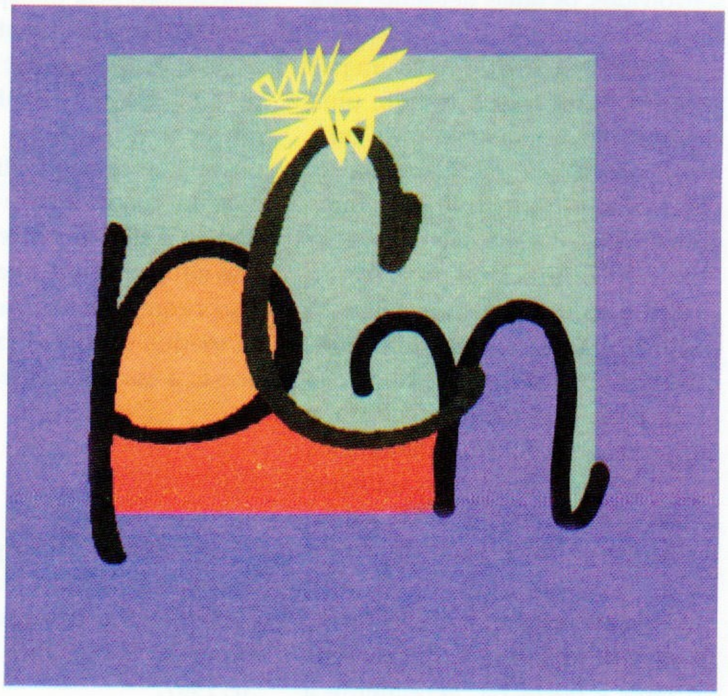
PCN

PCN NA SALA DE AULA

Maria Amábile Mansutti

Nesta seção publicamos sugestões de atividades que podem ser usadas em sala de aula. Neste número apresentamos atividades elaboradas pela professora Maria Amábile Mansutti[1] para o Programa de Educação Continuada, desenvolvido pela PUC/SP junto à Secretaria Estadual de Educação de São Paulo. Seria muito bom receber relatos de professores associados da SBEM, sobre desenvolvimento dos projetos e também outras sugestões de atividades.



Números naturais, adição e subtração, na 5ª série.

Meta: ler, escrever, comparar números e resolver problemas que envolvam adição e subtração

Observações iniciais:

Para auxiliar o professor de quinta série a alcançar esta meta elaboramos este material organizado-o em três unidades.

1 A primeira unidade é destinada ao estudo dos números naturais e inclui atividades para que os alunos leiam e interpretem números apresentados por meio de diferentes representações; observem diferentes contextos em que os números são utilizados e identifiquem suas diferentes funções (quantificar, ordenar e codificar). Também há atividades para retomar o estudo do Sistema de Numeração Decimal onde se destacam suas principais características: os agrupamentos de 10 em 10 e o valor posicional. Ao explorar essas atividades é importante fazer uso da terminologia própria do Sistema de Numeração Decimal.

2 A segunda unidade é composta por atividades que permitem verificar o domínio de diferentes procedimentos de cálculo mental: escrito, exato e aproximado. Esses procedimentos relacionam-se e complementam-se. O cálculo escrito é desenvolvido apoiado em estratégias de cálculo mental, em estimativas e aproximações, por sua vez, o cálculo mental pode ser um procedimento limitado quando as operações envolvem números com muitos dígitos. Assim, no trabalho com cálculo, o que se espera é que o aluno seja capaz de escolher o procedimento mais adequado em função da situação-problema, dos números, das operações envolvidas e do grau de exatidão exigido pela resposta.

No desenvolvimento das atividades de cálculo é importante fazer com que os alunos estabeleçam relações entre os números, identifiquem significados das operações, explorem propriedades e regularidades das operações, utilizem processos de decomposição e relações de compensação. Também é fundamental que eles sejam estimulados a "inventar", explicar e comparar procedimentos de cálculo mental e escrito. Assim, terão melhores condições de compreender os procedimentos convencionais e estarão exercitando a capacidades de memorização, de análise e síntese, de generalização e de dedução. Algumas atividades exploram a calculadora como um recurso para estimular o aprimoramento dessas capacidades. Ela também pode ser utilizada como estratégia para verificação e justificativa de resultados.

3 Na terceira unidade aparecem situações-problema que possibilitam explorar alguns dos significados da adição e da subtração. Embora esse estudo se inicie nas séries anteriores, nota-se que os alunos das séries mais avançadas ainda apresentam dificuldade ao resolver algumas delas. Uma das razões volver experimentos. Isso, pela sua importância no processo de aquisição de conhecimentos científicos.

O estudo aqui desenvolvido é fruto de muitas experiências no laboratório de informática, utilizando o ambiente computacional *Cabri-Géomètre II*, onde além do *teorema de superfícies lunares* outros foram desenvolvidos, os quais deixamos para as próximas edições.

O *Cabri-Géomètre II* teve um papel importante nesse estudo, uma vez que este é constituído de uma estrutura básica que se apoia na construção e exploração de figuras geométricas. E a sua filosofia metodológica, contribui no processo de ensino e aprendizagem, facilitando a representação concreta de conhecimentos abstratos. Nesse sentido, o aluno pode visualizar e analisar em tempo real os conceitos inerentes a uma família de desenhos ou figuras geométricas. Como se pode perceber no experimento acima desenvolvido.

É interessante notar, que quando se pode trabalhar no papel usando lápis e borracha, geralmente a análise é centrada num objeto estático, e o aluno se limita àquele objeto sobre o papel, enquanto que nos ambientes computacionais, em particular no *Cabri II*, o aluno pode analisar esse objeto, num ponto de vista epistemológico e didático mais abrangente, olhando não somente o objeto isoladamente mas, sim percorrendo a sua classe em função da manipulação direita em tempo real. Essas atitudes podem ser observadas durante o processo experimental de um estudo análogo.

Nesse âmbito, pode-se concluir que, a apresentação de atividades sustentadas pela transposição didática em meios informatizados, onde o aluno pode trabalhar com mudanças de quadros ou pontos de vista, a fim de acessar outras ferramentas, possibilita uma aprendizagem participante, motivadora e significativa, onde o *Cabri-Géomètre II* desempenha um papel fundamental, e o professor como a gente transformador e formador do cidadão, precisa ter acesso a essa tecnologia.

Bibliografia

ALMOULOUD, Ag Saddo. *Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia de Pesquisa,* Caderno de Educação Matemática Vol. III, PUC-SP, 1997.

BALLACHEFF N., *Contribuition de la didactique et de l'épistémologique aux recherches en EIAO,* actes des 13ème journnées Francophones sur l'Informatique, Formation Intelligemment Assitée par Ordinateur, Genève, pages 9-38, 1991.

BELLEMAIN, F. *Conception, realisation et experimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur.* Educational Studies in Mathematics, nº 23, Kluwer Academic Publishers, pp. 59-97, Amsterdam (Holanda), 1992.

BELLEMAIN, F., CAPPONI, B. *Specificité de l'organization d'une sequance d'inseginement lor de utilization de l'ordinateur.* Educational Etudies In Mathematics. Alemanha, 1992.

DOUADY, Regine. *Jeux de cadre et dialectique outil-objet.* RDM, vol. 7, nº 2, 1986

DUVAL R. *Approche cognitive des problemès de géomètrie en termes de congruence,* Analise de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strabourg, Vol. 1, pp. 57-74, Stranburgo (Franca), 1988.

FERNEDA E. "Conception d'un agente rationnel et examen de son raisonnement en géometrie", *Tese de doutorado,* Université de Montpellier (França), 1992.

HENRIQUES, A. "Ensino e Aprendizagem da Geometria Métrica: *uma seqüência didática com auxílio do software Cabri-Géomètre II* ", Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista – Unesp/Rio Claro/SP, 1999.

LABORDE, C."*L'enseignement de la géomètrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactique*", Recherches en Didactique de Mathematiques, vol. 9, n. 3, 1990.

lembrar que as variáveis didáticas que caracterizam uma situação geométricas são elementos imprescindíveis no desenvolvimento do estudo da geometria, uma vez que os objetos geométricos distinguem-se de uma classe para outra, onde certas propriedades são válidas particularmente numa determinada classe de figuras.

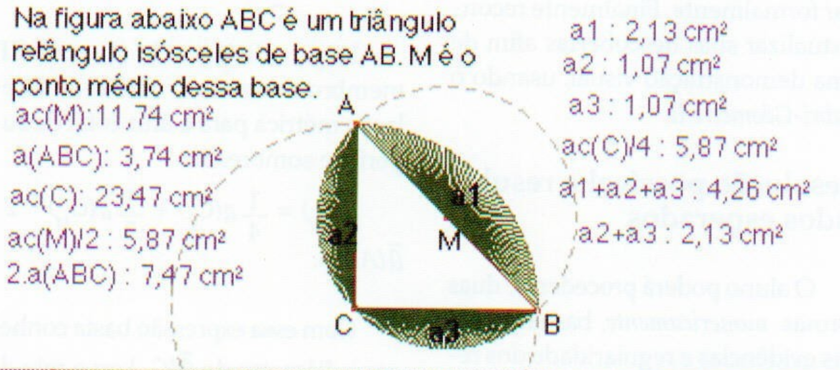
Pré-requisitos e competências

Os alunos devem ter em mente as noções de composição e decomposição de figuras ou desenho. Pois, todo desenho pode ser modificado de diversas maneiras, pode-se dividi-lo em várias partes, que são sub-desenhos, ou incluí-lo em outro desenho no qual se torna um sub-desenho. Tais modificações, ditas *mereológicas* segundo R. Duval (1988), se fazem em função da relação entre a parte e o todo, e pode-se, assim, aumentá-lo, diminuí-lo ou deformá-lo. Essa modificação é uma modificação *ótica*, pois ela transforma um desenho em um outro denominado imagem. Além disso, uma razoável apreensão perceptiva e operatória sobre superfícies planas se faz necessária. Os alunos deverão conhecer também propriedades do triângulo retângulo isósceles, a relação ou a fórmula que calcula a área do círculo, bem como estabelecer relações métricas entre a parte e o todo (de superfícies planas limitadas). E saber aplicar problemas ou resultados conhecidos numa situação nova. Essa último é tão importante quanto os outros, pois sem ele seria quase impossível demonstrar formalmente o teorema anteriormente estabelecido.

Esse aspecto mostra da importância dos fundamentos da matemática, uma vez que permitem justificar os conceitos dessa ciência, dependendo do campo semântico referente aos elementos em estudo.

Papel e Lápis × Cabri-Géomètre

O teorema assim descoberto, pode ser recontextualizado, usando o ambiente do *Cabri-Géomètre II*, (vide figura abaixo).



	a2 :	a3 :	a2+a3 :	a1 :	a1+a2+a3 :
1	0,96	0.96	1,93	1.93	3,86
2	2.68	2,68	5.36	5,36	10.72
3	6,09	6.09	12,18	12.18	24,36
4	0.24	0,24	0.48	0,48	0.96
5	1,12	1.12	2,24	2.24	4,48
6	1.23	1,23	2.46	2,46	4.91
7	1,07	1.07	2,13	2.13	4,26

A possibilidade de verificar uma conjectura sob diferentes configurações, permite a visualização das ocorrências numa dada situação geométrica proposta ao aluno que intervém na resolução de um problema utilizando o micromundo *Cabri-Géomètre II.*

Na situação acima, os valores fornecidos pelo Cabri, inerentes aos elementos da figura numa primeira posição, são introduzidos na tabela. Movendo-se a figura a partir de um dos elementos de base, percorre-se a classe relativa a ela, atualizando de forma real e contínua os valores correspondentes, que são introduzidos novamente na tabela. E assim sucessivamente na medida que se percorre a classe relativa a essa figura.

Os valores assim registrados na tabela, são dados que evidenciam a situação, tendo-se a oportunidade de estudar passo a passo o que acontece com esses valores inerentes aos elementos da situação em estudo. Assim, segundo o processo de observação das evidências fornecidas por um exemplo que confirma as conjecturas, é possível, ao observar e analisar o quadro numérico da tabela anterior, o aluno descobrir ou redescobrir propriedades.

É nessa, entre outras técnicas que propomos os trabalhos em Geometria quando pensamos na tecnologia do ambiente computacional *Cabri-Géomètre II*, tomando como referência as noções de registro, de pontos de vista e fundamentalmente a noção da transposição informática e de jogo de quadros, passando do quadro geométrico ao quadro algébrico e vice-versa. Finalmente recontextualizar o saber em estudo, de modo que possa proporcionar ao estudante uma aprendizagem criativa e significativa para a sua formação.

Considerações finais

Dentro do domínio da pesquisa em Ensino Iterativo Auxiliado por Computador (EIAC), a Geometria elementar é considerada como um dos espaços adequados para desenmesma classe que a figura acima. Após sua construção deve investigar e estudar os fenômenos ou conceitos geométricos nela inerentes, descrever sua(s) descoberta(s), e demonstrar formalmente. Finalmente recontextualizar suas descobertas afim de uma demonstração visual, usando o *Cabri-Géomètre II*.

Resolução possível e resultados esperados

O aluno poderá proceder de duas formas: *numericamente*, baseando-se nas evidências e regularidade dos resultados (contando com os recursos do *Cabri II*); ou *algebricamente*, generalizando o resultado para toda superfície da classe dessa figura.

Supondo escolhida a Segunda opção, o aluno deverá determinar então a área da superfície hachurada *em termos algébricos* (mudando de quadro geométrico à algébrico), para em seguida usar um caso particular a partir de valores fornecidos pelo `Cabri` e, finalmente, conjecturar e institucionalizar a situação.

Considera-se inicialmente as notações:

`a1` = área da superfície assinalada sobre o lado AB (hipotenusa) do triângulo ABC;

`a2` = área da superfície assinalada sobre o lado AC (cateto) do triângulo ABC;

`a3` = área da superfície assinalada sobre o lado BC (cateto) do triângulo ABC;

$\bar{\mathfrak{a}}(S_T) = a1 + a2 + a3$ = *área total da superfície sombreada*; $\bar{\mathfrak{a}}(ABC)$= *área do triângulo ABC*; $\bar{\mathfrak{a}}(C_C)$= *área do círculo de centro em C*; e $\bar{\mathfrak{a}}(C_M)$= *área do círculo de centro em M.*

Nessas condições tem-se as seguintes relações métricas: $\bar{\mathfrak{a}}(ABC) + a1$ é igual a um quarto de $\bar{\mathfrak{a}}(C_C)$. Isto é, $\bar{\mathfrak{a}}(ABC) + a1 = \frac{1}{4}\bar{a}(C_C)$ *ou seja* $a1 = \frac{1}{4}\bar{a}\ (CC) - \bar{\mathfrak{a}}ABC)$ **(I)**

Note que:

$$a2 + a3 + \bar{\mathfrak{a}}(ABC) = \frac{1}{2}\bar{a}(C_M)$$

ou seja,

$$a2 + a3 = \frac{1}{2}\bar{a}(C_M) - \bar{\mathfrak{a}}(ABC) \text{ (II)}$$

Logo, adicionando **(I)** com **(II)** membro a membro, obtêm–se a relação métrica para a área total da superfície sombreada:

$$\bar{\mathfrak{a}}(S_T) = \frac{1}{4}\bar{a}(C_C) + \frac{1}{2}\bar{a}(C_M) - 2 \cdot \bar{\mathfrak{a}}(ABC).$$

Com essa expressão basta conhecer o diâmetro do $\bar{\mathfrak{a}}(C_M)$ ou o raio de $\bar{\mathfrak{a}}(C_C)$ para obter-se a área total $\bar{\mathfrak{a}}(S_T)$ em termos numéricos.

Se tomarmos **(II) – (I)** obtêm-se:

$$a2 + a3 - a1 = \frac{1}{2}\bar{a}(C_M) - \frac{1}{4}\bar{a}(C_C).$$

Recorrendo a fórmula que permite calcular a área de um círculo, teremos:

$$\bar{\mathfrak{a}}(C_M) = \pi(AM)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\bar{a}(C_M) \text{ [i]}$$

$$\bar{\mathfrak{a}}(C_C) = \pi(AC)^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\bar{a}(C_C) = \frac{\pi}{4}(AC)^2 \text{ [ii]}$$

Fazendo **[i] – [ii]** membro a membro obtêm-se:

$$\frac{1}{2}\bar{a}(C_M) - \frac{1}{4}\bar{a}(C_C) = \pi\,[\frac{1}{2}(AM)^2 - \frac{1}{4}(AC)^2] \text{ [iii]}.$$

Pelo teorema de Pitágoras temos $(2 \cdot AM)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 2 \cdot (AM)^2$. Substituindo em **[iii]** obtêm-se

$$\frac{1}{2}\bar{a}(C_M) - \frac{1}{4}\bar{a}(C_C) = 0.$$

Logo de **II – I** conclui-se que: **a2 + a3 – a1 = 0**. Isto é, **a1 = a2 + a3**

Com essa expressão podemos conjecturar que: *se ABC é um triângulo retângulo isósceles, reto em C, a área da superfície limitada por hipotenusa e o arco menor do circulo de raio AC centrado em C é igual a soma das áreas das superfícies limitadas pelos catetos e arco do círculo de raio AM que contem C, centrado em M (onde M o ponto médio da hipotenusa).*

Institucionalizou-se essa conjectura como Teorema de superfícies lunares no triângulo retângulo isósceles, ou simplesmente *Teorema de Superfícies Lunares.*

Análise didática do experimento

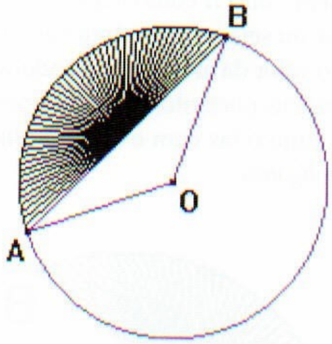
A formulação de conjecturas (ou teoremas) e suas respectivas provas é uma das características fundamentais na investigação de situações problema no contexto Matemático e é, provavelmente o que a distingue das atividades de outras áreas. Isso, entre outras razões, leva a defender a necessidade de caracterizar metodologias apropriadas para o ensino e aprendizagem da Matemática, fornecendo assim aos alunos ferramentas eficientes para criarem, conjecturarem e provarem visual ou formalmente. Tais métodos devem convenientemente serem colocadas principalmente ao alcance daqueles reconhecidos como futuros professores de Matemática do ensino fundamental à Universidade.

A situação geométrica aqui proposta, parece ser simples, porém, convida os alunos para o mundo do "fazer matemática". O mais interessante na atividade é o espírito permanente de desafio, de modo a motivar nos alunos atitudes de criarem, de explorarem, de conjecturarem e finalmente de provarem ou verificarem a veracidade dos resultados com auxílio dos recursos do *Cabri-Géomètre II* .

São variáveis didáticas[1] da situação em estudo, *o triângulo retângulo isósceles* e *o círculo*, pois só a geometria dessas variáveis nos permite formular a conjectura ou teorema anteriormente estabelecido (*Teorema de Superfícies Lunares*). É interessante

1 Variáveis didáticas - são aquelas que estão a disposição do professor para analisar situações didáticas durante uma investigação, Almouloud, (1997).

pode ser encontrada, usando a teoria associada à área de um setor circular em função do raio e do comprimento do arco.



Raio(AO)=1.86 cm

Arco(AB)= l =4.18 cm

Área(ABO)=1.35 cm²

Área(C(AO))=10.87 cm²

Já que o *Cabri II* interpreta a área de um círculo e a de um triângulo, como mostram os dados da figura ao lado fornecidos pelo *Cabri*, tem-se que a área da superfície sombreada é em termos algébricos:

$a(S) = A_{setor} - A_{triângulo}$.

Onde A_{setor} é a área do setor em função do raio $R = AO$ e do comprimento do arco l = (AB. Assim, pela regra de três simples tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi R \rightarrow \pi R^2 \\ l \rightarrow A_{setor} \end{array}\right\} \rightarrow A_{setor} = \frac{lR}{2} =$$

$$= \frac{4{,}18 \cdot 1{,}86}{2} = 3{,}89\text{cm}^2$$

Logo,

$$a(S) = A_{setor} - A_{triângulo} = (3{,}89 - 1{,}35)\text{cm}^2 = 2{,}54\ \text{cm}^2.$$

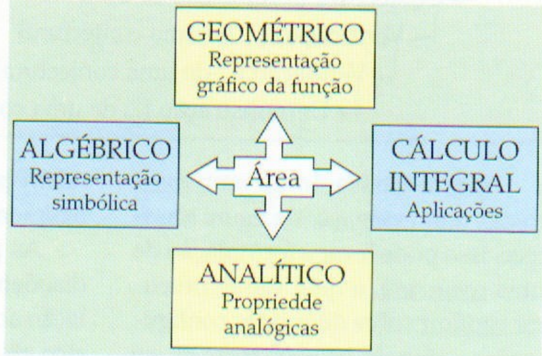
Esse valor corresponde a área da superfície sombreada. Note que nessa situação, por exemplo, o *Cabri II* não devolve esse valor diretamente, ou seja, não interpreta uma superfície dessa natureza, entre outras, tal como o faz com, *circunferências, elipses e polígonos*. Portanto, a passagem do computador para o papel-e-lápis, se faz pois necessária.

Outro aspecto a considerar, diz respeito a demonstração. No papel-e-lápis, uma demonstração (ou prova) é geralmente formal e, no computador (ou *Cabri II*), a demonstração (ou prova) pode se tornar mais atraente, em função da manipulação direta e visualização dos elementos inerentes ao processo. Segundo *Davis, P. (1993), uma prova visual [teorema visual] é uma saída gráfica ou visual de um programa de computador – uma família de saídas semelhantes que o olhar organiza como um todo coerente e identificável e, que é capaz de inspirar questões matemáticas de natureza tradicional ou que contribui de alguma maneira para nossa compreensão do mundo real.*

Assim, em uma situação relativa ao Ensino Iterativo Auxiliado por Computador (EIAC), o processo de *transposição informática* que segundo Almouloud (1997) permite *recontextualizar* o saber, abrindo caminhos para uma aprendizagem criativa, é extremamente importante, uma vez que as novas tecnologias possibilitam isso. Um saber se diz *recontextualizado* quando colocado em situações artificiais, dá sentido aos novos conceitos (Almouloud (1997). Nesse âmbito, a transposição informática, pode envolver também a *noção de jogo de quadros*, que é de importância nesse trabalho.

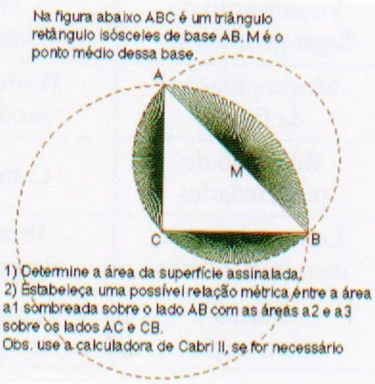
A *noção de jogo de quadros* foi introduzida na didática da matemática por R. Douady (1986), para tornar explícito que uma das características importantes da Matemática é a capacidade de mudança de *ponto de vista*, de tradução de um problema de um quadro para outro, com a finalidade específica de acessar outras ferramentas de resolução que as inicialmente previstas. Um quadro é constituído, de ferramentas de uma parte da Matemática, de relações entre objetos, de suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações.

O conceito de áreas de superfícies planas, por exemplo, está situado em pelo menos quatro quadros:



A exploração de cada quadro depende da situação em estudo, bem como do nível de exigências ou aplicações.

Nessa linha, com bases na noção da transposição informática e de jogos de quadros, propõe-se o experimento que é ilustrado na situação geométrica da figura abaixo:



Objetivos

- Calcular a área de uma superfície obtida pela interseção de figuras geométricas planas conhecidas pelos alunos;
- Reconhecer que o fato do Cabri II ler áreas de figuras planas não é genérico. Isto é, nem toda superfície plana aparentemente simples é interpretada pelo Cabri II;
- Explorar, descobrir, conjecturar e provar (demonstrar formalmente).

ESTUDO PRELIMINAR

O aluno deve construir usando os recursos do *Cabri II*, uma figura da

Construção (... de uma figura) ⎤
└→ Exploração (... de uma figura) ⎦ *Cabri-géomètre*
  └→ Conjectura (formulação de uma ...)
    └→ Verificação (... de uma conjectura) ⎤
      └→ Validação (... de uma conjectura) ⎦ *Cabri-géomètre*
        └→ Demonstração (... de uma conjectura)

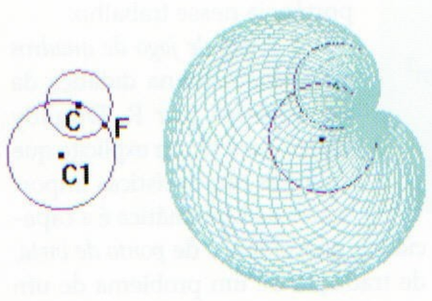
Após a efetivação de uma *construção*, uma *exploração* da figura acontece. Isso pode levar à formulação de uma *conjectura*, a qual vai-se procurar *verificar* sobre diferentes configurações e, depois, *validar* (*busca de um contra-exemplo*) enfim, *demonstrar* formalmente.

As principais características que dispõem o *Cabri-Géomètre II* em relação ao universo papel-e-lápis clássico são mostradas na tabela abaixo.

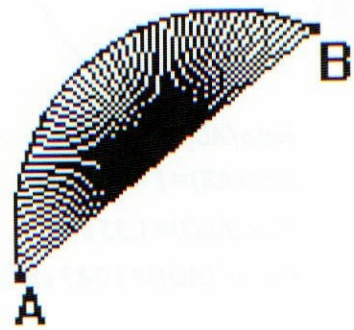
	Universo	
Característica	Cabri II	Papel-e-Lápis
Construção de figuras	Permite de um modo rápido	Permite
Redefinição de um objeto	Permite de um modo rápido	Não é possível
Deformação de uma figura	Permite deformar a figura	Não é possível
Visualização do lugar geométrico	Permite vizualizar	Não existe (ou bastante limitada)
Movimentação da figura	Permite de um modo rápido	Impossível
Validação de propriedades	Característica	Não existe (ou bastante limitada)
Leitura de áreas de superf. planas	Permite para algumas figuras	Analógico
Macro Construção	Permite de um modo rápido	Impossível

Descreve-se a seguir algumas dessas características. Um estudo mais abrangente sobre o assunto pode ser obtido em *Henriques (1999)*.

• *Visualização do lugar geométrico*: é uma das grandes forças do *Cabri II*, pois, permite visualizar o lugar geométrico que é descrito por um objeto, quando se faz variar um dos elementos de base. Na figura ao lado por exemplo, *o lugar geométrico da circunferência de centro C e raio CF na trajetória desse centro sobre a circunferência de centro C1, com o ponto F fixo, é um cardióide.*



• *Leitura de áreas de superfícies planas*: é outra característica importante em *Cabri-Géomètre II*. Entretanto, nem toda a superfície aparentemente limitada é interpretada como tal pelo *Cabri II*. Considere, por exemplo, a superfície plana de forma lunar, isto é, limitada por um arco e por um segmento cujas extremidades são os pontos A e B extremos do arco, como mostra a figura ao lado. Uma figura assim definida não é reconhecida pelo *Cabri II* como superfície limitada, ou seja, a opção área não devolve o valor da área correspondente à superfície, portanto, não a interpreta tal como o faz com o *círculos, elipses e polígonos*.



Porém, efetuando uma mudança de quadro, pode-se encontrar a área determinada pela superfície indicada. A passagem do universo *Cabri II* ao universo papel-e-lápis ou vice-e-versa se faz, então, necessária. Esse aspecto, é sustentado pela noção da transposição didática em meios informatizados o que Ballacheff (1991), chama *transposição informática*.

Nessa transposição, está presente o estudo dos conceitos de um ponto de vista epistemológico e didático, o estudo das dificuldades dos alunos na aprendizagem dos conceitos, assim como a possibilidade de utilizar o computador para a visualização da interface desse conceito num contexto de aprendizagem, afirma Bellemain (1991). Nesse processo, o professor desempenha um papel importante, na medida em que é responsável pela transposição dos conceitos que objetiva institucionalizar.

No exemplo anterior, se **AO** é a medida do raio da circunferência que contém o referido arco, e **ABO** é um triângulo onde os vértices **A** e **B** são os extremos do arco em questão, então a área da superfície sombreada