# PAPEL e LÁPIS x CABRI-GÉOMÈTRE II: o caso do teorema de superfícies lunares

Afonso Henriques *

## Introdução

O presente artigo tem como objetivo, levar ao conhecimento do leitor, os níveis de intervenção necessários, naturalmente, ao solucionar um problema utilizando o *Cabri-Géomètre II*, bem como as características pedagógicas que o distingue do universo"*papel-e-lápis*". E, assim, explorar uma metodologia para o ensino e a aprendizagem da Geometria em ambiente computacional com auxílio desse software.

Para enfatizar tal metodologia, apresenta-se com bases nas noções de *transposição informática* (Ballacheff, 1991) e de *jogo de quadros* (Douady, 1985), um estudo preliminar de um experimento onde os alunos podem intervir na solução de um problema geométrico usando papel-e-lápis, para em seguida usar os recursos do *Cabri-Géomètre II* ou vice-versa. Isso é possível, uma vez que a capacidade de deformação proporcionado pelo software, permite o acesso imediato e contínuo a todos os casos da figura, constituindo-se assim num recurso informático que torna viável a validação experimental de objetos geométricos. O estudo preliminar consiste numa análise matemática e didática relativa ao experimento. A análise matemática destaca a resolução possível e os resultados esperados, enquanto que a análise didática se preocupa com as variáveis didáticas, pré-requisitos e competência.

## Fundamentação

É notável, que as atividades relativas as construções geométricas no papel, exigem além do lápis e borracha, o uso de régua e compasso. O *micromundo* utilizado neste trabalho para auxiliar os alunos nessas atividades propostas, vem previamente preparado com essas ferramentas.

Trata-se do micromundo *Cabri-Géomètre II* proposto para o ensino-aprendizagem da Geometria Euclidiana Plana. É um software didático desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain no laboratório do Instituto de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Joseph Fourier de Grenoble, França, em colaboração com o Centro Nacional de Pesquisas Científicas (CNRS) e Texas Instrumentos.

O software, permite construir e explorar de forma interativa os objetos do universo da Geometria elementar em uma linguagem muito próxima a do universo"*papel-e-lápis*". As figuras nele construídas podem ser deformadas a partir do deslocamento de seus elementos de base, conservando-se suas propriedades. Com ele, é possível ainda visualizar lugares geométricos; medir distâncias, ângulos e observar a evolução em tempo real durante a manipulação dinâmica e rápida das figuras.

Além dos recursos inerentes à construção, outros estão também disponíveis, dos quais destacam-se alguns mais importantes neste trabalho: suprimir ou ocultar um objeto; redefinir um objeto; obter macro-construção; verificar uma propriedade; deformar ou explorar uma figura, determinar medidas de comprimentos, medidas de áreas de superfícies planas e transferência de medidas.

Estes entre outros recursos fazem-se necessários no processo de ensino e aprendizagem da geometria. Pois, podem auxiliar o estudante na aquisição de conhecimento. Nesse contexto, Bellemain (1992), sustenta que uma das principais preocupações quando da elaboração do *Cabri Géomètre*, foi a de permitir aos alunos visualizarem na tela do computador, diferentes desenhos correspondendo a mesma descrição, isto é, pertencentes a mesma configuração ou classe. O que possibilita aos estudantes explorarem propriedades duma configuração geométrica, utilizando este software.

Assim, nas atividades propostas aos alunos no sentido de solucionar um problema, utilizando o software *Cabri-Géomètre II*, ocorrem sucessivamente os níveis tais como esquematizados abaixo, nos quais *Cabri* intervém principalmente em dois deles.

* Ms. Educação Matemática - Unesp/Rio Claro. Professor de Matemática – Universidade Estadual de Santa Cruz –UESC-Ba
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológica - DCET, e-mail: henry@jacaranda.uescba.com.br

## Mundo Atual

Ao estudarmos as equações polinomiais do 2º grau, a partir da 8ª série do Ensino Fundamental, utilizamos a representação dos europeus e a solução fornecida pelos hindus. A partir desse momento, tomamos ciência, que desde 1700 a. C., houve a preocupação com o trato e o desenvolvimento desse tipo de equação, culminando, nos dias atuais, em uma análise abrangente, em termos das relações entre os seus coeficientes. Dessa maneira, podemos determinar, mais facilmente, o sinal, os respectivos módulos e os valores de suas raízes, obtendo, assim, um melhor estudo desse conteúdo. Certamente, valorizaremos ainda mais o trabalho dos inúmeros matemáticos que participaram do desenvolvimento da álgebra antiga, que consistia, simplesmente, em solucionar inúmeros tipos de equações, dentre elas, o tema desse artigo, ou seja, a equação polinomial do 2º grau.

Hoje, solucionamos algebricamente qualquer tipo de equação polinomial do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a π 0, por meio da prática fórmula de Bháskara, ou seja:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

em que, o termo $b^2 - 4ac$ é denominado *discriminante*, ou seja, é o termo que discrimina a quantidade de raízes que uma equação polinomial do 2º grau possui. Essa denominação foi dada, pelo notável matemático inglês James Joseph Sylvester, em 1851.

No século XX foi adotada[11] a letra grega Δ (delta maiúsculo) para representar o discriminante. De forma que a referida expressão passou a ser escrita do seguinte modo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

**na qual,** $\Delta = b^2 - 4ac$

## Conclusão

Acreditamos que as informações[12] expostas forneçam a professores, estudantes e interessados um instrumento didático eficaz para o ensino e o aprendizado da equação polinomial do 2º grau. Com este artigo muitos professores podem responder as perguntas de seus alunos sobre a equação polinomial do 2º grau, e enriquecer as suas aulas com as curiosidades apresentadas.

## Bibliografia


**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 12ª ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: UNICAMP, 1995.

GARBI, Gilberto G. *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997.

MONGE, M. *Algèbre Trigonomètrie*. Paris: Eugène Belin, 1962.

**OUTRAS LEITURAS**

AABOE, Asger. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

BAUMGART, John K.. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: álgebra* Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. v.4.

BEKKEN, Otto B. *Equações de Ahmes até Abel*. Trad. José Paulo Quinhões Carneiro. Rio de Janeiro: GEPEM, 1994.

DAVIS, Harold T .*Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: computação*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. v.2.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. *Equação do 2º grau: Uma abordagem histórica*. Ijuí: UNIJUÍ, 1999.

GUELLI, Oscar. *Contando a História da Matemática*. São Paulo: Ática, 1995. v. 3.

____. *Contando a História da Matemática*. São Paulo: Ática, 1996. v. 2.

JACKSON, W. M. Discriminante. In: *Encyclopedia e Diccionario Internacional*. Rio de Janeiro: W.M. Jackson, INC., 1955. v. 6.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. *Arqueologia Matemática*. São Paulo: Prandino, 1991.

SERRASQUEIRO, José Adelino. *Tratado de Álgebra Elementar*. 17ª ed. Coimbra: J. Diogo Pires, 1936.


[12] Para maiores detalhes, a respeito da história da equação polinomial do 2º grau, consulte o livro "Equação do 2º grau: Uma abordagem histórica". Editora UNIJUÍ (0xx55) 332-0217, ou diretamente com o professor Wagner da Cunha Fragoso.

Observamos que, o sinal negativo só foi utilizado a partir do séc. XVIII. Desse modo, a fórmula de Bháskara passou a ser escrita da seguinte maneira:

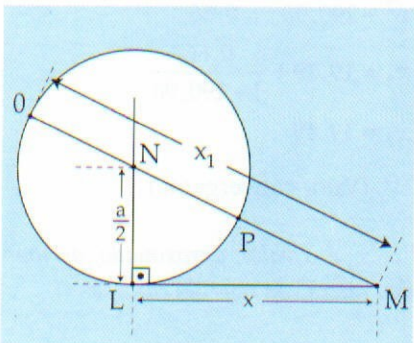
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Do séc. XV ao XVII muitos foram os notáveis matemáticos que desenvolveram formas distintas de representação da equação polinomial do 2º grau, entre eles destacamos:

Em 1637, o francês René Descartes, que além de possuir uma notação que diferia da atual somente pelo símbolo de igualdade, desenvolveu um método geométrico para obtenção da solução positiva.

Segundo BOYER (1996, p. 248), no capítulo *La Geomètré* da obra *O Discurso do Método*, Descartes solucionou geometricamente a equação do tipo $x^2 - bx - c^2 = 0$, com b e c positivos, procedeu da seguinte forma:

Traçamos um segmento LM de comprimento c e em L levantamos um segmento NL igual a b/2, perpendicular a LM. Com centro N construímos um círculo de raio b/2 e traçamos a reta por M e N que cortará o círculo em O e P. Então, $x_1 = OM$ é o segmento desejado.




Desta forma as raízes são:

$x_1 = OM$ e $x_2 = -PM$ [10]

No séc. XVIII, o inglês Sir John Leslie e o alemão Karl Georg Christian von Staudt, com a utilização de eixos cartesianos e de uma circunferência, obtiveram as soluções positivas e negativas da equação polinomial do 2º grau, distintamente. Desta forma, por meio das formas de resoluções geométricas, podemos verificar a preocupação dos matemáticos em encontrar outras resoluções, além da algébrica expressa na fórmula de Bháskara.

Para melhor ilustrar o desenvolvimento da notação da equação polinomial do 2º grau, no quadro, a seguir, registramos as distintas formas de representação feitas, entre os séc. XV e XVII, por eminentes matemáticos europeus.

Notação: x2 + 5x – 6 = 0

| | | |
|---|---|---|
| 1494 | Luca Pacioli (Itália) | Trouame. 5 . nº. che gioto al suo qdratº facia 6 |
| 1514 | Vander Hoecke (Inglaterra) | I Se. + 5 Pri. dit is ghelijc 6 |
| 1521 | F. Ghaligai (Itália) | I □ e 5 Cº – 6 numeri. |
| 1525 | Christoph Rudolff (Alemanha) | Sit I aequatus – 5 ℋ + 6 |
| 1545 | Girolamo Cardano (Itália) | Quadratus p 5 rebus aequalis 6 |
| 1553 | Michael Stifel (Alemanha) | 5 ℋ + 1ʒ. aequata. 6. |
| 1559 | J. Buteo (Itália) | I ◊ P 5p [ P 6 |
| 1572 | Rafael Bombelli (Itália) | 2 1 1.p.5.Equale á 6 |
| 1585 | Simon Stevin (Holanda) | ② ① 1 + 5 egale à 6 |
| 1591 | François Viète (França) | Q p 5N m 6 aequatur 0 |
| 1619 | Jobst Bürgi (Suiça) | ii i 1 + 5 eguales à 6 |
| 1631 | Thomas Harriot (Inglaterra) | aa + 5a ═══ +6 |
| 1637 | Renè Descartes (França) | $x^2 + 5x - 6 \quad 0$ |
| 1693 | Hohn Wallis (Inglaterra) | $x^2 + 5x - 6 = 0$ |

10 Essa raiz não foi considerada por Descartes, pois os números negativos só passaram a ser considerados dentro contexto matemático a partir do séc. XVIII .

11 Segundo Monge (1962, p.13), tal simbologia foi adotada em analogia ao valor simétrico (4ac - b2) de um determinante encontrado na Teoria Geral sobre determinantes do notável matemático francês Augustin-Louis Chauchy (1789 - 1857), que utilizava a mesma letra para designá-lo.

Destruição, por terem incendiado em 641 d.C. o Museu de Alexandria, quando a cidade foi invadida como conseqüência do domínio islâmico.

Preservação, devido a atuação de três históricos califas considerados os grandes patronos da cultura abássida, al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum, que durante seus reinados (período compreendido entre o séculos VIII e XIX, inclusive) foram responsáveis pela tradução dos mais importantes escritos científicos conhecidos, entre eles, *O Almagesto* de Ptolomeu e *Os Elementos* de Euclides ambos de Alexandria.

No séc. IX, Al-Mamum fundou em Bagdá, um centro científico similar ao Museu de Alexandria denominado *Casa da Sabedoria* (Bait al-hikma) para onde convergiram inúmeros matemáticos de grande potencial, dos quais Mohamed ibu-Musa al-Khowarizmi que entre outras obras, escreveu em 825 d. C. *Hisab al-jabr wa'l-muqabalah*, obra de alto potencial didático, traduzida como "Ciência das Equações".

Al-Khowarizmi apresentou a equação polinomial do 2º grau, bem como sua resolução de forma retórica, além de uma comprovação geométrica denominada, atualmente, *método de completar quadrados*. Entretanto, tal como seus predecessores apresentava somente uma das raízes positivas.

9 A denominação raiz foi feita pelos árabes para designar a solução de uma equação.

Al-Khowarizmi apresentou e solucionou a equação $x^2 + 10x = 39$, da seguinte forma:

"Em primeiro lugar vocês devem perceber que somando o quadrado com dez raízes, vamos encontrar trinta e nove. Portanto, devemos determinar a metade das raízes nesta forma e multiplicar esta metade por si mesma, o que dá vinte e cinco. Vinte e cinco somado ao quadrado e às dez raízes resullta sessenta e quatro. Compreendam, então, que o número multiplicado por si mesmo que dá sessenta e quatro é o oito. E, se do oito diminuirmos cinco unidades, vamos descobrir que uma raiz vale três unidades."

## China

Em 1303, o último e maior dos matemáticos chineses, Chu Shih-chieh, apresentou na obra *Ssu-yüan yú-chien (Precioso espelho dos quatro elementos)* uma técnica especial para a resolução da equação polinomial do 2º grau, baseada em aproximações sucessivas, denominada método *fan-fan*, ou *fan-fa*, que, também, foi apresentado de forma retórica, com grande precisão. Tal como os mesopotâmicos, gregos, hindus e árabes, evidenciaram uma única raiz positiva.

Em 1819, o matemático inglês Willian George Horner reivindicou a descoberta do método fan-fan, rebatizando-o como *método de Horner*, o que na realidade é um grande equívoco, mas que é aceito por muitos matemáticos de nossos dias.

Veja um exemplo do precioso método Fan-fa:

Ao solucionarem a equação da forma $x^2 + 252\,x - 5292 = 0$, procediam da seguinte maneira:

$$x^2 + 252x = 5292$$
$$x_1 = 19 + x$$

"solução aproximada"

$$(19 = x)^2 + 252(19 + x) = 5292$$

*"substituíam o valor de $x_1$ na incógnita x da equação original"*

$$361 + 38x + x^2 + 4788 + 252x = 5292$$
$$x^2 + 290x = 143$$
$$x^1 = 19 + \frac{143}{1 + 290}$$
$$x^1 = 19{,}49$$

*"repetiam o cálculo até que aparecesse (fan-fan) um número cujo valor não se modificasse (convergência). Sendo esse número a solução desejada."*

$$x_2 = 19{,}49 + x$$
$$x^2 + 252x = 5292$$
$$(19{,}49 + x)^2 + 252(19{,}49 + x) = 5292$$
$$x^2 + 290{,}98x = 0{,}66$$
$$x_2 = 19{,}49 + \frac{0{,}66}{1 + 290{,}98}$$
$$x_2 = 19{,}49$$

(Valor convergente)

*$x_2$ é o valor, aproximado, de uma das raízes[9] da referida equação.*

## Europa

A partir do séc. XVII, a solução de uma equação polinomial do 2º grau é obtida por meio da *fórmula de Bháskara*, ou seja:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Mesopotâmia

O primeiro registro da equação polinomial do 2º grau foi feito por um escriba[4], em 1700 a.C., aproximadamente, em uma tábula de argila, cuja apresentação e a forma de resolução era retórica, ou seja, através de palavras, considerada como uma "receita matemática" infálivel para solucionar tal tipo de equação e que fornecia somente uma raiz positiva[5].

Segundo EVES (1995, p.78), os mesopotâmicos apresentaram a primeira equação e sua respectiva solução (ou *receita*) da seguinte forma:

*Qual é o lado de um quadrado, se a área menos o lado dá 870?*

*Atualmente:* $x^2 - x = 870$.

*"Receita": Tome a metade de um (coeficiente de x), que é 0,5, e multiplique 0,5 por ele mesmo, o que dá 0,25. Some o resultado a 870 (termo independente), o que dá 870,25. Isto é, na verdade o quadrado de 29,5 que, somado à metade de um, vai dar o lado do quadrado, que é igual a 30.*

## Grécia

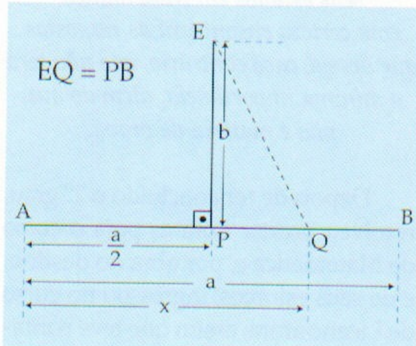
Acreditamos que a dificuldade com o tratamento dos números irracionais e fracionários, a não praticidade do sistema de numeração grego, que era literal, além da habilidade e gosto natural pela geometria, levaram essa civilização a desenvolver um tratamento geométrico de inúmeros problemas matemáticos.

No *livro II – Algebra Geométrica* da obra de Euclides de Alexandria, *Os Elementos*[6], escrita em 300 a. C., podemos observar a forma geométrica apresentada pelos pitagóricos para resolução da equação polinomial do 2º grau, fornecendo, da mesma maneira que os mesopotâmicos, uma única raiz positiva.

Diophanto de Alexandria, posteriormente, desenvolveu um tipo de escrita denominado forma sincopada, ou semi-simbólica para representar as equações tratadas em sua época, séc. III a IV a. C., isto é, a utilização de abreviatura de algumas palavras. Entretanto, não sabemos o motivo pelo qual não houve aceitação por parte da sociedade matemática vigente.

Os gregos forneciam a solução de equações polinomiais do 2º grau por meio de construções geométricas, existindo diferentes tipos de construções para distintas equações, de modo que para nas equações da forma $x^2 - ax + b^2 = 0$ a resolução obedecia ao seguinte procedimento:

*Traçamos o segmento AB = a, por P ponto médio de AB, levantamos o segmento perpendicular PE = b (raiz quadrada de $b^2$) e, com centro em E e raio PB, traçamos um arco de circunferência que intercepte AB no ponto Q. A raiz desejada será dada pelo valor do segmento AQ.* (EVES, 1995, p.111)




A raiz positiva encontrada pelos gregos por meio desse processo seria $x_1 = AQ$.

Atualmente, sabemos que, o segmento QB fornece o valor da outra raiz, ou seja, $x_2 = QB$.

## Índia

A matemática hindu produziu grandes personagens, entre eles destacamos Bháskara de Akaria e Sridhara. O primeiro desenvolveu no séc. XII, retoricamente a solução que mais se assemelha a utilizada atualmente. O outro, no mesmo século, segundo GARBI (1997, p.36), foi o responsável pela determinação (descoberta), da fórmula[7] por nós batizada como *fórmula de Bháskara*[8].

Bháskara apresentou a solução de uma equação polinomial do 2º grau por meio de inúmeros problemas de ordem comercial/financeira. Entre eles citamos:

"Um capital de 100 foi emprestado a uma certa taxa de juro ao ano. O juro obtido após um ano foi aplicado durante mais um ano. Se o juro total é de 75, qual é a taxa de juro? "

Atualmente : $x^2 + 100x - 7500 = 0$.

"A Receita", ou seja, a solução foi fornecida da seguinte maneira:

*Calcule a metade do capital (coeficiente de x) ao quadrado,*

$$\left(\frac{100}{2}\right)^2 = 2500$$

*acrescente-a ao produto do juro total (termo independente) pelo capital* .

$$2500 + 7500 = 10000$$

*Extraia a raiz quadrada*

$$\sqrt{10.000} = 100$$

*Logo, diminua a metade do capital (encontrando-se a raiz positiva desejada.*

$$\mathbf{100 - 50} = 50$$

## Mundo Árabe

Os árabes foram ao mesmo tempo responsáveis pela destruição do conhecimento ocidental, e por sua preservação.

4 Classe que detinha o conhecimento, trabalhava com o ensino, cálculo contábeis e registros em geral.
5 As raízes negativas só entraram no contexto matemático a partir do século XVIII.
6 Constituído de 13 volumes ( Livros), em que o notável Euclides reuniu todo o conhecimento matemático até a sua época.
7 Para dirimir algumas dúvidas, frisamos que, em qualquer bom dicionário, fórmula, regra e receita são palavras sinônimas. Logo, uma fórmula pode ser registradapor meio de palavras, isto é, retoricamente, sem comprometer o seu significado, e ser adaptada, adequadamente, aos símbolos convencionados, a posteriori.
8 Essa denominação é, particularmente, nacional, pois na literatura internacional é tratada por *fórmula geral para resolução da equação polinomial do 2º grau.*