 21,6 = 43$

Para ele, um número "par quebrado" é um número decimal em que o último algarismo da parte decimal é par.

A classe decide-se pela definição de Danilo pois ela permite que se utilize a mesma regra de identificação empregada no caso de pares inteiros: observar o último algarismo.

Alguns alunos reforçam a proposição de Danilo, argumentando que, assim definidos (os pares quebrados) podem ser divididos por 2. Ao que contrapõe uma aluna, lembrando que os pares quebrados de Marília também podem ser divididos por 2.

Ao final, o grupo abandona a pesquisa sobre "pares quebrados" devido a certas contradições. Tanto para Marília como para Danilo:

"Par + Par" = ímpar

Diante dessas constatações, os alunos concluem que não é possível "definir número par quebrado". Certamente toda essa investigação possibilita um interessante trabalho de reconstrução do conceito de número par (com o qual, provavelmente, já tinham entrado em contato anteriormente).

"Para mim problema é desvendar um determinado raciocínio; a pessoa que faz (elabora) o problema pensa num esquema, numa idéia, e, normalmente dá apenas uma informação".

O professor dá seqüência à discussão sobre o problema, propondo que os alunos façam mudanças no enunciado de modo que o mesmo tenha solução. Essa atitude coloca para os alunos a tarefa de formulação de problemas, dadas certas condições, o que possibilita um aprimorar o desenvolvimento da habilidade de interpretar de problemas.

Comparando o desempenho dos dois grupos, nota-se diferenças qualitativas no trabalho matemtico produzido. Embora ambos cheguem à mesma conclusão, o caminho percorrido por cada um dos grupos evidencia atitudes diferentes frente à atividade de resolução de problemas. Os alunos do segundo grupo, não se limitam à constatação inicial, pelo contrário, saem em busca de uma regularidade que julgam existir. Só depois de comprovar sua impossibilidade é que aceitam como verdadeira a resposta inicialmente obtida. Fazem matemática através da resolução de problemas.

Cumpre salientar, que, nesse caso, a atitude de investigação é espontânea do grupo e não é provocada pelo professor, evidenciando uma postura de autonomia dos alunos diante dos conhecimentos que dominam.

O grupo utiliza e sabe gerir as informações que estão ao seu alcance, desenvolve uma atitude de verificação e dispõe de estratégias para controlar seus procedimentos.

Confirmando essas observações, veja o que uma aluna desse grupo pensa sobre o que é um problema.

"Para mim problema é desvendar um determinado raciocínio; a pessoa que faz (elabora) o problema pensa num esquema, numa idéia, e, normalmente dá apenas uma informação; a partir desta, você tem que tentar chegar onde ela chegou ou, quem sabe, consiga aprofundar mais, e às vezes chegar em coisas interessantes" (Carolina 11 anos).

Considerações finais

Por fim, o problema 4 não apresentou surpresas. A maioria dos alunos o acertaram sem dificuldades. O que deveríamos concluir deste fato?

Trata-se de um problema convencional, que a maioria dos alunos está treinada a resolver. Para nós, isto evidencia que problemas semelhantes a esse não são suficientes para avaliar atitudes e procedimentos fundamentais na atividade de resolução de problemas, como a utilização de estratégias heurísticas, estratégias de verificação e controle, e também a forma como os alunos gerenciam seus conhecimentos.

Os professores, ao planejarem seu trabalho, selecionando atividades de resolução de problemas, devem estabelecer claramente os objetivos que pretendem atingir. Para se desenvolver uma boa atividade, o que menos importa é saber se um problema é de aplicação ou de quebra-cabeça. O principal é analisar o potencial do problema no desenvolvimento de capacidades cognitivas, procedimentos e atitudes e na construção de conceitos e aquisição de fatos da Matemática.

O melhor critério para organizar um repertório é selecionar, ou mesmo formular, problemas que possibilitem aos alunos pensar sobre o próprio pensamento, que os coloquem diante de variadas situações. Nesse sentido, algumas questões devem ser analisadas previamente pelos professores:

- O problema pode ser resolvido através de mais de uma estratégia?
- As estratégias possíveis podem ser generalizadas?
- O problema induz os alunos a cometerem erros?
- Esses erros são construtíveis? Poderiam servir como catalizadores de processos de aprendizagem?
- O que ocorre se transformamos o enunciado pela alteração de um dado numérico ou palavra?
- O problema convida os alunos a fazer verificação?
- O problema permite que os alunos desenvolveram bons hábitos de comunicação, sistematização e argumentação?
- O problema permite aos alunos que façam conjecturas?
- Permite desencadear outros problemas?

O que estamos propondo é que o ensino de Matemática seja organizado, colocando os alunos frente a situações-problema. Com isto não pretendemos dizer que não é possível aprender assim é mais do que só aprender.

Bibliografia

Barbosa, R.M. Matemática Metodologia e Complementos para professores primários (vol. III). São Paulo, Livraria Nobel S.A. 1969.

CEM-RP. Resolução de Problemas: Educação Matemática para os anos 90, projeto, financiado pelo SPEC/PADCT/CAPES.

_____ Variáveis Interventoras na Formulação e Resolução de Problemas. Comunicação científica apresentada no II EPEM, Bauru, 1993.

Dante, L.R. Didática da Resolução de Problemas. São Paulo, Editora Ática, 1989.

Fernandes, D. Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática. Educação Matem tica, Lisboa. (1988). 8, 3-6.

Lester, J.F. You Can Teach Problem Solving. Arithmetic Teacher, 25(2): 16–20, Nov. 1911.

_____ & Charles, R. Teaching Problem Solving: What, Why and How. New York, Dale Seymour Publications, 1982.

Lopes, A.J. Una Vision sobre la Enseñanza de las Matematicas a partir de la Resolucion de Problemas y Analises de Errores.

6ª Conferência Interamericana de Educação Matemática, Guadalajara-México, 1985.

_____ Desmi(s)tification del Conocimiento Matematico por la Construcion de Lenguage y Producion de Matematica en el Aula. in Educacion Matematica en las Américas VII, UNESCO,1990, p.169-182 (7ª CIAEM – Santo Domingo – República Dominicana. 1987).

National Council os Teachers Mathematics-NCTM. Problem Solving in School Mathematics. 1980 Yearbook. Association Drive, Reston, Virginia, 1980. (Esta obra foi traduzida e publicada pela Atual Editora, 1995).

Polya, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro, Interciência, 1977.

Schoenfeld, A.H. Mathematical Problem Solving. New York, NY: Academic Press. 1985.