

O ENSINO DE GEOMETRIA NO 1º E 2º GRAUS

O presente trabalho é o relato de uma experiência realizada como professora e coordenadora de Matemática com professores e alunos de 1º e 2º graus, no ensino de Geometria, desde 1979 até hoje.

Sabe-se que a interação da criança com o meio desempenha um papel ativo no processo de aprendizagem. Portanto, a atitude desenvolvida na criança, nos primeiros anos de escolarização, determinará o seu crescimento intelectual e o futuro aproveitamento de seu potencial criador, em seu próprio benefício e no de sua coletividade.

Desta forma, é imprescindível que o conteúdo matemático apresentado aos alunos os coloque à frente da maior variedade possível de situações que lhes despertem o interesse e contribuam para o seu desenvolvimento intelectual.

Antigamente, a seleção dos assuntos que deveriam ser ensinados apoiava-se no desenvolvimento histórico da Matemática. Consistia em apresentá-los por ordem de dificuldade crescente, do mais simples ao mais complexo. Em Geometria, estudavam-se primeiro ponto, retas e plano, passava-se aos ângulos, quadriláteros, polígonos etc. Em Aritmética, estudavam-se os números naturais, os números inteiros, depois os racionais, os irracionais etc. Em Álgebra, as expressões algébricas, as operações com expressões literais, etc como se fossem compartimentos estanques, não se fazendo conexão entre as diferentes representações de um mesmo conceito.

Uma das finalidades deste relato é desmistificar o ensino da Geometria no 1º e 2º graus, bem como mostrar a sua aplicabilidade e identificar o seu papel integrador. É fundamental, pois, que o processo de trabalho permita fugir da rotina e dos automatismos e se

Estela Kaufman Fainguelernt*
Diretora de Pós-Graduação e Coordenadora do Mestrado em
Educação Matemática - USU - Rio de Janeiro RJ

adapte às necessidades de cada série, possibilitando aos alunos desenvolverem sua criatividade.

O ensino de Geometria não pode ser reduzido à mera aplicação de fórmulas e de resultados estabelecidos por alguns teoremas, sem a preocupação da descoberta de caminhos para sua demonstração, como também para a dedução de suas fórmulas.

Os problemas centrais são a elaboração de diretrizes gerais para a escolha de conteúdos e a investigação de métodos didáticos que permitam planejar o ensino atendendo à realidade de cada nível.

Deve-se ressaltar o papel formativo do ensino de Geometria, na escola de 1º e 2º graus, partindo da exploração do espaço ao desenvolvimento da parte dedutiva dessa disciplina, sem incorrer em graves erros lógicos e, também, para criar e desenvolver diferentes caminhos de resolução de situações-problema, utilizando o estilo geométrico.

Um exemplo seria iniciar-se o trabalho da pré-álgebra através da noção de áreas das figuras planas, utilizando o estilo geométrico na resolução de equações, inequações e sistemas etc.

A Geometria oferece um vasto campo de idéias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização.

A Geometria também ativa as estruturas mentais, possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. É, portanto, tema integrador entre as diversas partes da Matemática, bem como campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar.

Ela desempenha papel primordial no ensino, porque a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência.

Relataremos, a seguir, a experiência por nós vivenciada. Iniciamos o nosso trabalho enfocando os três aspectos que devem ser abordados no ensino da Geometria: o aspecto topológico, o aspecto projetivo e o aspecto euclideano, pois, trabalhando em atividades envolvendo esses três aspectos, a criança tem possibilidade de conhecer e explorar o espaço onde vive, fazer descobertas, identificar

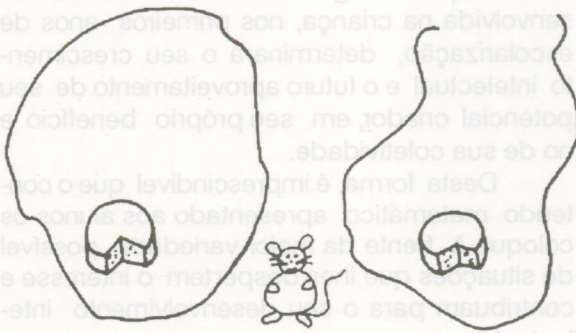
as formas geométricas etc.

Segundo PIAGET, as relações topológicas são apreendidas antes das projetivas e, sobretudo, antes das relações euclidianas.

Sabemos que a criança constrói a sua Geometria desde os primeiros meses de vida. No quarto da criança, a porta é abertura por onde alguém chega até ela e a criança, ao engatinhar, vai descobrindo possibilidades e impossibilidades de deslocamentos.

Através do jogo, a criança vivencia o espaço. Dentro e fora, diante e atrás, antes e depois são noções vividas desde cedo por ela. Precisamos estimular e ampliar essas noções, multiplicando suas experiências. Os deslocamentos do corpo são importantes no desenvolvimento da noção de espaço.

Na idade escolar a criança pode resolver questões como esta: em que situação o ratinho pode ir comer o queijo?



Ou, usando massa de modelar, pedimos à criança que faça uma forma plana sem furos, outra com um furo e outra com dois furos. A seguir pedimos que, passando a mão nos modelos de massa feitos, sinta a diferença entre elas. O próximo passo é pedir que descreva o que está percebendo e que desenhe as figuras numa folha de papel, como na figura abaixo:



Fazendo com que a criança perceba as diferenças entre as três figuras, estamos dando, intuitivamente, a noção de contínuo e

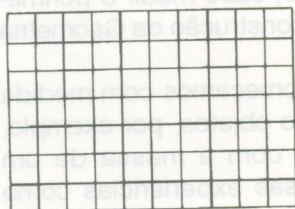
descontínuo.

Para introduzir as noções de interior, exterior e fronteira, fazemos com que a criança observe, dentro e fora da sala de aula, a porta, as paredes etc. Examinando caixas fechadas com algum objeto no seu interior, ela vivencia essas noções no espaço a três dimensões em que vive.

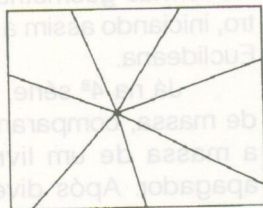
Duas linhas fechadas colocadas no chão da sala de aula ou no pátio do colégio, brincadeiras de roda ou amarelinha permitem introduzir as noções de fronteira, interior e exterior no plano. Ela vivencia as mesmas noções em duas dimensões, descobrindo assim a diferença entre ambas.

Pedir à criança para colorir as diversas regiões de um desenho é um excelente trabalho individual. Podemos propor o seguinte: nestes desenhos, duas regiões vizinhas nunca devem ter a mesma cor.

duas cores



três cores

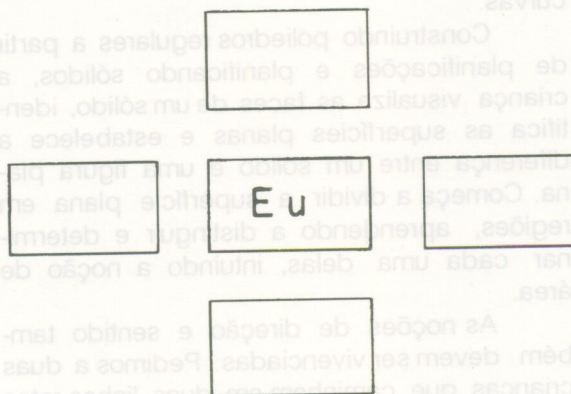


Outra atividade é investigar a posição dos alunos na sala de aula, trabalhando as noções de direita e esquerda, frente e atrás. Em uma primeira etapa, apenas oralmente, a partir da própria disposição dos alunos na sala de aula, o professor faz perguntas que favoreçam a identificação das crianças, umas em relação às outras: quem está sentado à frente de João? e à direita de João? Maria está na frente de quem? e à esquerda de quem?

Em uma segunda etapa, o professor distribui folhas mimeografadas para que cada aluno escreva o nome dos quatro vizinhos, de acordo com o seu posicionamento em relação a eles, considerando as noções de direita e esquerda, frente e atrás.

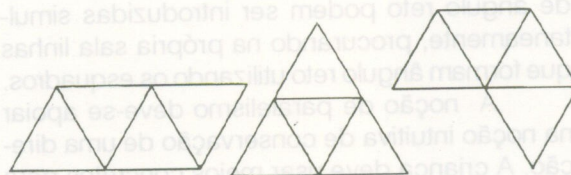
Como na figura:

quadro de giz

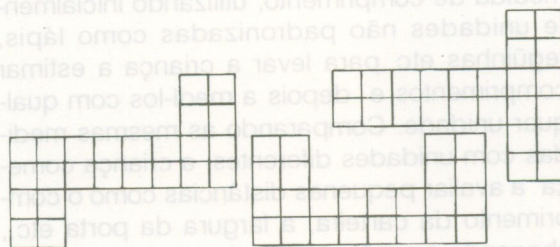


Essas são parte das atividades que foram desenvolvidas na pré- escola e na 1ª série do 1º grau.

Já na 2ª série do 1º grau, iniciamos o trabalho com sólidos, planificando-os. Desmontamos caixas de papelão de formas diversas como, por exemplo, caixas de sapato, caixas de creme dental, caixas de bolas de tênis, caixas de presentes com a forma de um cubo etc., visando a planificação. Numa segunda etapa, damos às crianças folhas de papel mimeografadas contendo o desenho planificado dos sólidos. Por exemplo: qual dessas planificações leva ao tetraedro?



e qual dessas planificações leva ao cubo?



A tarefa consiste em recortar os dese-

nhos e, numa operação inversa à anterior, construir os sólidos, descobrindo, assim, os elementos que o compoem. A reprodução em cartolina de uma lata cilíndrica favorece a descoberta de relações em sólidos de faces curvas.

Construindo poliedros regulares a partir de planificações e planificando sólidos, a criança visualiza as faces de um sólido, identifica as superfícies planas e estabelece a diferença entre um sólido e uma figura plana. Começa a dividir a superfície plana em regiões, aprendendo a distinguir e determinar cada uma delas, intuindo a noção de área.

As noções de direção e sentido também devem ser vivenciadas. Pedimos a duas crianças que caminhem em duas linhas retas paralelas, desenhadas previamente no chão da sala ou no pátio da escola, caminhando primeiro no mesmo sentido, depois em sentidos contrários, enquanto as outras crianças observam.

Podemos aproveitar e abordar a noção de ângulo como mudança de direção. Fazendo com que a criança ande sobre uma linha poligonal, ela fará uma mudança de direção em cada vértice. Trabalha-se a diferença entre o espaço e o plano, o plano e a reta, a reta e o ponto, chegando-se à identificação das posições das retas no plano e no espaço. O uso da régua e do esquadro deve ser estimulado desde cedo. As noções de perpendicularidade e paralelismo podem começar por dobraduras de papel. As noções de perpendicularidade e de ângulo reto podem ser introduzidas simultaneamente, procurando na própria sala linhas que formam ângulo reto utilizando os esquadros.

A noção de paralelismo deve-se apoiar na noção intuitiva de conservação de uma direção. A criança deve usar meios concretos para verificar o paralelismo e o perpendicularismo entre retas.

Nesta etapa, introduziremos a noção de medida de comprimento, utilizando inicialmente unidades não padronizadas como lápis, regüinhas etc., para levar a criança a estimar comprimentos e depois a medi-los com qualquer unidade. Comparando as mesmas medidas com unidades diferentes, a criança começa a avaliar pequenas distâncias como o comprimento da carteira, a largura da porta etc., chegando à noção de mais largo, mais estreito, comprido, curto etc.

Iniciamos a 3ª série do 1º grau, repetindo

a avaliação de pequenas distâncias por meio de unidades arbitrárias, podendo considerar as partes do corpo como unidade, pé, palmo etc. Pouco a pouco a criança irá percebendo que basta tomar um representante da unidade escolhida e deslocá-lo varias vezes para medir pequenas distâncias, levando-a a perceber os diferentes enunciados possíveis de uma mesma medida. Introduzimos então as unidades padronizadas.

Preencher uma ficha de medida do colega é uma boa atividade. Através da noção de fronteira, ampliada com a noção de medida, a criança adquire a noção de perímetro das figuras planas e pode passar a calculá-lo.

Para medir pequenas superfícies como tampo da carteira, mesa do professor etc., podemos seguir a mesma sequência, começando com unidades não padronizadas como folha de jornal, folha de papel etc. Aqui a criança descobre o significado do centímetro quadrado e mede pequenas áreas. Já percebe as diferentes formas geométricas, sabe medir o perímetro, iniciando assim a construção da Geometria Euclideana.

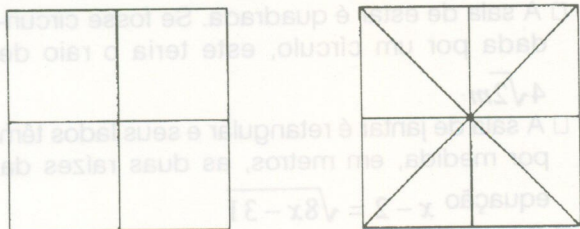
Já na 4ª série, começamos com medida de massa, comparando objetos, por exemplo, a massa de um livro com a massa de um apagador. Após diversas experiências como essas, surgem pequenas diferenças que exigem o uso de balanças. As noções de grama ou quilograma são então obtidas na prática do uso de balanças.

Para medir capacidade é preciso providenciar recipientes de diversos tamanhos. Enchendo-os de água e relacionando os recipientes uns com os outros, introduzimos a noção de litro.

Nesta série, iniciamos as transformações no plano de forma intuitiva. Sabemos que algumas propriedades das figuras geométricas permanecem invariantes com um deslocamento.

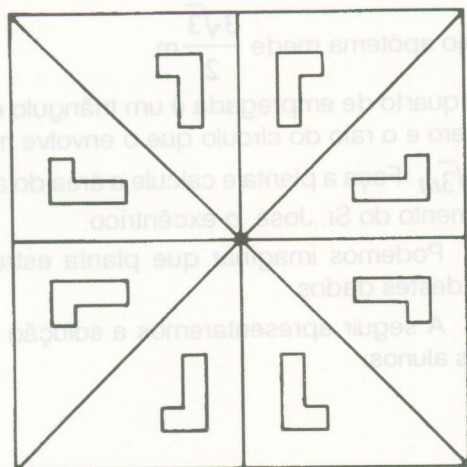
Quando a criança apenas empurra a figura, ângulos e distâncias permanecem invariantes. Temos uma transformação cada vez que obtemos uma nova posição de uma figura. Observar a simetria do seu corpo, colocar objetos de forma simétrica, usar espelhos, dobradura de papéis são atividades que levam as crianças a adquirirem empiricamente a noção de simetria. Desenhar uma figura usando papel fino e carbono, ou recortar uma figura em um papel previamente dobrado são outras concretizações de simetria.

Vejamos uma atividade para determinar os eixos de simetria do quadrado. Fazer uma figura com 12 palitos de fósforos, formando cinco quadrados: um grande e quatro pequenos. Observar a figura formada, colocar mais quatro fósforos, cada par ligando dois vértices opostos, como mostra a figura a seguir:



Que figuras ficaram formadas? Estas figuras podem coincidir umas com as outras? A criança identifica as diagonais do quadrado e os segmentos que unem os pontos médios de dois lados opostos como os eixos de simetria do quadrado.

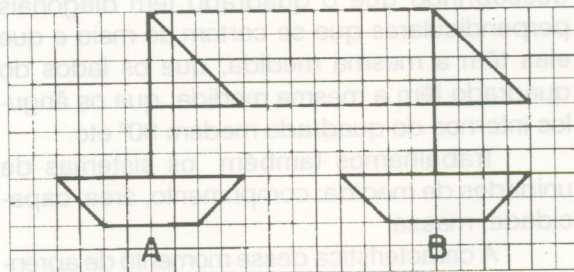
As reflexões ou simetria do quadrado constituem uma rica experiência. Pedindo a criança que dobre o quadrado três vezes, fazendo coincidir as bordas, ela determinará as oito regiões do quadrado. Usando carbono e os eixos de simetria do quadrado, a criança obterá os oito desenhos simétricos, conforme figura a seguir.



Uma outra possibilidade de deslocamentos é a rotação em torno de um ponto: observando o movimento dos ponteiros de um relógio, ou em torno de um eixo, abrindo e fechando a porta.

Outro tipo importante de transformação geométrica é a translação. Se a criança apenas empurra a figura, sem girá-la ou virá-la, ela ob-

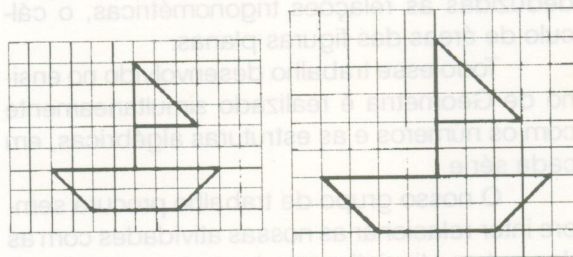
tém uma imagem por translação dessa figura. Dizemos que houve uma translação da posição A para a posição B. Numa translação, quando ligamos pontos correspondentes da figura e da imagem, obtemos um paralelogramo. A ideia de pares de pontos no plano que podem ser ligados por paralelogramo aparece sempre nas translações.



Após experiências concretas, a criança poderá descobrir que há três transformações importantes: as simetrias, as rotações e as translações.

Com o pantógrafo, podemos fazer uma transformação que amplia ou reduz a figura. Neste caso, a transformação não conservou as distâncias, mas manteve os ângulos.

Nesta série, a partir da aquisição do conceito de fração, usando papel quadriculado de diferentes tamanhos, aumentando ou diminuindo figuras, introduzimos a noção de proporcionalidade e de escalas.



Trabalhamos razão entre duas grandezas de mesma espécie e a noção de proporção, fazendo medições de grandezas da mesma espécie e comparando-as.

No entanto, não devemos esquecer que a aquisição de um conceito sempre depende da experiência pessoal de cada um.

A aprendizagem das propriedades geométricas possibilita e exige de fato uma grande variedade de concretizações. Girar um desenho ou andar em volta dele é aprender Matemática ativamente.

Neste nível, todo esse estudo é feito de forma intuitiva e experimental, fazendo com que a criança, através da visualização e do fazer,

estabeleça comparações e construa os conceitos.

A partir da 5ª série, retomam-se os conhecimentos anteriores, para trabalhar os sólidos e as figuras planas, construindo-se suas definições e identificando-se suas propriedades.

Usamos papel isométrico ou quadriculado para desenhar as figuras geométricas. Por exemplo, o aluno desenha e define o quadrado, descobrindo que o quadrado tem diagonais perpendiculares que se cortam ao meio e que elas têm a mesma medida, que os lados do quadrado têm a mesma medida, que os ângulos internos do quadrado medem 90° etc.

Trabalhamos também os sistemas de unidades de medida: comprimento, área, capacidade, massa.

A característica desse momento de aprendizagem é que nele se organizam as noções topológicas, projetivas e euclidianas.

Na 6ª série, com as noções das transformações no plano já introduzidas, começamos a estudar as projeções paralelas, simetrias axiais e centrais, rotações, e as homotetias, neste estágio ainda tratadas de forma elementar.

Iniciamos, nas últimas séries do 1º grau a formalização em linguagem matemática.

A partir da homotetia ou semelhança, estudam-se o teorema de Tales, semelhança e congruência de polígonos, relações métricas nos triângulos e polígonos regulares. A partir das relações métricas nos triângulos retângulos, são deduzidas as relações trigonométricas, o cálculo de áreas das figuras planas.

Todo esse trabalho desenvolvido no ensino de Geometria é realizado simultaneamente com os números e as estruturas algébricas, em cada série.

O nosso grupo de trabalho procura sempre inter-relacionar as nossas atividades com as das outras disciplinas, sobretudo com Artes e Desenho Geométrico no que se refere às construções geométricas, Comunicação e Expressão, no que se refere à leitura e interpretação de livros de Matemática e de situações-problema.

Em 1985, as nossas 8ª séries do 1º grau nos questionaram muito a respeito da aplicabilidade dos conteúdos dados em Matemática. Foi, então, proposta uma atividade que tinha dois objetivos:

vivenciar a aplicabilidade dos conceitos de Matemática,

descobrir outras atividades que os utilizassem.

Os trabalhos apresentados nem sempre

foram muito objetivos e, às vezes, até engraçados, mas de qualquer forma, criaram um elo entre a Geometria e outras atividades humanas.

Um dos grupos de alunos propôs o seguinte problema sobre cálculo de áreas:

“Em uma pesquisa, perguntaram ao Sr. José qual a área de seu apartamento. O Sr. José, um excêntrico, respondeu da seguinte maneira:

A sala de estar é quadrada. Se fosse circunscrita por um círculo, este teria o raio de

$$4\sqrt{2}m.$$

A sala de jantar é retangular e seus lados têm por medida, em metros, as duas raízes da equação $x - 2 = \sqrt{8x - 31}$

O banheiro é um triângulo retângulo, cujo ângulo agudo $A=30^\circ$, seu lado adjacente mede $x\sqrt{3}m$, seu lado oposto x m e a hipotenusa mede $2x$ m.

A cozinha é um quadrado, cuja diagonal mede $6\sqrt{2}m$.

O corredor é retangular e pode ser dividido em três quadrados idênticos cujo apótema mede $\sqrt{2}m$.

A suíte é um círculo, cujo arco de 60° mede π m.

Um quarto é quadrado e a sua diagonal mede 4 m.

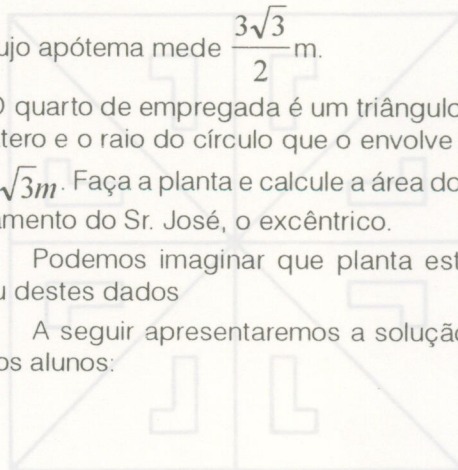
O outro quarto tem a forma de um hexágono,

cujo apótema mede $\frac{3\sqrt{3}}{2}m$.

O quarto de empregada é um triângulo equilátero e o raio do círculo que o envolve mede $2\sqrt{3}m$. Faça a planta e calcule a área do apartamento do Sr. José, o excêntrico.

Podemos imaginar que planta estranha saiu destes dados

A seguir apresentaremos a solução feita pelos alunos:



SALA DE ESTAR

$$R = \sqrt{32} \Rightarrow l = R \cdot \sqrt{2} \Rightarrow l = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow l = 8$$

$$A = l^2 \quad A = 64 \text{ m}^2$$

SALA DE JANTAR

$$x-2 = \sqrt{8x-31}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 8x - 31$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2}$$

$$x_1 = \frac{12+2}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

35 m²

$$x_2 = \frac{12-2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

QUARTO I



$$d = l\sqrt{2}$$

$$l = \frac{d\sqrt{2}}{2} \rightarrow l = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$A = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8 \text{ m}^2$$

QUARTO II



$$a = 3\sqrt{3}$$

$$a = l\sqrt{3}$$

$$l = 3 \text{ m}$$

$$\text{AREA} = p \cdot a \quad A = 9 \times 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 23.27$$

QUARTO DA EMPREGADA



$$R = 2\sqrt{3}$$

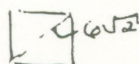
$$l = R\sqrt{3}$$

$$l = 6 \text{ m}$$

$$\text{AREA} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad A_p = 3\sqrt{3}$$

$$\text{AREA} = p \times a_p \quad A = 6 \times 3\sqrt{3} \quad A = 27\sqrt{3} = 30.9 \text{ m}^2$$

COZINHA



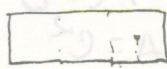
$$d = l\sqrt{2}$$

$$l = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

$$l = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 6 \text{ m}$$

$$A = 6 \cdot 6 = 36 \text{ m}^2$$

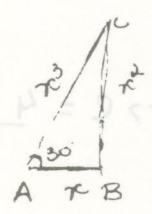
CORREDOIR



$A_p = \sqrt{2}$ $l = 2 \times a_p$ $l = 2\sqrt{2}$
 $A_4 = l \times l = 8m^2 \times 3$
 $A_0 = 24m^2$

BANHEIRO

$\hat{A} = 30^\circ$ LADO ADJACENTE $\hat{A} = x$
 LADO OPOSTO $\hat{A} = x^2$
 HIPOTENUSA = x^3
 $\text{SENO } 30^\circ = \frac{1}{2}$
 $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
 $x = 2$



$\text{ÁREA} = \frac{B \times h}{2}$
 $A_3 = \frac{2 \times 4}{2} = 4m^2$

ÁREA TOTAL:

- 64
- 35
- 8
- 23.2
- 36
- 24
- 4

194.2

30,4

225,1

Apesar das suítes redondas, banheiros, quartos, salas, de formas triangulares, quadradas, hexagonal etc., o problema revelou o humor e a necessidade dos alunos, através do cálculo de áreas que é um problema comum, mostrarem todo o conteúdo de Matemática que eles estudaram no ano, relacionando a Álgebra com a Geometria.

O 2º grau, em que a faixa etária dos alunos no curso regular é de 14 a 18 anos, é, segundo Piaget, o estágio do pensamento abstrato. Entretanto, isso não acontece com a maioria dos alunos nesta etapa. O pensamento deles, se abre para a abstração. Portanto, é necessário que as atividades matemáticas os auxiliem na passagem do pensamento concreto para o pensamento abstrato.

O ensino de Matemática no 2º grau não deve perder o seu caráter formativo e deve mostrar a sua aplicabilidade como ferramenta para as outras disciplinas, tais como Física, Química, Biologia e a sua utilização nos diferentes campos profissionais.

O vestibular é uma passagem e não deixa de ser um objetivo, mas é necessário que não se torne, por isso, motivo para adestramentos alienadores.

Abordamos durante o 2º grau a Álgebra Linear, fazendo com que o aluno adquira, de forma elementar, o conceito de vetor e de espaço vetorial. A partir daí, utilizando o ponto de vista vetorial, estudamos a Geometria Analítica plana e espacial, chegando ao trabalho com as coordenadas e as equações de retas, cônicas etc. Essa abordagem tem provado ser de fácil assimilação pelos alunos que, já familiarizados com o cálculo vetorial, empregam com naturalidade os conceitos de direção, paralelismo, perpendicularismo etc.

Paralelamente, quando os alunos estudam as funções de 1º e 2º graus, equações e inequações de 1º e 2º graus, são estimulados a trabalhar com as representações gráficas e, da mesma forma, são induzidos a representar graficamente os problemas de Mecânica.

Abordamos a Geometria Euclideana, procurando desenvolver a capacidade de representar em duas dimensões os sólidos e, inversamente, reconhecer os sólidos a partir de suas representações em duas dimensões, identificando seus elementos, calculando áreas, volumes etc.

Desde 1985 introduzimos a informática e estamos trabalhando no 1º grau, desde a 3ª

série, com Geometria da Tartaruga (usamos atualmente o Bejalogo).

Hoje o computador passa a ser mais uma ferramenta de trabalho onde os alunos têm oportunidade de trabalharem a Geometria como forma e movimento.

Para finalizar esse relato, gostaria de lembrar que a construção de conhecimento não se faz de forma linear. Vejamos um exemplo para justificar essa afirmação.

Na 3ª série do 1º grau, o aluno adquire a noção intuitiva de área de uma figura plana. Na 8ª série do 1º grau, ele aprende a calcular essas áreas, usando os recursos da Geometria Euclideana. Na 3ª série do 2º grau os alunos calculam essas mesmas áreas, utilizando a interpretação geométrica do módulo do produto vetorial. São três momentos, na vida do aluno, em que o mesmo problema prático, cálculo de áreas, é abordado dentro do seu nível de desenvolvimento e capacidade de apreensão.

BIBLIOGRAFIA

Fainguelernt Estela K. e Outros - 1984 - Os Caminhos da Geometria - Editado pela Sociedade Israelita de Ensino e Cultura - CIBAL - RJ - BRASIL.

Fainguelernt Estela K. e Outros - 1989 - Trabalhando com Geometria - Numeros 1,2,3,4 - Editora Ática S.A. - SP - BRASIL.

Fainguelernt Estela K e Bordinhão Noelir C. - 1981 - Álgebra Linear e Geometria Analítica - Editora Moderna - SP - BRASIL.

Jacobs Russell F E Meyer Richard A. - 1972 - Discovering Geometry - Teiacher's Edition - Harcourt Brace Jovanovich, INC. - USA.

Tisseron Claude - 1983 - Géométries Affine, Projective et Euclidienne - Hermann, Éditeurs

Des Sciences et des Arts - Paris - FRANÇA.

Yaglom I. M. Translated from the Russian by Allen Shields - 1962 - Geometric Transformations I and II - The L. W. Singer Company - New Mathemativca Library - USA.

