

# ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA CHINESA

Claudia A. C. de Araujo Lorenzoni<sup>1</sup>

## Resumo

O presente artigo é uma pequena contribuição aos interessados pela história da matemática chinesa, em particular à história da trigonometria chinesa. Embora seja crescente nas últimas décadas o interesse pelo conhecimento matemático desenvolvido pelos chineses, ainda não são muitas as fontes de pesquisa, nesta área, escritas em português.

No artigo, são mencionadas obras importantes da cultura chinesa que incluem conhecimentos relativos à trigonometria. Algumas fórmulas exatas ou aproximadas citadas em textos antigos são analisadas. O texto trata ainda, dentre outros assuntos, da divisão do círculo feita pelos chineses e da data provável para a criação da palavra, atualmente usada por eles, para designar o ângulo.

**Palavras-chave:** história da matemática, matemática chinesa, trigonometria chinesa

## Introdução

Nas últimas décadas, o interesse pela matemática chinesa vem aumentando entre os historiadores apesar de não serem abundantes as fontes de pesquisa nesta área. Um leitor do ocidente interessado no assunto já dispõe

hoje de bons livros escritos em inglês<sup>2</sup>, além de capítulos inteiros em alguns livros de História da Matemática. Para uma leitura em português, a situação torna-se um pouco mais delicada, devido à carência de obras nessa área. Este texto é uma contribuição àqueles leitores que se interessam pelo assunto e não têm acesso a textos escritos em outras línguas.

As civilizações da China Antiga são, provavelmente, posteriores à civilização egípcia porém, muitos dos textos originais sobre a cultura e a ciência chinesas não chegaram até nós. Era costume dos chineses fazer seus escritos em cascas de árvores ou em tiras de bambu (Figura 1), materiais consideravelmente perecíveis [3]. Além disso, a queima de livros ordenada pelo imperador Shī Huang-ti, em

213 a.C., tornou ainda mais crítica a situação para os pesquisadores da cultura chinesa [2].

A análise de documentos atualmente disponíveis faz crer, segundo Libbrecht (1973), que, até pelo menos o século XIII, não se poderia sequer falar em trigonometria na China. De acordo com os historiadores, o que existia até esse período era uma espécie primitiva de trigonometria, denominada *ch'ung-ch'a*, que se baseava nas propriedades de semelhança de triângulos retângulos. É de se imaginar que os métodos dessa "trigonometria" tenham sido utilizados nos estudos de astronomia e na determinação dos calendários na China Antiga.

Os problemas relativos à elaboração do calendário e às questões comerciais foram uma base de sustentação para que o estudo de matemática pelos chineses não se extinguisse em virtude das crises de naturezas diversas que os afligiram.

Os cálculos de astronomia, que certamente auxiliavam no estudo do calendário, são assunto de um dos mais antigos registros da matemática chinesa, o *Chou Pei Suang Ching*<sup>3</sup>. A obra, que trata apenas parcialmente de matemática, foi escrita em forma de diálogo entre um príncipe e seu ministro sobre o calendário.

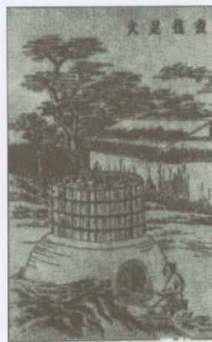


Figura 1 – Cozimento de bambus para a preparação de papel - c. 500 d.C.

<sup>1</sup> Mestre em Matemática (PUC-Rio) e professora do Departamento de Matemática da Ufes. araujocl@ig.com.br.

<sup>2</sup> Veja, por exemplo, [4], [5] e [6].

<sup>3</sup> Há controvérsias a respeito do período no qual o *Chou Pei* foi escrito. A possibilidade de essa ser uma obra escrita por vários homens em períodos diferentes, torna ainda mais difícil a tarefa de datá-la. Alguns consideram que o *Chou Pei* tenha sido escrito no início do século XII a.C., outros já o colocam como uma obra do primeiro século de nossa era. Segundo Boyer, 300 a.C. é uma data razoável.

## A trigonometria esférica chinesa

A trigonometria esférica chinesa foi estudada, especialmente, pelo astrônomo Guo Shoujing (1231-1316). Os principais elementos dessa trigonometria não são os ângulos e as fórmulas exatas, mas sim, o estudo por aproximação de arcos, cordas e *sagitta*<sup>4</sup> (Figura 2) de segmentos circulares. Triângulos com três lados circulares nunca são envolvidos, como na trigonometria esférica clássica. Os triângulos são planos com, no máximo, um lado circular.

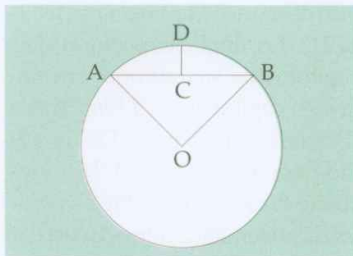


Figura 2 – CD é sagitta do segmento de círculo ADB.

Guo Shoujing utilizava para a determinação dos elementos de um segmento de círculo a “técnica de intersecção dos círculos” do cientista Shēn Kuò (século XI)<sup>5</sup>. Segundo essa técnica se, no círculo abaixo (Figura 3), consideramos o diâmetro  $d$ , o raio  $r$ , a corda  $AB = c$ , a *sagitta*  $CD = v$  e o arco  $ADB = s$ , então temos:

$$\frac{c}{2} = \sqrt{r^2 - (r - v)^2} = \sqrt{dv - v^2}$$

$$e \quad s = c + \frac{2v^2}{d}$$

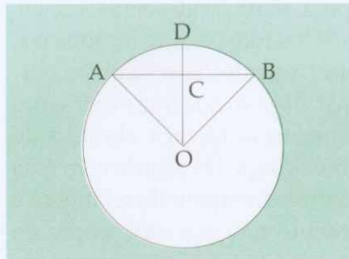


Figura 3 – Círculo com diâmetro  $d$ , raio  $r$ , corda  $AB = c$ , *sagitta*  $CD = v$  e arco  $ADB = s$

A primeira fórmula é facilmente deduzida aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo AOC. A segunda fórmula é apenas uma aproximação.

Um meio de se chegar à fórmula do comprimento do arco  $s$  é considerar mais duas fórmulas, ambas aproximadas, conhecidas da obra *K'ui-ch'ang Suan-shu* (Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática), escrita no período Han (206 a.C.-221 d.C.). Uma delas é a fórmula  $\frac{3}{4}d^2$  usada para a determinação da área do círculo de diâmetro  $d$ . Dela, concluímos que 3 é o valor aproximado para  $\pi$  e que, portanto, uma circunferência de raio  $r$  tem comprimento igual a  $6r$ . Uma outra fórmula que devemos considerar é dada no problema 36 do primeiro capítulo dos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*. A área do segmento de círculo de base  $c$  e *sagitta*  $v$  é dada pela expressão  $\frac{v(c+v)}{2}$ .

Vamos denotar a área do segmento de círculo por  $A_1$ . A área do triângulo isósceles ABO (Figura 3), que denotaremos por  $A_2$  é:

$$A_2 = \frac{3}{2}(r - v)$$

Daí, vem que:

$$s = \frac{6r(A_1 + A_2)}{\frac{3}{4}d^2}$$

$$s = \frac{2}{r} \left( \frac{v(c+v)}{2} + \frac{c}{2}(r-v) \right)$$

$$s = \frac{vc + vcr - vc}{r}$$

$$s = c + \frac{v^2}{r}$$

Na trigonometria de Guo Shoujing, o círculo, ou a “periferia celestial”, possuía 365,25 graus – mesmo número de dias do ano [6]. Essa divisão do círculo nos faz concluir que um grau chinês, que denotaremos por  $^\circ$ , equivale a  $360/365,25$  graus sexagesimais.

O comprimento do círculo trigonométrico era igualmente medido em graus. Assim, o comprimento do quadrante trigonométrico tem valor igual a  $(365,25/4)^\circ$  ou  $91,31^\circ$ . Usando-se um valor aproximado de  $\pi$  igual a 3, como fazia Guo Shoujing, obtém-se o diâmetro  $d$  da periferia celestial  $p$ .

$$\pi d = p \rightarrow 3d = 365,25^\circ \rightarrow$$

$$d = \frac{365,25^\circ}{3} = 121,75^\circ$$

## O contato e a influência de outras culturas

Para um bom estudo da matemática chinesa, deve-se ter consciência dos contatos da China com outras civilizações. Segundo Joseph Needham<sup>6</sup> [6], as primeiras tabelas trigonométricas utilizadas na China vieram da Índia, no período da dinastia Tang (618-907), e os princípios da trigonometria esférica vieram da Arábia, no período Mongol<sup>7</sup>. Não existe um consenso

<sup>4</sup> Eves (1997) traduz a palavra *sagitta* como altura. Boyer (1974) prefere a palavra *seta*.

<sup>5</sup> Veja [6].

<sup>6</sup> Joseph Needham é autor da obra *Science and Civilization in China*, considerada um clássico no estudo da matemática chinesa. O terceiro volume da obra foi publicado em 1959.

<sup>7</sup> Os mongóis, liderados por Gêngis Khan (1162-1227), iniciaram a conquista da China em 1211. Em 1279, Kublai Khan (1216-1294), neto de Gêngis Khan, completou a conquista. Deu-se início então à dinastia estrangeira dos Yuan que se prolongou até o ano 1368 [7].

a respeito de tais afirmações mas não se pode negar a existência de contato entre a China e outros povos. O que não se sabe, entretanto, é até que ponto uma cultura interferiu na outra. Para Martzloff (1997), é provável que a matemática usada nos calendários chineses antigos e a trigonometria esférica chinesa, tenham suas origens na própria civilização chinesa.

Por volta do ano 718, o astrônomo hindu Levensita traduziu para o chinês a obra *Catching Nines Calendar* que introduzia, entre outros conhecimentos, a divisão do círculo em 360 graus e cada grau em 60 minutos. Este método de divisão sexagesimal do círculo, que já era adotado com boa aceitação por outros povos, não despertou o interesse dos astrônomos chineses que, na sua maioria, continuaram adotando a divisão do círculo em 365,25 partes [5].

No final da dinastia Ming (1368-1644), iniciaram-se as missões jesuítas na China. Os missionários, particularmente Matteo Ricci (1552-1610), perceberam a pouca habilidade e, conseqüentemente, os erros cometidos pelos chineses responsáveis pela elaboração do calendário. Viram então, na transmissão de conhecimentos técnicos e científicos, um meio eficaz e original de evangelização. Obras européias passaram a ser adaptadas para o chinês. A primeira tradução do latim para o chinês foi a tradução dos seis primeiros livros dos *Elementos* de Euclides feita por Xú Guāngqǐ e Matteo Ricci. Na ocasião, muitos termos precisaram ser inventados devido à ausência de um dicionário técnico. Palavras como jiǎo, para ângulo, zh'í jiǎo, para ângulo reto, ru'í jiǎo, para ângulo agudo e dùn jiǎo, para ângulo obtuso, criadas na

época, são utilizadas ainda hoje [5].

Dos trabalhos realizados por Ricci, vale destacar também o livro *Gougu Yi*, que traz explicações sobre uma técnica chinesa de nome *gougu*. De acordo com essa técnica, um triângulo retângulo é descrito não por uma noção de ângulo mas por dois termos indicando o lado menor (*gou*) e o lado maior (*gu*) do triângulo. Note-se que essa desassociação entre as idéias de triângulo retângulo e ângulo reto pode evidenciar a real ausência de termos próprios para denominar o ângulo reto e o triângulo retângulo.

Vinte anos após a morte de Ricci, iniciou-se na China, por iniciativa dos missionários, um programa de preparação para a mudança do calendário. Em cinco anos foram reunidas explicações sobre aritmética, geometria e tudo mais o que servisse de base para a astronomia. O trabalho resultou numa coleção de 150 volumes que recebeu o nome de *Chouzhen lishu* (Tratado de astronomia sobre calendário do período Chouzhen). Nessa coleção, encontramos um tratado sobre trigonometria plana e trigonometria esférica, o *Dace* (1631), isto é, "a grande medida". No *Dace*, não existem cálculos de pequenas distâncias terrestres mas somente medidas relativas a grandes corpos celestes, o que justifica o título. Encontra-se ainda no *Dace* definições de seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante, seno versor ( $1 - \cos\theta$ ) e coseno versor ( $1 - \sin\theta$ ), além de tabelas trigonométricas construídas segundo um método similar àquele usado por Ptolomeu (c. 85 - c. 165) para construir suas tabelas de cordas.

Em 1713, o imperador Kangxi delegou a Mei Juecheng (1681-1763) a tarefa de compilar todo o

conhecimento matemático chinês e europeu da época. O material reunido deu origem à enciclopédia *Shuli jingyun*, concluída em 1723. Nessa obra, o cálculo da medida dos lados de polígonos regulares inscritos e circunscritos num círculo, por intermédio de seções em superfícies, é feito com o intuito de se construir tabelas trigonométricas. Aliás, as tabelas de senos, cosenos, tangentes, cotangentes, secantes e cosecantes, de ângulos que variam a cada dez segundos até noventa graus, ocupam oito capítulos desse trabalho.

Em 1759, Mei Juecheng publicou uma versão revisada dos trabalhos de seu avô Mei Wedding (1633-1721). Ao final, acrescentou dois capítulos de sua autoria. Em um desses capítulos, o *Chishui Yizhen* (Pérolas recuperadas do Rio Vermelho para a posteridade), Mei Juecheng faz reflexões sobre as pérolas da matemática chinesa redescobertas graças ao contato com os missionários europeus. Entre as citadas pérolas está a trigonometria.

### Conclusão

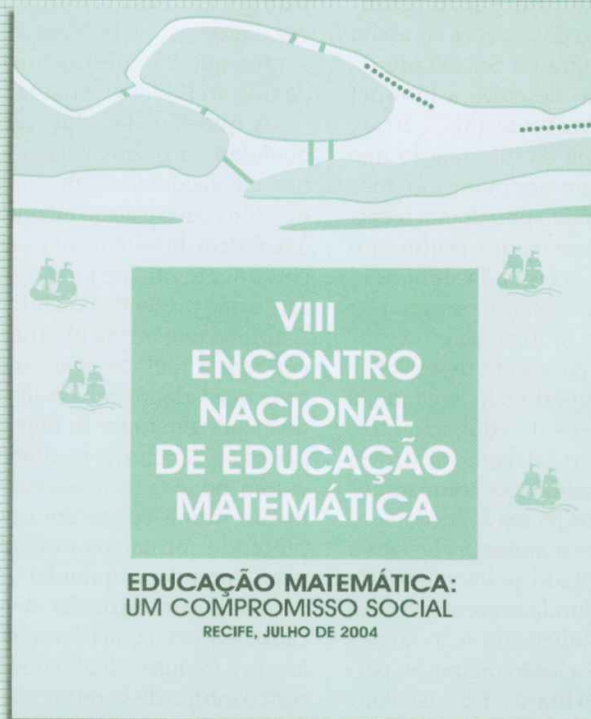
Por muitas vezes, os conceitos e preconceitos do homem o impedem de assumir novas posturas e o distanciam de mundos novos, com cultura e conhecimentos diferentes.

O estudo apresentado neste artigo pretende colaborar neste contato com o novo que sempre vem esclarecer, completar ou transformar nossos conhecimentos antigos. Essa é uma das grandes tarefas que a História da Matemática realiza em nós, estabelece um elo entre presente e passado, homens e mulheres de mundos e realidades diferentes.

## Referências

- [1]BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1974.
- [2]EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 1997.
- [3]STRUJK, Dirk J. *História concisa das matemáticas*. Tradução de João C. S. Guerreiro. Lisboa : Gradiva, 1989.
- [4]LIBBRECHT, Ulrich. Chinese Mathematics in the Thirteenth Century: The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao in: Nathan Sivin (org.) *M.I.T. East Asian Science Series*, v.1. Massachusetts: M.I.T., 1973.
- [5]Lǐ Yǎn.DÙ SHÍRÁN. *Chinese Mathematics: A Concise History*. Tradução de John N. Crossley e Anthony W.-C. Lun Oxford: Clarendon, 1987.
- [6]MARTZLOFF, Jean-Claude. *A History of Chinese Mathematics*. Tradução de Stephen S. Wilson. New York: Springer, 1997.
- [7]Revista Veja Especial: Milênio – Os 100 fatos que mudaram o mundo do ano 1001 até hoje. Ano 31. Número 51. São Paulo: Editora Abril, 1999.

# 2004 é o ano do ENEM!



Realização:



*As inscrições já estão abertas e Recife espera você!*