Sobre a epistemologia dos números inteiros[1]

Roberto Ribeiro Baldino

RESUMO

Os materiais instrucionais para números inteiros são pródigos em apresentar somas e subtrações mas são insuficientes quanto à multiplicação. Um grupo, o *G-Rio*, propôs três jogos e fichas de trabalho para resolver esse problema. A estratégia didática desse material é instituir práticas de produção de significado em que o aluno é que responderá às perguntas: *Como tirar o maior do menor? Como subtrair um negativo? Por que menos vezes menos dá mais? Que significa menos vezes?* Este artigo descreve brevemente os jogos, analisa e justifica a estratégia didática proposta em termos da teoria dos campos semânticos [Lins, 1992, 1994]. As conclusões são investidas no esclarecimento das dificuldades das regras de sinais no ensino da física [Viennot, 19..]. Argumenta-se pela impossibilidade de investigar as sínteses operatórias evidenciadas na construção dos inteiros à luz do modelo dos campos conceituais [Vergnaud, 1991].

INTRODUÇÃO

As dificuldades de compreensão dos números inteiros são antigas. Em sua resenha histórica, Glaeser [1981] descreve as hesitações e perplexidades de matemáticos famosos que, embora usassem os números inteiros sem tropeços em suas pesquisas, buscavam em vão uma explicação convincente da regra dos sinais. A explicação definitiva, tal como a conhecemos hoje, foi apresentada pela primeira vez por Haenkel, em fins do século passado. Glaeser cita Stendhal, escritor francês que, em autobiografia, se refere a um episódio de sua meninice, datado de fins do Século XVIII, pelo qual se vê que suas dúvidas diante dos números inteiros eram essencialmente as mesmas ainda exibidas pelos alunos de hoje.

Os trabalhos encontrados na literatura sobre os números inteiros, são pródigos em suprir modelos para a estrutura aditiva mas abordam de maneira insuficiente a estrutura multiplicativa. Glaeser aponta esta insuficiência em *Matemática como Tarefa Educacional* [Freudenthal 1973]: *A leitura das páginas 279/281 nem sequer sugere que ele tenha se apercebido do fenômeno espantoso aqui estudado.* Nessa obra, Freudenthal sugere que:

Métodos intuitivos, por úteis que sejam, não são suficientes. Eu concluí que uma retirada oportuna dos métodos intuitivos em favor de métodos racionais é recomendável, embora se deva enfatizar que esses métodos racionais devam consistir em boa matemática e não em substitutos dela [Freudenthal, 1973, p. 280].

Assim, para a regra dos sinais Freudenthal propõe insistir sobre a necessidade de permanência das leis distributiva e comutativa:

$x + a = 0$ e $y + b = O$ implicam $(X + y) + (a + b) = 0$ donde

$x = -a$	$-(a = b) = -a -b$
$b(x + a) = 0$	$(y + b)x = 0$
$xb + ab = 0$	$xy + xb = 0$

subtraindo as duas últimas

$$xy + xb - (xb + ab) = xy + xb = xb - ab = 0$$

$xy - ab = 0$ $\quad$ $(-a)\,(-b) = xy = ab$

Dez anos mais tarde, Freudenthal retoma o problema da regra de sinais no capítulo 15 de *Fenomenologia Didática das Estruturas Matemáticas* [Freudenthal, 1983], sem citar o artigo de Glaeser, publicado dois anos antes. Nesta obra ele transporta a questão para o terreno da geometria:

Os números negativos tinham se originado da necessidade algébrica formal de validade geral das fórmulas de solução, mas foi somente a partir da algebrização da geometria (da assim chamada geometria analítica do tempo antigo) que eles se tornaram efetivos - quero dizer, efetivos em conteúdo [Freudenthal, 1983, p. 433].

[1] Adaptado do parágrafo 6 de *Metodologia de Jogos para os Números Inteiros*, Baldino et al. I EPEM, PUC-Campinas, outubro de 1990.

Depois e apresentar a solução clássica, essencialmente igual à acima, ele oferece a seguinte [p. 444], fundada na extensão das transformações lineares, que ele justifica pelo que denomina *princípio da permanência algébrico-geométrica*. O grifo e os parênteses são nossos.

É visualmente óbvio que as dilatações se comportam simetricamente de ambos os lados de 0, assim:

É visualmente óbvio que as dilatações se comportam simetricamente de ambos os lados de 0, assim

$$2.(-b) = -2b$$

Ou ainda, de outro modo

$$2.(-b) = -b+(-b) = -2.b$$

Em geral

$$a.(-b) = a.b$$

que pode ser considerada verdadeira e com significado para *a* positivo. Assim esta)igualdade) é estendida, pelo reconhecimento de que

$$a \rightarrow a.(-b)$$

é uma dilatação com inversão do semi-eixo positivo e, como tal, pode ser estendida ao semi eixo negativo. Assim, em geral (isto é, também para *a* negativo)

$$a.(-b) = a.b$$

Semelhantemente

$$(-a).b = -a.b$$

$$(-a).(-b) = -a.b$$

Com essa solução Freudenthal muda radicalmente de campo semântico[2]: o problema posto no domínio discreto numérico vai ser resolvido no contínuo geométrico, implicando a difícil questão didática de *transporte*, para um, das noções aprendidas no outro... Essa estratégia é a uma capitulação diante do problema que ele tanto relutou abordar; só o fez a partir da página 432! A capitulação fica ainda mais evidente quando se vê Freudenthal terminar o capítulo propondo que se ensinem as *regras* das operações com inteiros sob o argumento de que *elas são quase nada, comparadas com as regras que uma criança tem que aprender para conquistar as operações aritméticas por colunas*. Ele indaga pelo método mais *eficaz de programar o aprendiz [programme the learner,* sic.] *com essas seis regras* [Freudenthal, 1983, p. 457].

[2] Concordamos com Lins: *Conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação para essa crença-afirmação.* Indicamos, desta forma, que *conhecimento* é algo do domínio da *enunciação* - e que, portanto, todo *conhecimento tem um sujeito* - e não do dominio do *enunciado*. *Um campo semântico é um modo de produzir significado* [Lins, 1994, grifos do autor]. Para nós, o **signficado** não é uma função do sujeito e, sim, do Outro [Zizek, 1992]. O que fica do lado do sujeito é o **sentido:** o gozo que ele experimenta com a justificação que dá.

Ora, essa é justamente a rotina do fracasso. Sabe-se bem que o aluno que chega a perguntar *por que menos vezes menos dá mais?*, não só está saturado de *regras*, como não se satisfaz com tais *programações* geométricas. É preciso propor outras soluções. Antes, porém, é preciso delimitar o problema.

O PROBLEMA E O QUADRO TEÓRICO

Começamos delimitando o problema didático sob forma de quatro perguntas:

1. Como tirar o maior do menor? 3-5 = ...
2. Como subtrair um negativo? -(-3) = ...
3. Porque menor vezes menos dá mais? (-2)(-3) =
4. Que significa menos vezes? (-3)x ...?

Evidenciado o problema, cabe perguntar em que sentido propomos resolvê-lo. O que vem a ser uma *solução* desse *problema*? As soluções clássicas, cujo expoente maior é Freudenthal, caracterizam-se por uma problemática de *ensino*. Suas justificações articulam-se em torno de significantes, como *instrução, visualização, explicação, convencimento, automatização, extensão, regras, modelo* [Freudenthal, p. 432-460]. Elas são suportadas por concepções epistemológicas substancialistas: o conhecimento se *transmite* por *comunicação*, do professor, que ensina *mostrando*, ao aluno, que aprende *vendo*. A substância do conhecimento é contínua: para cada conhecimento existe outro, anterior e arbitrariamente próximo, denominado "pré-requisito". Segundo essas concepções, ensino e aprendizagem são processos simultâneos, o aluno é um sujeito autônomo e o outro, a instituição, é pleno, sem falhas. Elas buscam *satisfazer* o aluno com as respostas oficiais às quatro perguntas acima. Por aí confundem o algoritmo de estabelecimento da fórmula com o processo de produção de significado que denominam *aquisição do conhecimento*. Tais concepções fundam estratégias didáticas manifestamente inadequadas. A estratégia didática proposta pelo G-Rio-GPA [1994] pretende uma inversão dos papéis. O professor é que perguntará: *Por que menos por menos dá mais?* Espera-se que o aluno responda: *É claro, porque ó...* Isto é, espera-se que ele forneça sua própria explicação para um fato que ele deve estar achando óbvio.

Essa estratégia funda-se numa concepção de *aprendizagem* no sentido de Brousseau. A aprendizagem se faz pela experimentação de concepções sucessivas, provisória e relativamente boas, que é necessário rejeitar sucessivamente ou retomar, numa verdadeira nova gênese de cada vez. [Brousseau, 1983, p. 171]. É preciso rejeitar certas concepções porque elas não funcionam bem, porque levam a erro, porque, ao justificar suas afirmações desse modo, o sujeito sofre uma rejeição por parte do outro, para quem exerce sua justificação. Os erros (...) são o efeito de um conhecimento anterior que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que, agora, se revela falso ou simplesmente inadaptado [ib. id. p. 171]. A inadaptação implica uma perda de gozo que o conhecimento proporciona ao sujeito. Os erros deste tipo não são ocasionais e imprevisíveis, eles se constituem em *obstáculos* [ib. id. p. 171, sublinhado nosso]. Os obstáculos, enquanto repetição fracassante, dão a medida da persistência da organização do gozo do sujeito: ele reluta em abandonar o que antes *dava certo*, ele insiste em justificar suas afirmações a partir das noções que não quer abandonar. No modelo teórico dos campos semânticos diremos que é a justificação que constitui a *noção* ou ainda, que aquilo que se chama *noção*, ou *concepção*, é o estatuto de uma justificação, um rótulo que se põe neste modo de produzir significados, o nome, ou pelo menos o índice, de um campo semântico. Para exibir uma *concepção* é preciso que o sujeito julgue que pode externá-la no ambiente em que fala. Portanto trata-se de produção de significados. Uma noção aprendida só é utilizável à medida em que ela se liga a outras, estas ligações constituindo sua *significação*, sua etiqueta, seu método de ativação [ib. id. p. 170, sublinhado nosso].

Porém, a aprendizagem não pode se fazer segundo o esquema clássico de aquisição progressiva e contínua. [ib. id. p.170]. Há uma descontinuidade. Ao constatar a formação de um esquema *a priori* nas experiências sobre conservação das quantidades físicas, Piaget assinala que tudo se passa como se *o sujeito jamais tivesse podido pensar de outro modo* [Piaget e Inhelder, 1978, p. 171]. Parece que algo aconteceu na escuridão da noite e o sujeito voltou pronto no dia seguinte. Para dar conta dessa descontinuidade é muito cômodo postular-se a existência de uma *estrutura* que teria se *acomodado* [Posner et al, 1982]. Entretanto, na perspectiva dos campos semânticos, tudo acontece diante dos olhos de todos. A metáfora seguinte é esclarecedora. Alguém diz: *João está careca.* Os outros riem. Segundo uma certa concepção, durante a noite a cabeça do João teria se *acomodado* à calvície perdendo um fio de cabelo decisivo que o fez careca. Segundo a concepção da produção de significados, é a partir do momento em que alguém enuncia que João está careca, que essa enunciação faz com que ele já esteja careca há algum tempo. É irrelevante especular qual o fio de cabelo perdido que o fez careca ou discutir se ele já estava careca, embora ninguém ainda tivesse *notado*. João passa a ter-estado-careca-há-algum-tempo a partir do momento em que alguém julga que pode dizer isso diante dos outros e que, de fato, esse julgamento se confirma quando os outros riem. Na experiência piagetiana, o sujeito passa a ter-estado-conservando—há-algum-tempo a partir do momento em que o observador julga que pode dizer isso sobre as justificações do sujeito em situação de entrevista clínica. Tal efeito, inevitável, porque constitutivo da linguagem, é o que Zizek [1991, p. 30-43] denomina *performatividade retroativa* das determinações simbólicas. Walkerdine [1988] mostra como a determinação simbólica *criança normal*, regula as práticas em que essa *normalidade* é observada e constituída.

Quando nos perguntam quanto é 3 menos 5, respondemos -2. Algumas crianças respondem *não dá*. Tanto nós, como elas, temos justificações para nossas respostas. Essas justificações são significados produzidos diante de uma certa demanda e são, simultaneamente, novas demandas que pomos a quem nos fez a pergunta: *Será que minha resposta o satisfará? Será que é isso que ele quer?* Estão aí campos semânticos diferentes. O nosso é o preferencial, é o significado que queremos que a criança venha produzir, é o objetivo do ensino. A estratégia dos jogos G-Rio-GPA é instituir um campo semântico intermediário para proporcionar uma demanda que só possa ser satisfeita pela produção de significado no campo semântico preferencial. Pensando a aprendizagem como produção de significado, ela fica submetida ao efeito retroativo das determinações simbólicas. A performatividade retroativa não é para ser evitada mas, sim, assumida. Espera-se que a partir de um certo momento, o sujeito já esteja dizendo que *menos vezes menos dá mais* há algum tempo.

OS TRÊS JOGOS

A estratégia se baseia em três jogos aos quais faremos referência sistemática em nossa exposição sobre a epistemologia dos números inteiros. São os jogos: *das borboletas, das perdas e ganhos* e *do caracol*, dos quais damos uma breve descrição.[3]

Jogo das Borboletas. As quantidades de palitos colocados sobre os nós de uma treliça estampada num tabuleiro representam *estados* entre os quais atuam *operadores* aditivos, representados por cartas numeradas, colocadas sobre os braços da treliça. Os números das cartas são acompanhados de um sinal *predicativo* (azul e vermelho na primeira versão, + e - na segunda) e de um sinal *operatório*, uma flecha, que vai se sobrepor aos braços da treliça. O objetivo é colocar as cartas de modo a formar circuitos de operadores aditivos. Na versão mais avançada dispensam-se os palitos que representam os estados e os jogadores devem desenvolver esquemas de composição de operadores diante da duplicidade de sinais, predicativo e operatório.

Jogo de Perdas e Ganhos. É semelhante aos jogos comercializados, tipo *Banco Monopólio*, com a diferença de que se usa dinheiro de duas cores, para representar meio de pagamento e *dívida*. Cartões de instruções conduzem os jogadores à situação de terem de retirar uma *dívida* de quem não a tem.

Jogo do Caracol. Os jogadores movem peões nos dois sentidos sobre uma trilha numerada. O número da casa para onde um peão deve ser movido é obtido por cálculo feito a partir do número da casa inicial, usando um acoplamento em série ou em paralelo de *máquinas* aditivas e multiplicativas introduzidas por F. Papy e desenvolvidas por Z. Dienes. O jogador coloca dados sorteados nas máquinas de um acoplamento escolhido. Convenciona-se associar um operador *troca* (de cor ou de sinal) aos operadores multiplicativos de cor vermelha. Como condição para melhorar seu desempenho no jogo os jogadores desenvolvem esquemas para composição (menos vezes menos) e adição (menos vezes) de operadores multiplicativos.

O CAMPO SEMÂNTICO DAS QUANTIDADES BRUTAS $(N, \cup, \setminus)$

Com seixos, contas de vidro ou com os palitos do jogo das borboletas, podem-se fazer operações de adição mas não se podem fazer operações gerais de subtração, como 3-5. Sempre se pode reunir 3 palitos com 5 palitos, mas de 3 pali-

[3] A justificação experimental da estratégia desses jogos tem sido objeto de trabalho de D. S. Kindel, na Escola Senador Correa, no Rio de Janeiro, e constitui projeto de Dissertação de Mestrado de P. R. Linardi, na UNESP, Rio Claro.

tos não se podem *extrair* 5; *não dá!* Já, *5 menos 3 dá 2*. Por quê? Como se justifica a crença-afirmação de que o resultado é 2? Somos tentados a dizer que se tratam das operações com naturais. Para nós, que já fizemos as sínteses operatórias, os naturais são inteiros positivos e as operações entre eles são restrições das operações com inteiros.

Advertem-nos de que *não é assim que a criança pensa*. Essa frase tem por efeito instituir um objeto, *a criança*, dotado de uma norma, *o pensamento* [Walkerdine, 1988]. Para evitar esse efeito idealista, preferimos dizer: *não é assim que as crianças para quem 3-5 não dá, justificam que 5 - 3 dá 2*. Se não é assim, como é que elas justificam esse resultado, 2? Se formos procurar o significado dessas justificações nos paradigmas da matemática, estaremos incorrendo na mesma "cegueira" de pensar que Euclides fazia uma *álgebra geométrica*[4] ou que Dedekind *definiu* os reais como um conjunto de racionais [Baldino, 1994]. A tentativa de entender a história ou as justificações dos sujeitos em termos dos paradigmas atuais, institui a crença na inferioridade do passado e na incompletude da criança; em relação a tais deficiências o presente e o adulto aparecem como plenos e cheios de si. Por aí, a ênfase da ação didática recai sobre o ensino, como difusão de uma substância, do cheio para o vazio. A aprendizagem que esse "ensino" proporciona não é tematizada.

As justificações emitidas pelas crianças para 5-3=2 são as que nós mesmos, um dia, emitimos. Não são justificações com números naturais, são justificações *com palitos*. Para podermos apreender o processo de desenvolvimento que termina incluindo essas justificações no campo semântico dos inteiros, é preciso que possamos dar-lhes significado em termos *de palitos*. Piaget estudou essa questão. Quando um sujeito manipula palitos para justificar que *5 menos 3 dá* 2, Piaget diz que ele fez a *síntese operatória da classe e da relação assimétrica* [Piaget, 1976, p. 198] ou que fez a passagem das quantidades intensivas, onde apenas se tem relação parte-todo e complementação, a quantidades extensivas, que constituem a primeira emergência dos números naturais.

Referir-nos-emos a essa primeira emergência como o campo semântico das **quantidades brutas**. Usaremos ainda a letra N, de *naturais*, mas lembraremos sempre que as operações não são as dos naturais, enquanto encaixados nos inteiros ou nos racionais positivos. Preferimos anotar as operações com quantidade brutas como ∪, *reunião* e \, *extração*. É esse campo semântico, anotado (N, ∪, \) que funda a epistemologia dos inteiros.

O CAMPO SEMÂNTICO DAS QUANTIDADES COM SINAL (Z, +, -)

O que o jogo das borboletas faz é, essencialmente, introduzir a composição de operadores aditivos tendo por estados as quantidades brutas. Assim, +3 significa *três a mais* e -3, *três a menos*. Se, entre as borboletas A e B, coloca-se a carta +3 com flecha de A para B e entre as borboletas B e C coloca-se a carta -5 com flecha de B para C, então a carta que completa o circuito, a ser colocada com a flecha de A para C, é -2. Em geral, o jogo convenciona que a carta +*a* é o operador:

$$f_{+a}\text{:NN definido por } f_{+a}(n) = n+a$$

e a carta -*a* é o operador

$$f_{+a}:\{a,a+1,\ldots\}\rightarrow N \text{ definido por } f_{+a}(n) = n-a.$$

Então, a operação (+3)+(-5)=(-2), necessária para o completamento do circuito acima, é a composição de funções, isto é, composição de operadores aditivos:

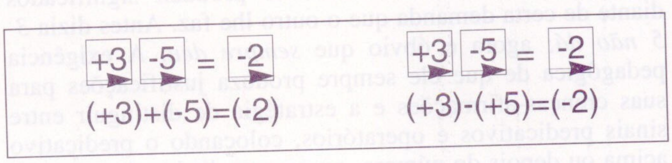
$$f_{-5}\circ f_{+3} = F_{-2}$$

Os sinais + em (+3) e - em (-5) são **predicativos**, estabelecem uma qualidade do operador. Porém, no jogo, aparecem também sinais **operatórios**, sob a forma de flechas nas cartas. O jogo institui que o sinal operatório negativo (o percurso em sentido contrário à flecha) significa composição com o operador inverso. Assim, por condição do jogo, os jogadores são levados a justificar (+3)-(-5) como (+3)+(+5)=(+8).

Os números naturais que designavam as quantidades brutas, agora designam operadores e aparecem precedidos de sinais predicativos. Entre as quantidades brutas era possível *reunir e extrair*. O que o jogo das perdas e ganhos faz é, essencialmente, instituir essas operações entre os operadores, que começam, com isso, a funcionar como estados de novas operações. Extrair uma dívida significa acrescentar um ganho.

Em conseqüência desses dois jogos, espera-se que a criança que respondia à 3-5 com *não* dá, passe a responder espontaneamente 3-5= -2. Isso mostrará que ela está operando em outro campo semântico que não o das quantidades brutas. À medida em que essa criança *não se lembre* de por que antes dizia *não dá*, teremos uma indicação do modo pelo qual se processa o *desenvolvimento horizontal* de um campo semântico e sua passagem ao novo: há uma *fusão* das operações *reunião-extração* com as operações *composição-inversão*. A isso Piaget denomina *síntese operatória*. Vejamos em que ela consiste.

Há dois significados produzidos para 3-5 no contexto dos jogos das borboletas e das perdas e ganhos:



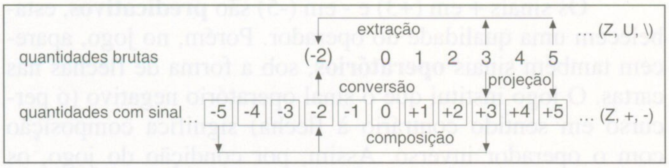
No primeiro, todos os sinais operatórios são reduzidos a positivos, deixando-se os sinais negativos para figurarem como predicativos. O sinal + significa composição de operadores, que podem ter qualidades diferentes: a qualidade do +3 é acrescentar palitos; a qualidade do -5 é retirar palitos. No segundo significado, todos os sinais predicativos são reduzidos a positivos e os negativos figuram como sinais operatórios. Todos os operadores têm a função de acrescentar palitos, porém o sinal - diante do (+5) significa que essa função deve ser invertida.

4 Ver a crítica de Lins a Van der Waerden [Lins, 1992, p. 82].

As quantidades brutas 3 e 5, entre as quais, antes, *3-5 não dava*, são *projetadas* nas quantidades com sinal +3 e +5, resultando, agora:

$$3-5 = (+3)-(+5) = (+3)+(-5) = (-2)$$

Como a questão inicial 3-5 era posta no campo semântico das quantidades brutas, a resposta obtida (-2) é *convertida* de volta nesse campo semântico, que se alarga, para incluir o objeto (-2). Os dois campos semânticos fundem-se num só, que passa a integrar o conjunto das concepções espontâneas do sujeito. O diagrama seguinte resume esse processo, denominado *abstração reflexiva*.



À medida em que a criança *não se* lembre de que 3-5, antes *não dava*, é, na verdade, a *extração* que agora se torna possível. Do ponto de vista do observador, 3-5 passou a (+3)-(+5), daí à forma equivalente (+3)+(-5)=(-2) e desta à 3-5=-2. Do ponto de vista do sujeito que vive a síntese operatória, as duas passagens intermediárias são suprimidas e ele passa diretamente de 3-5 a -2. Se lhe perguntarmos por que dá -2, ele responderá: *Porque dá, ora...* e acha graça da sugestão de que a operação seja impossível.

A síntese operatória implica que, a partir de um certo momento, o sujeito passa a operar no novo campo semântico como se sempre tivesse feito isso. Esse *efeito retroativo* é próprio das *determinações simbólicas* [Zizek, 1991, p. 30-43] e, como tal, é inevitável. Tem como conseqüência que o sujeito não pode chegar à síntese por meio de uma *explicação* que lhe chegue de fora, como um aviso de que agora ele está operando em outro campo semântico ou como inculcação de regras operatórias. Foram-lhe *ensinadas* novas crenças-afirmações diante das quais as antigas sucumbiram: mudou seu modo de produzir significados diante de certa demanda que o outro lhe faz. Antes dizia *3-5 não dá;* agora e óbvio que *sempre deu.* A exigência pedagógica de que ele sempre produza justificações para suas crenças-afirmações e a estratégia de distinguir entre sinais predicativos e operatórios, colocando o predicativo acima ou depois do número, ou mesmo distinguir entre o *3 natural* e o *+3 inteiro*, só podem dificultar a síntese.

Resulta desse processo um sistema algébrico que podemos considerar como o dos números inteiros, porém munidos apenas das operações de adição e subtração. Ao modo de produzir significados neste sistema chamaremos de campo semântico das *quantidades com sinal* e anotaremos (Z, +, -):

$$\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots \ (Z, +, -)$$

A MULTIPLICAÇÃO E O CAMPO SEMÂNTICO DOS INTEIROS (Z,+,-,)

O jogo do caracol institui operadores multiplicativos sobre as quantidades com sinal, bem como novas operações com estes operadores: composição e adição. Inicialmente são as quantidades brutas que desempenham o papel de operadores multiplicativos sobre as quantidades com sinal: é o jogo do caracol jogado só com dados pretos. A atuação dos operadores multiplicativos reduz as quantidades com sinal, que antes eram operadores aditivos, a meros estados dos novos operadores multiplicativos. A multiplicação pode ser justificada como soma repetida 3(+5)=(+15), 3(-5)= -15. Em geral, para todo *a* de N,

$$f_a: Z \to Z \text{ é definido por } f_a(Z) = axz$$

A composição desses operadores multiplicativos se faz pela multiplicação dos naturais que constituem seus índices:

$$f_a \circ f_b = F_{axb}$$

A partir desse ponto poderíamos introduzir a inversão dos operadores multiplicativos o que nos levaria aos operadores multiplicativos fracionários. Com isso atingir-se-ia o sistema estável que funcionou como obstáculo para a construção da estrutura multiplicativa dos inteiros através da história [Glaeser, 1981]. Como queremos nos restringir aos números inteiros, não seguiremos esta via. Apenas assinalamos o problema aberto de saber se, seguir por ela, isto é, ensinar primeiro os racionais positivos, facilita ou dificulta o posterior desenvolvimento dos inteiros.

Em vez da inversão de multiplicadores positivos, o jogo do caracol institui multiplicadores negativos. Dá-se às quantidades com sinal a função de operadores multiplicativos atuando sobre as próprias quantidades com sinal. O jogo distingue bem entre as funções de operador e de estado. Inicialmente, os sinais das quantidades que funcionam como operadores multiplicativos são representados pelas cores azul e vermelha. Os sinais das quantidades que funcionam como estados podem ser cores, as mesmas ou outras, ou os sinais, + e -. Só num segundo momento, os sinais das quantidades que funcionam como operadores são, também, + e -.

O desenvolvimento do campo semântico das quantidades brutas até a síntese, no campo semântico das quantidades com sinal, é feito por nucleação de um *modelo:* situações de dívidas, temperaturas, deslocamentos, excessos e faltas, são apresentadas e funcionam como estatuto final das justificações. A partir da introdução das quantidades com sinal como operadores, para o desenvolvimento do campo semântico dos inteiros, é preciso instituir um *princípio*: convenciona-se que os operadores multiplicativos de uma dada cor (vermelha), têm a propriedade de trocar o sinal do estado sobre o qual atuam, e os da outra cor (azul), a de mantê-lo. Tudo mais vai se arranjar como desenvolvimento deste princípio.

Na apresentação dos jogos no I EPEM ouvimos a crítica de que esse princípio eqüivale a impor a regra de sinais. Entretanto, não é quando um operador negativo atua sobre um estado negativo que aparece o *menos vezes* menos. A possibilidade de jogar com operadores representados por cores, e estados representados por sinais, mostra que não se trata da *regra de sinais*. Quando se faz $f_{3v}(-5)=+15$, o que se tem é a composição de um operador multiplicativo com um operador troca de sinal: $f_{aV} = T \circ f_a$ onde *aV* é a quantidade com sinal e *a* a quantidade bruta correspondente. A *multiplicação de negativos* vai aparecer quando se faz a composição de dois operadores negativos. Esta composição implica duas trocas do sinal do estado, portanto, em manutenção do sinal: $f_{aV} \circ f_{bV} = f_{abA}$. Quando as cores dos operadores são substituídas por sinais, então $f_{-a} \circ f_{-b} = f_{+ab}$. É aí que surge o *menos por menos igual a mais*. Diferentemente do *princípio*, onde um sinal era do operador, outro do estado, agora ambos os sinais são sinais de operadores multiplicativos. Resulta, por exemplo, que +6 é equivalente, como operador a -3 composto com -2.

Dados dois operadores multiplicativos sorteados pelos dados, o jogo do caracol institui um terceiro. Por exemplo, com os operadores (+3) e (+5) atuando sobre o estado +2, o jogo fornece as seguintes possibilidades:

$$3x2 + 5x2 = 6+10 = 16 \text{ e } 3x2 - 5x2 = 6-10 = -4$$

Por outro lado, sobre o 3 e o 5 que funcionam como operadores multiplicativos, *projetam-se* as quantidades com sinal +3 e +5. Com elas, intrometem-se entre os operadores multiplicativos as antigas operações + e - que atuavam entre quantidades com sinal. As operações, projetadas no novo domínio, sugerem que se façam somas e subtrações de operadores multiplicativos (+3)+(+5)=(+8) e (+3)-(+5)=(-2) como meio *mais fácil* de jogar: De fato, essas operações levam ao mesmo resultado: 32+52 é o mesmo que 82 e 32 - 52 é o mesmo que (-2)2. Então a antiga operação (+3)+(+5)=(+8) passa a significar *três vezes mais cinco vezes são oito vezes* e a operação (+3)-(+5)=(-2) passa a significar *três vezes menos cinco vezes são menos duas vezes*. O sujeito terá respondido assim à última pergunta: *que significa menos vezes?* $f_3 - f_5 = f_{-2}$

Chega-se assim ao campo semântico dos números inteiros, que é maximal, no sentido de que as crenças-afirmações dos demais encontram justificações aqui. É esse o campo semântico visado pela operação de ensino.

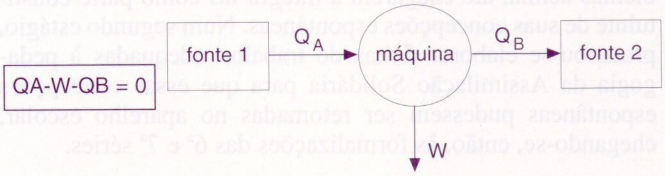
QUANTIDADES BRUTAS E GRANDEZAS FÍSICAS

Abstraindo as justificações e levando em conta apenas os enunciados, ou seja, as crenças-afirmações, (N, ∪, \) é um sistema algébrico isomorfo aos naturais. A partir dele [Freudenthal, 1973, p. 199] *constrói* axiomaticamente o domínio contínuo das grandezas físicas. Sob as chamadas grandezas físicas algébricas, encontramos sempre alguma grandeza, chamada *real*, desempenhando o papel que as quantidades brutas desempenham no desenvolvimento dos inteiros. A grandeza física algébrica é obtida como variação da grandeza real, do mesmo modo que os inteiros são obtidos como variações sobre as quantidades brutas.

Essas grandezas *reais* podem ser evidenciadas: nenhuma pressão pode ser menor que a do vácuo, nenhuma energia interna pode ser menor que a do zero absoluto, nenhum potencial pode ser menor que o da Terra. Algumas dessas grandezas permanecem sempre como *grandezas reais;* por exemplo, a massa e a resistência elétrica são fatores de proporcionalidade, nunca negativos. Outras grandezas, como trabalho mecânico e quantidade de calor, apareceram primeiro como grandezas algébricas, como variações, sem que se soubesse bem de quê. Só mais tarde a energia interna, fundada na energia cinética das moléculas, veio fazer o papel de grandeza *real*. Na eletricidade a grandeza real foi postulada como a carga positiva. Só mais tarde descobriu-se que teria sido melhor tomá-la como a carga do elétron.

Mesmo depois da síntese operatória que leva aos inteiros, as dificuldades dos estudantes de física permanecem. Ali também se verifica a ocorrência dos dois tipos de sinais, predicativos e operatórios, cada um com sua convenção. Viennot [19..] nos fala dos *sinais das grandezas físicas algébricas* (predicativos) e dos sinais nas *relações simples entre grandezas* (operatórios). Ela pergunta: *como essas duas categorias de sinais podem ser distinguidas?* A convenção dos sinais operatórios aparece, em geral, na expressão *é contado positivamente*: as correntes que chegam a um nó são contadas positivamente, a energia fornecida a um sistema é contada positivamente, as forças no sentido do eixo x são contadas positivamente, etc. A convenção dos sinais predicativos é chamada *definição da grandeza* física: o trabalho é positivo quando a força está no sentido do deslocamento, a energia é positiva quando aumenta e energia cinética das moléculas, a corrente é positiva quando os elétrons se movem no sentido oposto, etc.

As relações entre grandezas são obtidas numa situação paradigmática em que os sinais positivos são facilmente reconhecidos. Por exemplo, para uma máquina térmica que opere entre duas fontes, tem-se as seguintes convenções. *Sinais predicativos:* a quantidade de calor é positiva quando há aumento da energia interna (energia cinética das moléculas) e o trabalho é positivo se o deslocamento ocorre no sentido da força. *Sinais operatórios:* o que é recebido pela máquina é contado positivamente. *Situação paradigmática:* fonte 1, quente, fonte 2, fria e a máquina é um motor. Então:



Uma vez estabelecida essa equação, o *milagre* dos número inteiros faz com que ela seja válida para quaisquer sinais predicativos que possam ocorrer. A dificuldade dos alunos consiste em recair, de tempos em tempos, nas grandezas reais cujas variações constituem as grandezas físicas algébricas. Isso ocorre, em geral, pela tentação de pensar o caso paradigmático como instituindo relações entre as grandezas reais: o trabalho como sempre positivo.

UMA NOTA SOBRE O MODELO DOS CAMPOS CONCEITUAIS (VERGNAUD)

Os campos conceituais são uma teoria psicológica dos conceitos que *visa identificar e estudar as continuidades e* *descontinuidades entre os diferentes passos da aquisição de conhecimento, a partir* **do ponto de vista de seus conteúdos** [Vergnaud, 1990, p. 133, sublinhado nosso]. São *exemplos de campos conceituais: estruturas aditivas, estruturas multiplicativas, lógica das classes, álgebra.* Os campos conceituais partem de conteúdos matemáticos. No caso dos inteiros, os campos conceituais partiriam da estrutura aditiva para compreender a aprendizagem. Ora, vimos que essa estrutura aditiva é uma síntese. O sujeito que faz 3-5= -2 está fazendo indistintamente e simultaneamente (+3)+(-5)=(-2), isto é, está compondo operadores aditivos, e (+3)-(+5)=(-2), isto é, está extraindo uma quantidade com sinal. O conteúdo matemático resultante dessa síntese operatória não tem meios de distinguir as operações das quais ele, por definição, é a síntese. Esse conteúdo jamais poderá fornecer um referencial para as operações que levam a ele. Pelo contrário, é só no exercício da linguagem, na produção de significados, que essa distinção pode aparecer e só por aí se tem um referencial para orientar as estratégias de produção de significado que constituem a aprendizagem.

HISTÓRICO E AUTORIA DA PROPOSTA

A proposta didática contida em *As Quatro Operações com Inteiros Através de Jogos* resulta de pesquisa que teve início em 1986, na sessão de sábado do curso de Matemática Através de Materiais Concretos do Centro de Ciências da FAPERJ, que deu origem ao **Curso de Treinamento Profissional do G-Rio**. A pergunta diretriz era a seguinte: como proporcionar aos professores que implantam a pedagogia da Assimilação Solidária em suas salas de aula, instrumentos didáticos adequados sobre números inteiros para que a proposta pedagógica não seja inviabilizada por uma fraqueza em seu flanco da didática?

Objetivou-se, então, numa primeira fase, encontrar um conjunto de ações efetivas no qual crianças de qualquer idade, no ensino formal (escola) ou na aprendizagem informal (lazer, etc.) vivessem, *em ação*, as soluções dos quatro problemas acima, até chegarem a integrá-las como parte constituinte de suas concepções espontâneas. Num segundo estágio, procurou-se elaborar fichas de trabalho adequadas à pedagogia da Assimilação Solidária para que essas concepções espontâneas pudessem ser retomadas no aparelho escolar, chegando-se, então, às formalizações das 6ª e 7ª séries.

Os primeiros resultados foram apresentados em fevereiro de 1987 em Minicurso do I ENEM, na PUC de São Paulo, ministrado por Armando José Salgado Marinho, Dora Soraia Kindel e Maria de Fátima Pacheco. Durante 1987, Dora Soraia Kindel utilizou e aperfeiçoou as fichas de trabalho, então elaboradas, em suas salas de aula na Escola Senador Corrêa, no Rio de Janeiro, apresentando novo minicurso no II ENEM, em Maringá. A partir dos resultados obtidos o trabalho foi retomado em 1988, no Curso de Treinamento Profissional do G-Rio, desenvolvendo-se então os jogos que apresentaremos a seguir. Parte deste material foi usado por Eliane Felipini de Almeida numa escola pública da região de Rio Claro.

Em outubro de 1989 a proposta foi apresentada em Minicurso, no I Encontro Paulista de Educação Matemática, promovido pela SBEM na PUC de Campinas, ministrado pelo autor da versão atual, Roberto Ribeiro Baldino e seus orientados no Mestrado em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro: Eliane Felipini de Almeida, Tânia Cristina Baptista Cabral, e Denizalde Jesiel Rodrigues Pereira. Tânia Cabral organizou a proposta em caixas de 26x19x3 cm contendo os tabuleiros, dados e todo o material necessário para a execução imediata dos jogos. O autor da versão atual preparou uma apostila com as regras, instruções para confecção e um longo parágrafo sobre a fundamentação teórica dos jogos. Em novembro do mesmo ano a proposta foi apresentada em Seminário do GEPEM, na Universidade Santa Úrsula, no Rio de Janeiro. Por muitas das considerações aí feitas, somos gratos à Professora Estela Kauffmann Fainguelernt. Em julho de 1990 a proposta foi usada em minicurso no I Encontro de Educação Matemática da UFMS em três Lagoas, MS. O Professor Antônio Carlos Carrera de Souza tem aproveitado esses jogos em minicursos oferecidos a alunos da rede pública, ministrados por seus alunos da disciplina de Prática de Ensino, na Unesp, Rio Claro. Em 1994 foi retomada pelo Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática do Departamento de Matemática do IGCE da UNESP, Rio Claro.

BIBLIOGRAFIA

1. BALDINO, R.R. (1994). *A Ética de uma Definição Circular de Número Real.* Bolema, ano 9, nº 9, 1994, UNESP, Rio Claro, pp. 31-52.
2. BROUSSEAU, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques.* Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 4, nº 2, pp. 165-198.
3. FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Ridel, Dordrecht.
4. FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Ridel, Dordrecht.
5. G-RIO & GPA. (1994). *As quatro operações com inteiros através de jogos.* UNESP, mimeografado.
6. GLAESER, G. (1981). *Épistémlogie des nombres rélatifs.* Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 2, nº 3, pp. 303-346.
7. LINS, R.C. (1992). *A Fremework for Undesrstanding what Algebraic Thinking is.* Tese de Doutorado, University of Nottingham.
8. Lins, R.C. (1994). *O Modelo Teórico dos Campos Semânticos. Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico.* Dynamis, Blumenau, vol. 1, n.7, p.29-39, abr/jun, 1994.
9. PIAGET, J. (1976). *Ensaio de Lógica Operatória.* Editora Globo, Porto Alegre, 1976. Orig. Essai de logique operatoire. Dunod, Paris, 1971.
10. PIAGET, J. & INHELDER, B. (1978). *Le développement des quantitées physiques chez l'enfant.* Délachaux et Niestlé, Paris.
11. POSNER, G. J., STRIKE, K. A., HEWSON, P.W. & GERTZOG, W.A. (1982) *Accomodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change.* Science Education 66(2); 211-227. John Wiley & Sons.

12. VERGNAUD, G. (1990) *La Théorie des Champs Conceptuels*. Recherches en Didactiquers de Mathématiques, vol. 190, n. 13, pp. 133-170, 1990.
13. VIENNOT, L. *Pratique de l'algèbre élémentaire chez les étudiants en physique*. Bulletin de l'Union des Physiciens, n. 662, p. 783-820.
14. WALKERDINE, V. (1988). *The Mastery of Reason*. Routledge, Londres.
15. ZIZEK, S. (1991). *O mais Sublime dos Histéricos*. J. Zahar, Rio de Janeiro. Orig. Le Plus sublime des hystériques. Point Hors Linge, Paris, 1988.
16 ZIZEK, S. (1992). *Eles não Sabem o que fazem*. Jorge Zahar, 1992. Orig. *Ils ne savent pas ce qu'ils font*. Point Hors Ligne, 1990.

Roberto Ribeiro Baldino
Cx. P. 474
13500-970 Rio Claro
(019) 534 0123 (Fax)
Baldino@rcb000.uesp.ansp.br