Conceito de Função Matemática Explorado de Forma Dinâmica

Verônica G. Gomes Ferreira (Centro de Educação - UFPE)

RESUMO

Este artigo apresenta um software educacional que une o potencial interativo e de animação do computador para explorar o conceito de função. Resultados de estudos de caso investigando percepções de sub-conceitos de função desenvolvidas por pares de estudantes ao interagirem em micromundos em torno deste software mostram a validade do mesmo para o desenvolvimento de percepções que levam em conta a idéia de variação. O mesmo mostra que os estudantes não só constroem percepções variacionais como também conectam-nas com percepções previamente articuladas em gráficos.

INTRODUÇÃO

O ensino de função matemática tem merecido especial atenção entre educadores matemáticos por ser um conceito central no ensino da Matemática secundária. Dentre outras, apontam-se que os estudantes encontram dificuldades por lidar com:

- múltiplas representações;
- grande quantidade de conceitos, tais como: variável, taxa de variação, vértice, domínio, conjunto imagem, periodicidade, etc. Tais conceitos serão denominados aqui de sub-conceitos de função.
- diferentes visões de função exigidas em diferentes momentos do estudo;
- variável, um conceito dinâmico, ser explorado em ambiente estático.

O uso da representação Cartesiana tem sido alvo de pesquisas em torno da forma que os estudantes a interpretam. No dia a dia, não é difícil encontrar informações representadas por gráficos, tais como em jornais, revistas, etc. Estas representações são usadas por especialistas em Matemática e em Ciências como um meio onde o acesso à informações é facilitada. Em contraste, educadores matemáticos (Clement, 1985; Preece, 1983; Monk, 1992 e Goldenberg, 1988) argumentam que a interpretação de gráficos não é tão fácil. Eles mostram, ainda, que o uso da representação Cartesiana tem tanto o potencial de obscurecer quanto o de facilitar o entendimento de conceitos necessários para a sua interpretação.

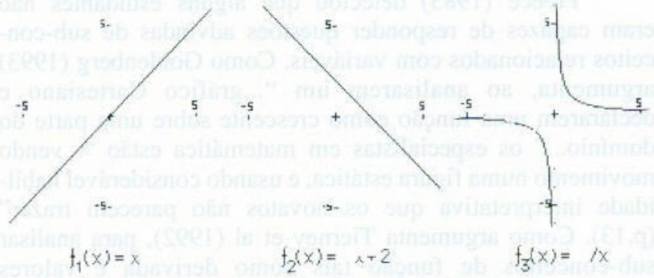

Figura 1 - Exemplos de funções crescentes e decrescentes.

Pesquisas apontam que estudantes usualmente interpretam sub-conceitos de função a partir de gráficos tendo por referência seu formato como uma figura estática (Goldenberg, 1988; Clement, 1985) - pictoricamente. Por exemplo, o sub-conceito de monotonicidade é usualmente reconhecido pela 'direção da linha reta' (Gomes Ferreira, 1997). Com esta percepção pictórica, pode-se dizer que f_1 é

[1] Os resultados apresentados neste artigo são de pesquisa financiada pela CAPES e desenvolvidas como projeto de Doutoramento no Instituto de Educação - Universidade de Londres.

uma função crescente e f_2 é decrescente (figura 1). Porém, como poderia-se caracterizar f_3? Seu gráfico nem reta é! Ou ainda, como os estudantes fazem a generalização de tal percepção para f_3? Ou, será que tal generalização simplesmente não é feita?

Uma outra forma usada por estudantes para interpretar um gráfico é a pontual: eles vêm um gráfico como um instrumento para localizar pontos (Monk, 1992). Goldenberg (1991) vai além, apontando que os estudantes usualmente só consideram pontos especiais (tais como: intersecção com o eixo $f(x)$ e vértice) ao interpretar gráficos. Comparando diferentes funções polinomias de 1° grau com mesmo coeficiente independente (veja figura 2), estudantes podem ser levados a conectar o coeficiente linear com a 'intersecção com o eixo $f(x)$' (Moschkovich, 1992).

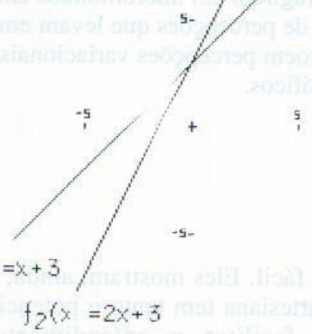

Figura 2 - Exemplo de funções lineares com mesmo coeficiente independente.

Preece (1983) detectou que alguns estudantes não eram capazes de responder questões advindas de sub-conceitos relacionados com variáveis. Como Goldenberg (1993) argumenta, ao analisarem um "...gráfico Cartesiano e declararem uma função como crescente sobre uma parte do domínio..." os especialistas em matemática estão "...vendo movimento numa figura estática, e usando considerável habilidade interpretativa que os novatos não parecem trazer" (p.13). Como argumenta Tierney et al (1992), para analisar sub-conceitos de função tais como derivada e valores extremos, os estudantes precisam adotar uma visão variacional — considerando na função a relação entre a 'variação de x_1 a x_2' e a 'variação de $f(x_1)$ a $f(x_2)$'. Em outras palavras, x tem que ser considerado como uma variável. Com tal preocupação o EDC - Educational Development Center desenvolveu o software DynaGraph (Goldenberg et al, 1992). Neste artigo apresentaremos duas adaptações do DynaGraph exploradas em estudo de casos (Gomes Ferreira, 1997): DG Paralelo e DG Cartesiano.

DG PARALELO E DG CARTESIANO

Tal como a versão paralela do DynaGraph, DG Paralelo é um software educacional que apresenta uma representação visual de função aproveitando a possibilidade de animação e de interação. O mesmo representa uma função

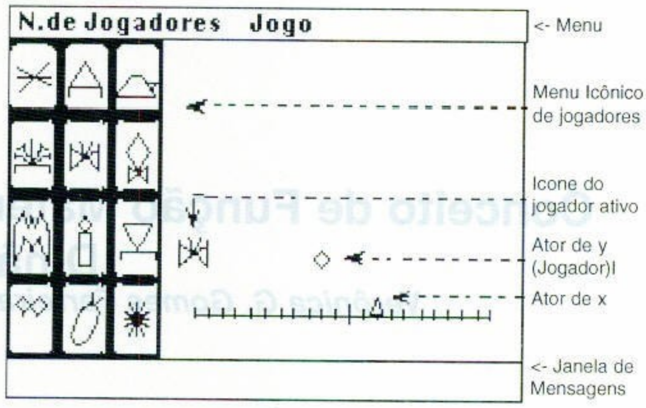

Figura 3 - DG paralelo com o jogador de $f(x)$ = -x ativo.

ponto-a-ponto por dois atores[2]: um correspondendo a entrada de função e outro a sua imagem (f(x)). Diferentemente do DynaGraph, DG Paralelo explora o comportamento de doze funções escondidas em ícones de jogadores, permitindo ao estudante identificar a função ativa sem ter acesso a nenhuma outra representação da mesma. Usando-se o mouse no menu icônico pode-se mudar o jogador ativo (função ativa). Ambos os programas permitem aos estudantes arrastarem x (o ator de x) sobre o eixo e terem como feedback 'a variação de $f(x)$' de acordo com o jogador ativo. Pode-se selecionar até três jogadores ao mesmo tempo, afim de comparar os comportamentos de diferentes jogadores.

DynaGraph também apresenta uma versão onde os eixos encontram-se em disposição Cartesiana, a qual inclui um ator para representar $(x,f(x))$. Tal versão foi adaptada em DG Cartesiano, o qual se assemelha a DG Paralelo. As mesmas funções são escondidas nos mesmos jogadores.

Apesar de em uma primeira impressão, DG Cartesiano ser bem similar ao sistema Cartesiano algumas características os fazem representações diferentes. Primeiro, em DG Cartesiano, x, $f(x)$ e $(x,f(x))$ são representadas separadamente, o que não acontece no uso tradicional dos gráficos

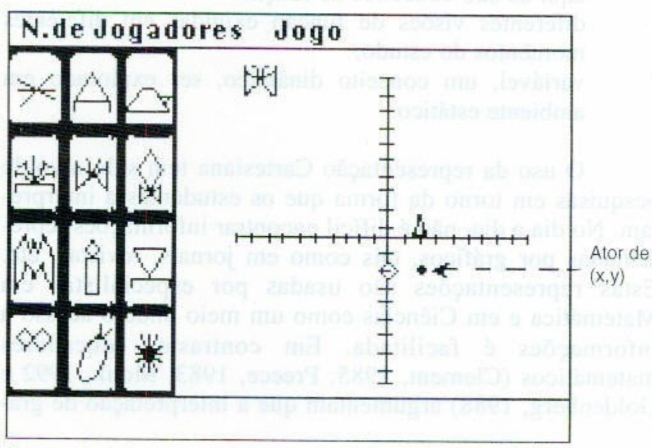

Figura 4 - DG paralelo com o jogador de $f(x)$ = -x ativo.

[2] Objetos computacionais moveis.

Cartesianos. Segundo, DG Cartesiano apresenta a função ponto - a - ponto mas seus movimentos permitem ao aluno desenvolver visão variacional de função. A variável (variavel)[3] é, dinamicamente, capaz de variar, clarificando para o aluno seu status como a variável (Goldenberg et al, 1992). Terceiro, em contraste com gráfico Cartesiano, o formato do gráfico não é mais o principal aspecto da representação. Quarto, em DG Cartesiano, o estudante nunca vê a função totalmente. Por outro lado, algumas características qualitativas, tal como declividade, ficam mais evidentes.

PESQUISAS COM DYNAGRAPH

Goldenberg et al (1992) ao examinar pares de estudantes interagindo com a versão paralela de DynaGraph aponta que os estudantes "começaram a se referir a função *comportamentalmente* de forma que ficou longe de ..." (p.252) uma forma pontual, e sim uma forma variacional. Por exemplo, um dos pares facilmente discriminaram 'a direção que x e $f(x)$ movem-se', 'as velocidades diferentes de x e $f(x)$' e os pontos fixos ao examinarem a função dada por $f(x)=4-3x$. As questões então que aqui se fazem são: Como essas percepções variacionais são sintetizadas como conhecimento matemático? Isto é, será que os estudantes conectam tais percepções com o conhecimento prévio, reconhecendo-os como diferentes percepções de um mesmo conceito? Poderiam eles usar generalizações construídas em DynaGraph para generalizar sub-conceitos em gráfico, por exemplo?

Goldenberg et al (1992) hipotetizou que a exploração de DynaGraph em uma seqüência inicianda pela versão paralela, passando pela versão perpendicular, terminando na Cartesiana levaria os estudantes a criarem uma transição lógica a partir de pares de elementos da reta **R** a um único ponto de $\mathbf{R}^2$. O autor deixa a questão: Como interações com DynaGraph afeta o conhecimento da representação Cartesiana?

Neste artigo discutiremos percepções desenvolvidas por alunos ao interagirem com micromundos em torno das adaptações de DynaGraph (Gomes Ferreira, 1997). Para tanto daremos uma breve descrição da pesquisa situando o uso dos programas.

BREVE DESCRIÇÃO DA PESQUISA

Em vez do conceito, selecionou-se para investigação alguns sub-conceitos de função (conjunto imagem, periodicidade, variação, vértice e simetria axial). Esse estudo buscou analisar como estudantes discriminam, generalizam e sintetizam estes sub-conceitos enquanto trabalham em atividades desenhadas para encorajar a exploração das possibilidades dinâmicas de softwares.

Além de DG Paralelo e DG Cartesiano, a pesquisa usou Function Probe (Confrey et al, 1991a), um programa multi-representacional desenvolvido na Universidade de Cornell, que permite transformações contínuas e feitas diretamente no gráfico. Os programas foram usados na criação de micromundos que consistiram: dos programas e de um conjunto de atividades. A elaboração das atividades envolveu: a seleção de quatro famílias de funções (constante, linear, quadrática e função seno) a partir de onde doze funções foram escolhidas, as quais enfatizavam os sub-conceitos através da exploração dos programas; e a elaboração de atividades de descrever/advinhar e classificar funções as quais desenvolvessem uma linguagem para discussão.

Este estudo parte de uma noção alternativa de entendimento conceitual oferecida por Confrey et al (1991b): "representações e idéias são inseparavelmente encadeadas. Idéias estão sempre representadas, e é através da articulação entre ações e representações que construímos sentido matemático" (p.17). E, considerando que o entendimento conceitual origina-se a partir de conexões entre percepções desenvolvidas em diferentes representações (Noss & Hoyles, 1996), os interesses principais deste estudo foram investigar as características das percepções articuladas dentro das diferentes representações (incorporadas nos diferentes programas) e as conexões feitas entre diferentes percepções de um mesmo sub-conceito articuladas em diferentes representações.

Com o propósito de investigar o uso destes micromundos num contexto do currículo brasileiro, quatro pares de estudantes brasileiros do 2ª série do secundário, os quais já haviam estudado função, seguiram uma seqüência de 13 encontros de em média 2 horas cada: pré-teste; familiarização com o ambiente computacional; atividades nos micromundos em duas sequências diferentes (dois pares de DG Paralelo, DG Cartesiano e Function Probe e os outros dois fizeram Function Probe, DG Paralelo e DG Cartesiano); uma entrevista final para investigar as conexões entre percepções articuladas em micromundos diferentes. Uma análise do currículo que os estudantes seguiram serviu para identificar similaridades entre o currículo e as percepções desenvolvidas nos micromundos.

Pesquisadores (Hoyles & Noss, 1987 e Sierpinska, 1992) têm trabalhado com um modelo que classifica os atos de entendimento em quatro categorias: usar, discriminar, generalizar e sintetizar. 'Usar' é o ato de utilizar um conceito como ferramenta para alcançar um objetivo particular. 'Discriminar' é o ato de identificar partes diferentes da estrutura de um conceito. 'Generalizar' é o ato de estender o campo de aplicabilidade destas partes. No processo de generalização, novos aspectos da estrutura de um conceito são descobertos. Finalmente, 'Sintetizar' é o ato de integrar diferentes representações de um mesmo conhecimento em formas simbólicas diferentes vindas de diferentes domínios como um todo. Este estudo adotou três destas fases — DGS, investigando percepções em representações diferentes incorporadas nos micromundos diferentes.

Uma análise longitudinal foi elaborada traçando a evolução das percepções dos estudantes dos sub-conceitos escolhidos enquanto os mesmos interagiam com os micromundos, considerando: as origens das percepções, e ao conjunto de funções as quais essas percepções são aplicadas pelos alunos e poderiam ser aplicadas de um ponto vista matemático. Essa análise tenta identificar os principais aspectos dos micromundos que aparentam contribuir com o progresso do estudante. Como instrumento de análise foi criado

[3] Vel, sufixo do latin (bile), dá formação a adjetivos exprimindo capacidade, qualidade (Dicionário Escolar da Língua portuguesa, Francisco da Silveira Bueno, 11ª edição, Rio de Janeiro, FENAME, 1980).

um diagrama longitudinal, que representa visualmente as diferentes percepções dos estudantes sobre um dado sub-conceitos em cada micromundo, as famílias de função onde a percepção foi expressa, assim como as conecções entre diferentes percepções dentro de um micromundo e entre diferentes micromundos. Daí, os resultados de cada caso foram comparados numa análise cross-seccional.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Ao interagirem com DG Paralelo os pares de estudantes desenvolveram percepções variacionais de alguns dos sub-conceitos, e através de DG Cartesiano, conectaram as mesmas com percepções pictóricas. Para ilustrar tais desenvolvimentos vamos discutir, em detalhe, o caso do par de estudantes Bernardo e Charles quanto ao sub-conceito de função constante, sub-conceito que os outros pares de estudantes tiveram similar desenvolvimento.

Os resultados serão aqui apresentados nos diagramas longitudinais (Gomes Ferreira & Hoyles, 1997) para entendimento de sua representação veja o glossário do mesmo no apendice.

Bernardo & Charles: função constante

O diagrama 1 mostra que apesar de apresentarem no pré-teste percepções incorretas de um ponto de vista matemático, Bernardo & Charles articularam uma percepção variacional de função constante em DG Paralelo. No pré-teste, o termo função constante foi confundido com função periódica (veja a e c). E mais, um carro parado por um determinado tempo foi

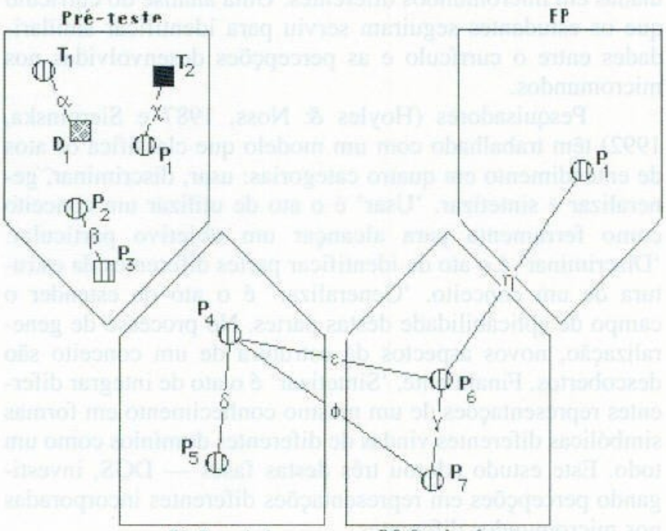

Diagrama 1 - Charles & Bernardo: função constante[4].

4

T_1 - Função Constante	P_3 - Um ponto no gráfico Cartesiano
T_2 - Função Periódica	P_4 - y é parado
D_1 - Gráfico com traçado repetitivo	P_5 - Não adianta mover x, o jogador não faz nada
P_1 - Reta horizontal	P_6 - y é constante; y não muda
P_2 - Comportamento parado	P_7 - (x,y) move-se em linha reta horizontal

representado por um ponto no gráfico de distância por tempo (veja b), demonstrando uma visão pictórica de gráficos. Em DG Paralelo, os jogadores que escondiam funções constantes foram caracterizados como parados (P_4), o que levou os estudantes a considerarem os mesmos numa categoria completamente separada dos jogadores que escondiam funções polinomiais de 1º grau. Eles também construíram a idéia de independência, i.e. que o jogador era independente de x: "Não adianta mover [x], ele [o jogador] não faz nada" (P_5). Note que essas percepções variacionais foram construídas tomando em conta a natureza de DG Paralelo, elas estão fortemente baseadas nos movimentos dos atores.

Dada esta construção ser situada em DG Paralelo, faz-se importante salientar que através da interação com DG Cartesiano, como mostra o diagrama, uma conexão foi construída entre a percepção variacional (P_4) e percepções pictóricas prévias — 'reta horizontal' (P_1). Para tal conexão a possibilidade de manipular x e observar x, $f(x)$ e $(x,f(x))$ separadamente foi essencial. A partir da expectativa de Bernardo de ver '$(x,f(x))$ como um ator parado' em vez de $f(x)$ em DG Cartesiano, os estudantes conectaram o fato de '$(x,f(x))$ mover-se em reta horizontal' ao fato de '$f(x)$ ficar parado' (veja as conceções d, e e f). Tal conexão foi reafirmada em Function Probe, quando os estudantes argumentaram que o gráfico é uma linha reta porque "y fica constante" (veja h). Este caso nos mostra como, DG Cartesiano foi usado como ponte entre visões variacionais e pictóricas.

Outros sub-conceitos

As percepções comuns aos pares de estudantes deixaram claro o status especial atribuído a alguns sub-conceitos através 'dos movimentos de x e $f(x)$' em DG Paralelo, indicando uma aquisição de uma percepção variacional como apontado por Goldenberg et al (1992). Porém, esta aquisição variou de sub-conceito a sub-conceito, por exemplo, simetria axial e periodicidade foram raramente identificada pelos pares de estudantes. Um sumário das percepções desenvolvidas pela maioria dos pares em DG Paralelo e conectados com visões prévias em gráficos, usando DG Cartesiano como ponte, pode ser dado por:

- Vértice visto como 'Ponto onde $f(x)$ troca orientação'
- Reta horizontal é justificada por '$f(x)$ é independente de x' ou '$f(x)$ é constante';
- Monotonicidade como 'Direção de retas' visto como 'a comparação das orientações dos movimentos de x e $f(x)$', que facilitou a generalização para gráficos curvos.
- Taxa de variação em retas é identificado pela 'razão entre as variações (ou valores) de x e $f(x)$', conectando-a com a declividade;
- Curvas e retas são caracterizadas e justificadas como 'razões ...' constante ou variável;
- Conjunto imagem passa de visão polarizada (imagem positiva e negativa) para visão envolvendo 'imagem limitada e ilimitada'.

Diana & Gisélia: simetria axial

Em contraste com o sub-conceito de função constante, simetria axial não foi identificada em DG Paralelo de forma

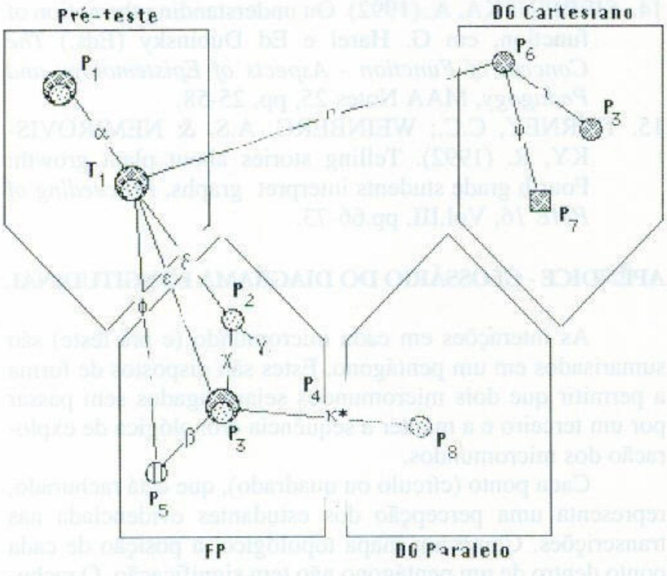

Diagrama 2 - Diana & Gisélia: simetria axial[5].

espontânea pelos pares de estudante. No caso de Gisélia & Diana, o diagrama 2 mostra que suas percepções prévias de simetria axial eram pictóricas (veja P_1). Porém, a interação com DG Cartesiano serviu para encorajar os estudantes a buscarem um sentido funcional para tal visão pictórica (veja as conexões h e i). A partir do formato do gráfico percorrido pelo movimento de $(x,f(x))$ na tela de DG Cartesiano, Gisélia reconheceu que o jogador de $f(x)=7\text{sen}(0.25fx)$ como simétrico com eixo de simetria passando por um dos vértices do gráfico. Porém, a ausência do traçado do gráfico encorajou Gisélia a tentar uma correspondência funcional para tal visão, o qual foi reconfirmado com mais explorações durante a entrevista final: 'O jogador faz o mesmo movimento' (P_8). Este é um caso onde visões pictóricas prévias são trazidas a discussão ao se reconhecer o formato do gráfico em DG Cartesiano, e a partir daí, correspondências variacionais são buscadas. Em outras palavras, a ponte é percorrida em sentido contrário.

DG Cartesiano explorado como ponte de mão dupla

Apesar de alguns dos sub-conceitos serem dificilmente discriminados em DG Paralelo, a pesquisa mostrou que DG Cartesiano foi explorado pelos estudantes como uma ponte entre percepções variacionais (construídas em DG Paralelo ou em DG Cartesiano) e pictóricas no sistema Cartesiano para todas os sub-conceitos. Para alguns sub-conceitos (variação e vértice) e pares de estudantes as conexões foram feitas a partir de percepções

Tabela 1 - Exploração de DG Cartesiano como ponte[6].

	Ponte	
Sub-conceitos	DG Cart. -> Sist. Cart.	Sist. Cart.-> DG Cart.
Vértice	[B&C] [D&G] [J&T]	
Função Constante	[J&A] [B&C] [J&T]	[D&G]
Monotonicidade	[B&C] [J&T] [J&A]	
Taxa de variação	[J&A] [B&C] [D&G]	
Curvatura	[J&A] [B&C] [J&A]	[J&T]
Conjunto Imagem	[J&A]	
Simetria axial	[B&C] [D&G]	
Periodicidade		[J&A] [B&C] [D&G] [J&T]

variacionais construídas em DG Paralelo, para outros casos os estudantes trouxeram percepções pictóricas prévias buscando um correspondente funcional através de DG Cartesiano.

A análise dos estudos de caso sugere-nos algumas razões pelas quais DG Cartesiano serviu como ponte:

- natureza de descrever/advinhar das atividades;
- tentativas dos estudantes de trazer conhecimento e termos escolares após reconhecerem a família da função escondida em cada jogador;
- apresentação dos objetos x, $f(x)$ e $(x,f(x))$ como objetos separados;
- o contraste entre a possibilidade de visualizar o formato do gráfico e a ausência do mesmo na tela.

É interessante notar que estas razões enfatizam os aspectos técnicos dos micromundos, a natureza das atividades criadas em torno do software e o conhecimento prévio dos estudantes.

ALGUMAS REFLEXÕES

O estudo mostra casos onde DG Cartesiano funcionou como uma representação entre DG Paralelo e a representação Cartesiana. Eles vão além das hipótese de Goldenberg et al (1992) por mostrar que DG Cartesiano foi explorado como uma ponte de mão dupla. Não só sub-conceitos com status variacional em DG Paralelo foram conectados com a representação Cartesiana, como também, sub-conceitos que os estudantes conheciam pictoricamente no sistema Cartesiano foram levados de volta para DG Paralelo.

As razões apontadas para DG Cartesiano servir como ponte refletem três pontos fundamentais na composição de micromundos. As duas últimas refletem a importância à um nível técnico. Como os conceitos estão incorporados no software educacional? O que o novo software traz para o entendimento conceitual que anteriormente (sem computador) é difícil de realizar? A primeira razão revela a importância das atividades elaboradas em torno do software para encorajar os estudantes a desenvolverem percepções, generalizações e conexões. E por fim, a segunda razão revela o caráter dos indivíduos, o micromundo também depende da exploração que cada estudante faz dele.

---

[5]
T_1 - Simetria
P_1 - Gráfico simétrico com eixo de simetria diferente dos eixos Cartesianos.
P_2 - Simetria entre duas parabolas com eixo de simetria diferente do eixo x.
P_3 - Eixo de simetria diferente do eixo y associado a eixo de simetria passa pelo vértice.
P_4 - Os ys dos vértices não são números simétricos.
P_5 - Eixo de simetria no gráfico de y = 0.
P_6 - Eixo de simetria reconhecido pelo formato do traçado de (x,y).
P_7 - O mínimo fica repetindo.
P_8 - O jogador repete seu movimento.

[6] Os impressos em cinza representam pontes feitas durante a entrevista final.

REFERÊNCIAS

1. CLEMENT, J. (1985). Misconceptions in Graphing, *Proceedings of PME 9*, Vol.I, pp.369-75.
2. CONFREY, J.; SMITH, E. & CARROLL, F. (1991a). *Function Probe: Academic Version*, Department of Education, Cornell University, Ithaca - NY.
3. CONFREY, J.; SMITH, E.; PILIERO, S. & RIZZUTI, J. (1991b) The Use of Contextual Problems and Multi-Representational Software to Teach the Concept of Functions, *Final Project Report*, Cornel University, NY.
4. GOLDENBERG, E.P. (1988). Mathematics, Metaphors and Human Factors: Mathematical, Technical and Pedagogical Challenges in the Educational Use of Graphical Representation of Functions, *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol.7, No.2, pp.135-73.
5. GOLDENBERG, E.P. (1991). The Difference Between Graphing Software and Educational Graphing Software, em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.) *Vizualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes19, pp.77-86.
6. GOLDENBERG, E.P. (1993) Ruminations about dynamic imagery", em NATO Advanced Research Workshop - *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Oxford, Institute of Education University of London and The Open Unversity, May 20-25.
7. GOLDENBERG, E.P.; LEWIS, P. & O'KEEFE, J. (1992). Dynamic Representation and the Development of a Process Understanding of Function, em G. Harel e Ed. Dubinsky (Eds.) *The Concept of Function - Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, pp.235-60.
8. GOMES FERREIRA, V.G. (1997). *Exploring Mathematical Functions through Dynamic Microworlds*, Tese de Doutorameno, Instituto de Education, Universidade de Londres.
9. HOYLES, C. & NOSS, R. (1987). Seeing what matters: Developing an understanding of the concept of parallelogram through a LOGO microworld, *Proceedings of PME 11*, Vol.II, pp.17-23.
10. MONK, S. (1992). Students' Understanding of a Function Given by a Physical Model, em G. Harel e Ed Dubinsky (Eds.) *The Concept of Function - Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, pp.175-94.
11. MOSCHKOVICH, J. (1992). Students' use of the x-intercept: An instance of a transitional conception, *Proceedings of PME 16*, Vol.II, pp.128-35.
12. NOSS, R. & HOYLES (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-Londres.
13. PREECE, J. (1983). Graphs are not Straightforward, em T.R.G. Green, S.J. Payne e G.C. van der Veer (Eds.) *The Psychology of Computer Use*, Academic Press, Londres, pp.41-56.
14. SIERPINSKA, A. (1992). On understanding the notion of function, em G. Harel e Ed Dubinsky (Eds.) *The Concept of Function - Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, pp. 25-58.
15. TIERNEY, C.C.; WEINBERG, A.S. & NEMIROVISKY, R. (1992). Telling stories about plant growth: Fourth grade students interpret graphs, *Proceeding of PME 16*, Vol.III, pp.66-73.

APÊNDICE - GLOSSÁRIO DO DIAGRAMA LONGITUDINAL

As interações em cada micromundo (e pré-teste) são sumarisados em um pentágono. Estes são dispostos de forma a permitir que dois micromundos sejam ligados sem passar por um terceiro e a manter a seqüência cronológica de exploracão dos micromundos.

Cada ponto (círculo ou quadrado), que está rachurado, representa uma percepção dos estudantes evidenciada nas transcrições. Como um mapa topológico, a posição de cada ponto dentro de um pentágono não tem significação. O rachuramento de cada ponto indica a família de funções a qual os estudantes discriminaram e generalisaram as percepções:

Funções Constante Funções polinomias de 1º grau

Funções quadráticas Funções seno

O conjunto de funções não foi claramente identificado — uma percepção geral.

O processo de generalização de uma percepção são representado pela inscrição de um ponto (quadrado ou círculo) dentro do outro.

Os pontos são rotulados com letras e números para diferenciar as percepções (P), dos usos de termos (T) e das definições (D) dadas durante o pré-teste. Mesmas percepções em micromundos diferentes recebem o mesmo nome.

Pontos são representados de duas formas: círculos e quadrados. Percepções sem correspondência com o sub-conceito de um ponto de vista matemático são representados por quadrados, em vez de círculos. Estes também apresentam-se rachurados.

Conexões entre percepções diferentes são mostradas por linhas ligando os pontos. As conexões, assim como as percepções, são representadas somente se existir uma clara evidência nas transcrições que a conexão foi feita pelos estudantes. Cada conexão é denominado por uma letra grega para facilitar a referência a mesma no texto. Assim como as percepções, conexões similares recebem a mesma letra.

Duas cores, preto e cinza, distinguem conexões e percepções articuladas espontâneamente, ao trabalharem com os micromundos ou no pré-teste, das motivadas na entrevista final. As pretas serão utilizadas para percepções e conexões espontâneas e cinza para as motivadas. Conexões motivadas são distinguidas por um asterisco para facilitar visualmente a indentificação das mesmas no texto.