artigo

O TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ABORDAGEM ENFATIZANDO O CARÁTER NECESSÁRIO/SUFICIENTE

Irma Verri Bastian e Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
PUC/SP
e-mail: saddoag@exatas.pucsp.br

Resumo

Nossa prática docente e uma análise preliminar permitiram observar a grande dificuldade dos alunos no que se refere à aplicação do Teorema de Pitágoras como ferramenta na solução de problemas. Berté (1995) efetuou um levantamento identificando os erros mais freqüentes apresentados pelos alunos na utilização do Teorema. Segundo a pesquisadora, os erros detectados seriam reflexo da ausência de problematização na abordagem do tema.

Elaborou-se uma seqüência didática composta de situações-problema visando proporcionar aos alunos condições para melhor compreensão do significado do Teorema. Almejou-se com isso que eles o entendessem não como uma simples fórmula a memorizar, mas sim como ferramenta utilizável na resolução de inúmeros problemas de Geometria. As atividades constitutivas da seqüência parecem ter contribuído para desenvolver nos alunos algumas capacidades, relativamente à aplicação do mesmo como ferramenta para a resolução de problemas.

Introdução

No decorrer de anos ministrando Matemática para o colegial, atual ensino médio, foi possível observar a dificuldade dos alunos no que se refere à aplicação do Teorema de Pitágoras como *ferramenta* na solução de problemas. Qual seria a causa disso? A questão ressurgiu no momento da escolha do tema para um trabalho de Didática na pós-graduação, que foi evoluindo até se transformar em uma dissertação de mestrado.

Um pouco de História

Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C., na ilha egéia de Samos, na Grécia, não longe de Mileto, lugar do nascimento de Thales. Sua figura está envolta em mitos e lendas, uma vez que não existem relatos originais sobre sua vida e trabalhos. O grande mérito de Pitágoras teria sido a percepção de que os números existem independentemente do mundo concreto. Desse modo, ele poderia descobrir verdades que ficariam acima de preconceitos ou opiniões.

O lema da escola pitagórica, "Tudo é número", deixa transparecer uma forte afinidade com a Mesopotâmia. Segundo os historiadores, mesmo o Teorema, ao qual o nome de Pitágoras está tradicionalmente ligado, já era conhecido dos babilônios, havia mais de um milênio antes. Porém foram os pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo, o que justificaria a denominação de "Teorema de Pitágoras", como ficou conhecido.

No livro I dos *Elementos* de Euclides de Alexandria (300 a.C.), a Proposição (47, I) é o teorema pitagórico, com uma demonstração atribuída universalmente ao próprio Euclides; e a Proposição final (48, I) é o recíproco desse teorema.

É possível que Pitágoras tenha dado uma demonstração do Teorema baseada na proporcionalidade das medidas dos lados de figuras semelhantes. Posteriormente, com a constatação de que nem todos os segmentos são necessariamente comensuráveis, essa prova perdeu sua validade. A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos, pois abalava sua filosofia, segundo a qual tudo dependia dos números inteiros.

A prova do Teorema dada por Euclides não utiliza as proporções, o que pode ter sido uma estratégia para evitar a questão da incomensurabilidade. As circunstâncias que desencadearam a primeira percepção desse obstáculo constituem tema bastante polêmico. Poderiam estar em conexão com a aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles; com o cálculo da diagonal de um quadrado em função do lado ou com as diagonais de um pentágono.

Sobre a importância do teorema de Pitágoras

A relação pitagórica despertou interesse de muitos povos antigos, tais como babilônios, egípcios, gregos, hindus e chineses. Modernamente, parece ter servido de inspiração para um problema que desafiaria matemáticos durante 358 anos: o chamado Último Teorema de Fermat, segundo o qual "não existe solução inteira para a equação $x^n + y^n = z^n$ na qual 'n' é natural maior que 2". A demonstração, de 1995, que constituiu um marco para a história da Matemática, é de autoria de Andrew Wiles (Singh, 1998).

Todavia, a importância do Teorema de Pitágoras, simples caso particular de um teorema mais geral, a lei dos cossenos, segundo Berté (1995, p.109), não se reduz a razões históricas nem à simplicidade de seu enunciado. Existe uma funcionalidade específica do Teorema, pois este caso particular pode ser demonstrado pela fórmula geral, mas é de tal forma poderoso que a partir dele é possível demonstrar sua generalização e seu recíproco.

Pela lei dos cossenos, dadas as medidas de dois lados de um triângulo qualquer e a medida do ângulo compreendido entre eles, é possível calcular a medida do terceiro lado. Isto significa que, desse modo, um triângulo qualquer fica determinado. Reciprocamente, a lei dos cossenos permite também calcular as medidas dos ângulos de um triângulo a partir das medidas dos lados, sendo suficiente que os números dados verifiquem a condição de existência de triângulo. Entretanto, dados dois lados de um triângulo qualquer e um ângulo não compreendido entre eles, isso não é suficiente para determiná-lo, a menos que o ângulo seja reto. O Teorema de Pitágoras permite, neste caso, encontrar o terceiro lado. Decorre então que um triângulo retângulo fica determinado pela hipotenusa e um dos catetos.

Berté prossegue utilizando uma "mudança de quadros" (Douady, 1984, p. 110), do quadro geométrico, das construções de triângulos com régua e compasso, para o quadro algébrico – discussão da intersecção de uma "circunferência com uma semireta ou com uma reta se o ângulo dado é reto".

Sejam a e b as medidas de dois lados de um triângulo, a a medida do ângulo oposto ao lado a $(0 < a < 180^\circ)$ e x a medida do terceiro lado.

Pela lei dos cossenos,

$a^2 = x^2 + b^2 - 2bx\cos\alpha$

A equação $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$ tem como discriminante:

$\Delta = 4b^2\cos^2\alpha - 4(b^2 - a^2)$, isto é,

$\Delta = 4b^2\cos^2\alpha - 4b^2 + 4a^2$

como $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$ então,

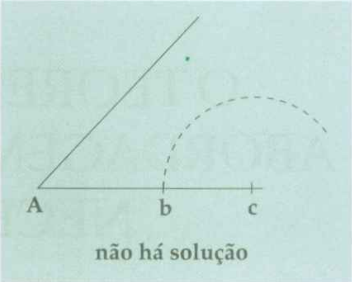
$\Delta = 4b^2 - 4b^2\text{sen}^2\alpha - 4b^2 + 4a^2$

$\Delta = 4(a^2 - b^2\text{sen}^2\alpha)$

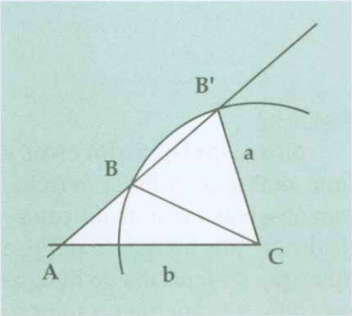
$\Delta = 4(a + b\,\text{sen}\alpha)(a - b\,\text{sen}\alpha)$

Sendo $0 < \alpha < 180^\circ$, tem-se $\text{sen}\alpha > 0$

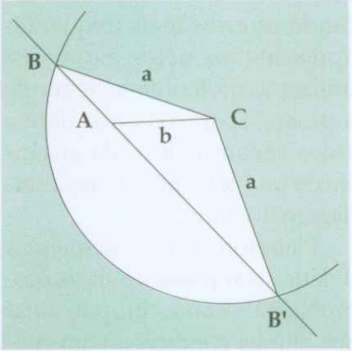
I)



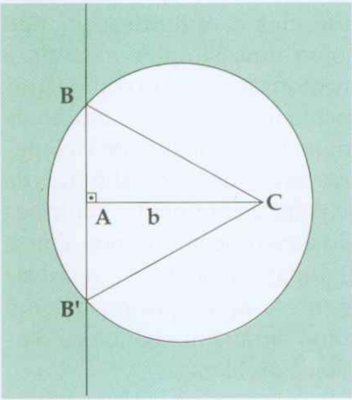
IIi)



IIii)



IIiii)



Logo o sinal de Δ é dado pelo sinal de a – bsena. Desse modo:

I) $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha - b\text{sen}\alpha < 0 \Leftrightarrow b\text{sen}\alpha > a$
(não há solução)

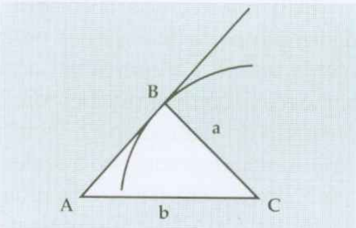
II) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ i) $b\text{sen}\alpha < a < b$
(duas soluções positivas, dois triângulos)

ii) $b\text{sen}\alpha < b < a$
(duas soluções de sinais contrários, triângulo AB'C)

iii) $\text{sen}\alpha = 1$
(duas soluções opostas, triângulos ABC e AB'C)

III) $\Delta = 0 \Leftrightarrow b\text{sen}\alpha = a$
(uma única solução dupla)

III)



Sobre demonstrações do Teorema de Pitágoras

As demonstrações do Teorema, conhecido como a 47ª Proposição de Euclides e também como o "teorema do carpinteiro", podem ser classificadas, segundo Loomis, em quatro grandes grupos:

- algébricas – baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos;
- geométricas – baseadas em comparações de áreas;.
- vetoriais – baseadas em operações com vetores e empregando o conceito de direção;
- dinâmicas – baseadas em massa e velocidade.

Para Padilla (1992, p. 12) as demonstrações podem ser reagrupadas em três tipos, segundo o tratamento matemático empregado:

- em que as áreas dos quadriláteros permanecem invariantes;
- por transposição de elementos;
- algébricas.

Problemática e Metodologia

1) Aspectos metodológicos

Seguindo alguns preceitos da Engenharia Didática (Artigue, 1988) fundamentou-se a metodologia desta pesquisa. Na primeira fase de análises prévias, foi feito um estudo histórico e epistemológico do Teorema de Pitágoras, visando buscar sua gênese. Investigou-se, ainda nessa etapa, o Teorema de Pitágoras como objeto matemático, o que permitiu melhor compreensão de sua importância e auxiliou na tomada de decisão no que se refere à demonstração usada na abordagem. Na França, Berté (1995) efetuou um levantamento identificando os erros mais freqüentes apresentados pelos alunos na utilização do Teorema. Segundo a pesquisadora, os erros detectados seriam reflexo da ausência de problematização na abordagem do tema.

O passo seguinte consistiu no estudo das pesquisas de Padilla (1992) sobre Análise Cognitiva e de Duval (1995) sobre Registros de Representação, após o que foi feita uma análise comparativa de livros escolares de 7ª e 8ª série do ensino fundamental, propostas curriculares e Parâmetros Curriculares Nacionais. Para detectar as concepções dos alunos sobre o Teorema de Pitágoras, preparou-se um teste que foi aplicado em uma turma de 35 alunos de 1° colegial de uma escola particular da cidade de Santos, no Estado de São Paulo.

2) Nossa questão de pesquisa

Assim, com base em Berté, Duval e Padilla, em pesquisas, nos resultados do teste e na análise dos livros didáticos, foi possível estabelecer as seguintes indagações, a partir da constatação de que os livros didáticos se ocupam de estabelecer a forma do Teorema de Pitágoras, mas omitem a importância de seu caráter necessário e suficiente: até que ponto esse tipo de abordagem interfere na compreensão do significado do Teorema pelos alunos e na sua posterior recontextualização como ferramenta na resolução de problemas? Os tipos de erro observados na aplicação do Teorema decorrem da abordagem e/ou se constituem numa dificuldade, de caráter mais geral, relativa à apreensão da figura? Colocou-se, então, como objetivo de trabalho a elaboração de uma seqüência didática em duas fases. Primeiramente, realização de atividades que permitissem ao aluno conjeturar a existência da relação pitagórica, seu caráter necessário/suficiente e a forma dessa relação. Numa segunda etapa, propondo-se atividades de complexidade crescente com o intuito de desenvolver condições para o emprego adequado do Teorema como ferramenta.

As fases seguintes compreendem a aplicação da seqüência didática, a análise a posteriori e validação.

3) Nossas hipóteses

Como ponto de partida foram assumidas as seguintes hipóteses: a) para o aluno perceber a importância do Teorema de Pitágoras é conveniente trabalhar previamente com a condição de existência de triângulo, a qual propiciará condições para o entendimento do caráter necessário e suficiente da igualdade pitagórica; b) alguns dos erros praticados pelos alunos quando da aplicação do Teorema de Pitágoras podem ser provocados por fatores próprios da interpretação de problemas geométricos concernentes à apreensão operatória, tais como: fenômeno da não congruência na conversão enunciado ↔ figura ou figuraTeorema de Pitágoras; obstáculo do desdobramento de objetos; interferência da rotação do triângulo retângulo no reconhecimento das unidades elementares (catetos e hipotenusa); fundo reticulado mascarando o caminho de resolução do problema.

Base teórica

Segundo Duval (1995), as atividades cognitivas envolvidas na aprendizagem da Matemática requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação que vão além da linguagem natural e das imagens. No caso da Geometria, destacam-se as figuras geométricas, os enunciados em linguagem corrente, as representações em perspectiva e as notações simbólicas. Na atividade matemática, é usual e freqüente a passagem de um sistema de representação para outro, como, por exemplo, de enunciado para figura, ou a mobilização simultânea de diferentes sistemas de representação durante a resolução de um problema. A passagem de um registro para outro envolve o que se denomina *coordenação entre os diferentes registros*. Uma das dificuldades encontradas por muitos alunos nesse processo teria origem nos fenômenos de *não congruência*. A conversão das representações semióticas constitui para a maioria dos alunos uma atividade cognitiva nem simples, nem espontânea.

Por outro lado, dada uma figura, a apreensão perceptiva é imediata e automática. A apreensão discursiva desempenha um papel de neutralização da apreensão perceptiva. A apreensão operatória está centrada nas possíveis modificações de uma *figura de partida*; permite visualizar várias subfiguras, à primeira vista não perceptíveis. É solicitada cada vez que se espera da figura que ela realize uma função heurística.

Segundo Padilla, salienta-se sempre o papel intuitivo que as figuras têm em Matemática, mas poucos estudos tratam dos procedimentos cognitivos que permitem às figuras desempenhar esse papel.

A reconfiguração pode ser espontânea e evidente ou difícil de enxergar na figura de partida, o que ocorre em função de fatores de complexidade ou visibilidade, que facilitam ou inibem essa operação na percepção de uma figura. Padilla distingue sete fatores:

> Na atividade matemática, é usual e freqüente a passagem de um sistema de representação para outro

- o fato de o fracionamento da figura em partes elementares ser dado no início ou necessitar ser encontrado (por meio de traçados suplementares auxiliares);
- o fato de o reagrupamento das partes elementares formar uma reconfiguração convexa ou não convexa (mais difícil de ser destacada da figura);
- o número de modificações posicionais (rotações e translações) efetuadas na subfigura;
- o fato de uma mesma parte elementar dever entrar simultaneamente em dois reagrupamentos intermediários a ser comparados; o obstáculo do desdobramento dos objetos, constitui-se numa dificuldade para os alunos;
- o fato de o reagrupamento pertinente exigir a substituição das partes elementares;
- o fato de a operação de reconfiguração levar em conta as características do contorno;
- o fato de que todas as subfiguras devam ser removidas para o próprio interior da figura de partida ou, ao contrário, que algumas subfiguras devam sair do contorno da figura de partida.

A elaboração das atividades componentes da seqüência didática e a análise a priori das mesmas foram feitas levando-se em conta a base teórica citada.

Seqüência didática

Elaborou-se uma seqüência didática composta de situações-problema visando proporcionar aos alunos condições para melhor compreensão do significado do Teorema. Almejou-se com isso que eles o entendessem não como uma simples fórmula a memorizar, mas sim como ferramenta utilizável na resolução de inúmeros problemas de Geometria.

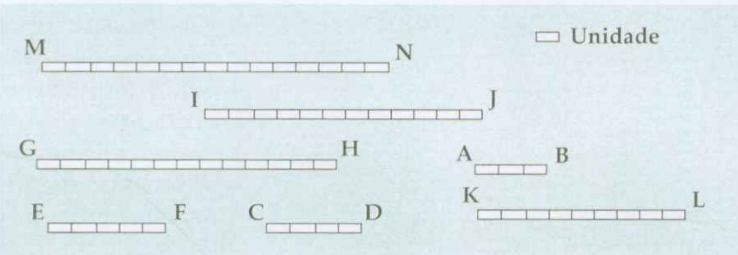
Numa primeira fase de atividades, o Teorema é tratado como objeto de estudo. Partindo de material concreto os alunos percebem a característica necessária e suficiente do Teorema e, a seguir, conjeturam sobre sua forma. Progressivamente, chega-se a uma abstração e à institucionalização. A partir daí, ele passa a funcionar como ferramenta. Optou-se pela aplicação da seqüência didática em classe de 39 alunos, 8ª série, período da manhã, de escola estadual a fim de conseguir indicadores que permitissem avaliar os efeitos da experimentação e os resultados obtidos num contexto que retratasse a realidade do ensino atual na escola pública. Primeiramente, foi aplicado um teste piloto, compreendendo as vinte atividades da seqüência, para um grupo de quatro alunas voluntárias pertencentes a 8[as] do período da tarde. Constatou-se, então, a necessidade da elaboração de uma atividade, denominada Atividade 0, com o objetivo de reinvestir em tópicos que se constituíssem em pré-requisitos para a seqüência didática. Percebeu-se, logo nas primeiras sessões da experimentação definitiva, que o número de aulas previsto (12, no máximo 15) seria insuficiente em decorrência da"ruptura do contrato didático", ocasionada pela ausência de aulas expositivas e, da falta ou insuficiência de conhecimentos disponíveis; foram utilizadas três aulas para a Atividade 0 e dezenove para as seguintes.

<u>Objetivo neste item:</u> fazer com que o aluno perceba que, dadas três medidas, nem sempre é possível construir um triângulo cujos lados tenham essas medidas.

Com sete varetas existem 35 combinações possíveis (de 7 objetos 3 a 3), de que resultarão 3 triângulos retângulos, 10 obtusângulos e 3 acutângulos; 19 não formarão triângulo.

<u>Material didático empregado</u>

- Conjuntos de varetas confeccionadas a partir de palitos de madeira (usados para algodão-doce), graduados com unidade de aproximadamente 2 cm.



- Conjunto de varetas com dimensões ampliadas para uso eventual na aplicação da seqüência, se necessário, a fim de esclarecer possíveis dúvidas.

A título de ilustração serão apresentadas algumas das atividades propostas.

Atividade 1
(composta de três etapas)

<u>Objetivo:</u> estabelecer a condição de existência de triângulo.

(I) São dadas as varetas:

a) Usando três delas de cada vez, tente construir triângulos.

b) Descreva, por meio de uma terna, as medidas dos lados dos triângulos que você conseguiu formar. Assim: (..., ..., ...)

c) Sempre que você pegou 3 varetas foi possível construir um triângulo? Explique o que aconteceu.

(II) a) Escreva as ternas com as quais você não conseguiu formar triângulo.

b) Você é capaz de escrever, com suas palavras, o que precisa acontecer para que exista triângulo? Que relação deve haver entre essas três medidas?

<u>Objetivo neste item:</u> chegar à forma da condição de existência de triângulo.

O aluno poderia apresentar algumas das 19 possibilidades para as quais não existe triângulo e, a partir disso, perceber a condição de existência de triângulo.

(III) Agora, são dadas as ternas, sem as varetas:

(8, 10, 8), (5, 5,5), (0,8; 1,5; 2,3), (2,5; 4,5; 3,5) e (4,3; 5,2; 9,8)

a) Com quais dessas ternas é possível construir triângulos?

b) Agora é sua vez! Invente três ternas com as quais você pode construir triângulos e três ternas "que não vão dar certo".

<u>Objetivo neste item:</u> descontextualização da condição de existência de triângulo.

Algumas das ternas dadas apresentam números decimais, para permitir ao aluno entender que a condição de existência de triângulo vale também para medidas expressas por esse tipo de número. Neste estágio foi feita a institucionalização da condição de existência de triângulo.

Para a Atividade 1-I, cada dupla recebeu a folha de questões e um jogo de sete varetas graduadas, acondicionadas em canudo de PVC rígido. Levando-se em conta que, das 35 combinações, 16 resultariam em triângulo, elaborou-se o seguinte quadro, para ilustrar o desempenho dos alunos (Nt representa o número de ternas obtidas, formando triângulos):

	$0 \le Nnt < 5$	$5 \le Nnt < 10$	$10 \le Nnt < 16$
número de duplas	2	10	7

Quanto à possibilidade de sempre existir triângulo, quinze duplas concluíram que nem sempre isso é possível, três duplas responderam que "sim, sempre é possível" e apenas uma dupla deixou o item em branco.

Quanto às ternas que não permitiam a formação de triângulos, solicitadas no item IIa, o resultado foi o seguinte (Nnt indica o número de ternas para este caso):

	$0 \leq Nnt < 5$	$5 \leq Nnt < 10$	$10 \leq Nnt < 19$
número de duplas	8	7	4

No item IIIa, a escolha de números decimais em algumas ternas provocou erros no resultado da soma, o que criou uma oportunidade para reinvestir nesse tipo de cálculo. A utilização freqüente de números inteiros pode provocar "obstáculo didático", pois o aluno se habitua a trabalhar somente com esse tipo de número.

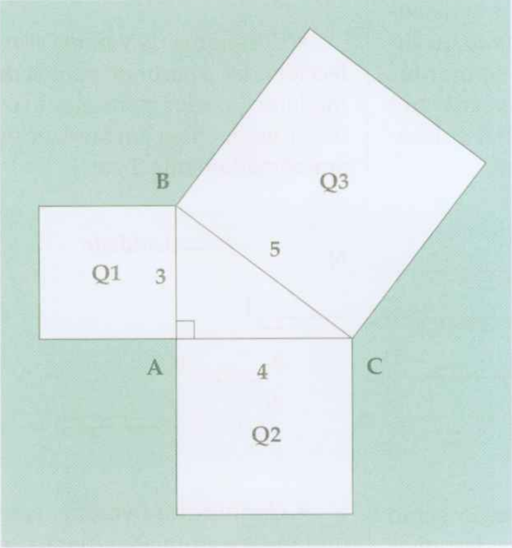
Embora a redação da condição de existência de triângulo tenha ocasionado dificuldade para os alunos no item IIIb, em que é solicitada a criação de ternas, apenas uma dupla apresentou a questão em branco. Doze grupos exemplificaram corretamente os dois casos. Seis duplas exemplificaram corretamente o caso da existência de triângulo, mas não conseguiram exibir ternas não correspondentes a triângulos. Em resumo, apesar de a maioria ter conjeturado a condição de existência de triângulo, apenas oito duplas conseguiram redigi-la satisfatoriamente, resultado que parece estar mais relacionado à conversão para o registro discursivo e não ao raciocínio efetuado.

Atividade 3

Objetivo: chegar à forma do Teorema de Pitágoras.

Não sendo a condição de existência de triângulo suficiente para garantir que o triângulo seja retângulo, então qual relação deve existir entre as medidas dos lados para que isso aconteça?

Voltando à terna egípcia (3, 4, 5), construa quadrados sobre os catetos e sobre a hipotenusa do triângulo, como mostra a figura:



a) Calcule a área de cada quadrado.

b) Faça o mesmo para as ternas do item c) da Atividade 2, isto é, (6 8,10), (5, 12, 13) e (9, 12, 15).

c) Preencha a tabela seguinte:

cateto b	cateto c	hipotenusa a	área dos quadrados Q1	Q2	Q3
3	4	5	9	16	25
6	8	10	36	64	100
5	12	13	25	144	169
9	12	15	81	144	225

(A tabela encontra-se preenchida para melhor ilustrar a escolha das variáveis didáticas.)

d) Compare as áreas de Q1 e Q2 com a de Q3. O que você observou? Tente escrever uma relação entre elas. Deduza uma relação entre os lados do triângulo.

e) Será que essa relação vale para qualquer triângulo? Experimente usá-la para ternas correspondentes a triângulos acutângulos ou obtusângulos.

Evitou-se solicitar o cálculo da soma das áreas de Q1 e Q2, pois neste caso seria subtraída do aluno a oportunidade de exercitar a capacidade de observação e reflexão.

Apesar de a conclusão sobre as áreas dos quadrados estar correta, os alunos não obtiveram êxito quando solicitados a deduzir uma relação entre os lados do triângulo.

O quadro ilustra a constatação:

	resposta correta	resposta incorreta	em branco
atividade 3d	18	1	–
Q1 + Q2 = Q3	14	4	1
Hipot^2 = cat^2 + cat^2	4	–	15

A partir do quadro numérico (tabela), os alunos concluíram, com êxito, a forma do Teorema de Pitágoras no quadro geométrico. Entretanto, na passagem para o quadro algébrico o índice de sucesso foi bastante baixo. Tudo indica que, a partir da área, é mais difícil para o estudante chegar ao valor do lado do quadrado.

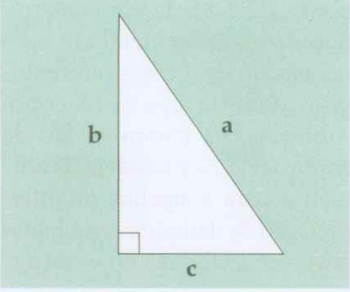
Atividade 4

Objetivo: descontextualizàção do Teorema de Pitágoras.

Verificamos para alguns triângulos cujos lados tinham como medidas números inteiros que, para dar origem a um triângulo retângulo, uma relação deveria ocorrer entre essas medidas. Mas, no caso de medidas quaisquer dadas por números não inteiros, será que ela vai continuar valendo?

a) Desenhe e recorte um triângulo retângulo qualquer. A seguir, recorte mais 7 triângulos "idênticos" a esse. Não se preocupe em medir os lados.

b) Desenhe e recorte agora:



- um quadrado de lado a (pinte de amarelo);
- um quadrado de lado b (pinte de verde);
- um quadrado de lado c (pinte de azul)

c) Como se fosse um quebra-cabeças, monte:

- um "quadradão" usando 4 triângulos e o quadrado amarelo, isto é, o quadrado de lado a.
- outro "quadradão" usando 4 triângulos e os quadrados verde e azul, respectivamente de lados b e c.

d) Se retirarmos de cada "quadradão" os 4 triângulos, qual a área da figura que sobra?

e) Que se pode dizer, então, das áreas das figuras restantes em cada "quadradão"? Isto é, que relação existe entre elas? Que relação existe entre os lados do triângulo?

A opção pela demonstração hindu se deve à análise cognitiva das demonstrações, previamente efetuada. Trata-se de uma demonstração com visibilidade favorável para a aplicação da operação de reconfiguração. Além disso, ela permite, posteriormente, justificativas mais rigorosas, por meio da mudança para o quadro algébrico e da utilização da congruência de triângulos.

Material didático

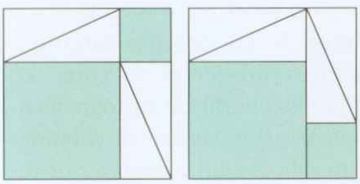
- Cartolina e tesoura para o recorte das figuras, na realização da atividade.
- Para a institucionalização do Teorema, as figuras coloridas foram feitas de plástico, com ímã no verso, o que as permitiria aderir a uma placa metálica de fácil transporte. A idéia foi inspirada nos antigos flanelógrafos.

Ao ser criada a Atividade 4, a intenção era deixar a cargo dos alunos o desenho e recorte das figuras a partir de cartolinas coloridas, que seriam distribuídas em sala. Porém, a escassez de tesouras seria um impedimento para o êxito da atividade. A solução encontrada para contornar essa realidade foi confeccionar 20 kits (não idênticos), cada um contendo oito triângulos retângulos congruentes, de cartolina branca, um quadrado de cartolina amarela, um verde e um azul, obedecendo aos requisitos estipulados nos itens 4a e 4b.

Entretanto, apresentando para o aluno os kits prontos, corria-se o risco de que ele não percebesse os detalhes de construção das referidas figuras. Uma solução intermediária foi encontrada. Pediu-se aos alunos que lessem atentamente 4a e 4b. A seguir, em sala de aula foi recortado um triângulo retângulo de cartolina branca e foram confeccionados, por alguns alunos, os quadrados de cores respectivamente amarela, verde e azul. A classe participava respondendo a perguntas do tipo: "Como deve ser o tamanho do lado do quadrado amarelo?... do verde?... do azul?"

Foram distribuídos os kits, e as duplas passaram a realizar as reconfigurações. Observou-se que algumas duplas efetuavam as reconfigurações com bastante rapidez e, o mais interessante, apareceram reconfigurações de dois tipos, para a fig.2 da demonstração.

Para facilitar a leitura dos resultados, foi adotada a seguinte convenção: tipo V – os quadrados apresentam um vértice comum; e tipo L – os quadrados apresentam lados contíguos.



tipo (V) **tipo (L)**

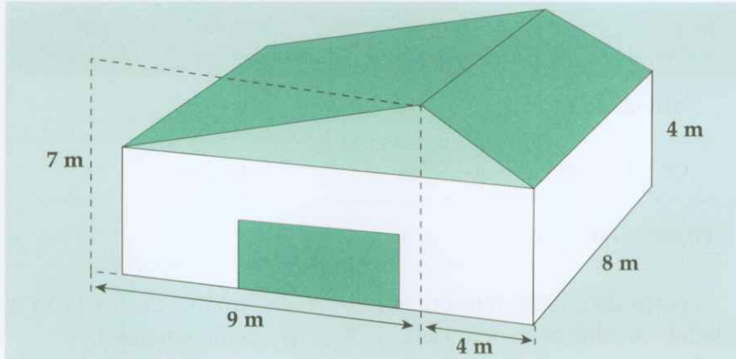
A reconfiguração tipo L, lembrando Padilla, apresenta o obstáculo do desdobramento de objetos no que se refere aos lados dos quadrados, portanto, mais difícil de ser percebida.

Para comentar o item 4c foram utilizadas as figuras com ímãs, que aderiam ao quadro metálico, conforme descrição feita no item Material didático. O material mostrou-se bastante útil e prático, facilitando uma visualização mais dinâmica da operação de reconfiguração.

Atividade 16

Objetivo: proporcionar ao aluno oportunidade de exercitar a "apreensão operatória" em um problema que exige a aplicação do Teorema de Pitágoras numa situação da vida cotidiana. Verificar se ele consegue concluir o problema.

Qual a área do telhado desse galpão?



Foram previstas dificuldades de dois tipos:

- quanto à perspectiva da figura espacial. Segundo Duval, uma representação em perspectiva, ao contrário de uma maquete, não é uma representação heurística, pois privilegia um único ponto de vista (visão frontal, lateral etc.), podendo provocar leitura ambígua;
- quanto às modificações mereológicas (relação todo-parte) necessárias para a resolução do problema. As subfiguras pertinentes, dois triângulos retângulos, possuem um cateto comum, cuja medida é a diferença $7 - 4 = 3$.

Em vista disso, foi confeccionada uma correspondente maquete rudimentar, de papel-cartão, em escala aproximada. A intenção era mostrá-la à classe caso fosse estritamente necessário, o que realmente aconteceu.

A princípio, os alunos não conseguiam identificar quais as figuras geométricas componentes do telhado. Após a apresentação da maquete, com telhado removível, perceberam tratar-se da reunião de dois retângulos. Sabiam como calcular a área de um retângulo, mas observaram que "faltavam" medidas. Sugeriu-se que examinassem com atenção os dados do problema, tentando visualizá-los na maquete. Os grupos pareciam motivados, e alguns alunos aproximaram-se da maquete para "ver melhor". Uma vez interpretada a perspectiva, com a ajuda do modelo de papel-cartão, o reconhecimento do Teorema da Pitágoras como ferramenta a ser usada ocorreu naturalmente.

Resultados e conclusões

Analisando-se inicialmente o desempenho dos alunos em duplas na resolução das atividades e, posteriormente, por meio de teste individual, foi possível constatar que: as questões envolvendo congruência entre enunciado e relação pitagórica apresentaram os maiores índices de acerto; a apreensão perceptiva provocou, algumas vezes, falsas interpretações de dados de problemas; houve dificuldade em construir traçados suplementares em figuras nas quais o triângulo retângulo deveria aparecer como subfigura, na compreensão de enunciados, na passagem da aritmética para a álgebra, na interpretação de dados em problemas envolvendo figuras no espaço e, no momento de expressar as conclusões no registro discursivo. Surgiram também algumas variáveis de contexto de difícil administração, como, por exemplo, a falta ou escassez de conhecimentos disponíveis dos alunos e a falta de hábito em resolver questões encadeadas por vários itens. Outro fator que, para alguns alunos, prejudicou a continuidade dos trabalhos e conseqüentemente o aproveitamento obtido residiu na irregularidade do comparecimento às aulas.

O fato de o aluno trabalhar previamente com a condição de existência de triângulo o auxilia a perceber que deve existir "algo mais", isto é, alguma propriedade específica, no caso do triângulo retângulo. Assim, em vez de tomar conhecimento da igualdade pitagórica por meio de sua forma, como se observou nos livros didáticos analisados, o estudante tem a possibilidade de perceber sua utilidade e importância. Tudo leva a crer que o tipo de abordagem apresentado na seqüência didática imprime ao Teorema de Pitágoras maior significado. Além disso, as atividades constitutivas da seqüência parecem ter contribuído para desenvolver nos alunos algumas capacidades, relativamente à aplicação do mesmo como ferramenta para a resolução de problemas. A escolha intencional de determinadas variáveis didáticas tais como posição das figuras, utilização de figuras mais complexas contendo triângulos retângulos como subfiguras, enunciados no registro de discurso, figuras de partida sem os traçados auxiliares, dados ocasionando resultados decimais exatos ou aproximados, emprego de notação literal etc. provocou resoluções por parte dos alunos que confirmaram o que havia sido apontado nas análises a priori da seqüência e do teste. Os efeitos causados pelas variáveis empregadas puderam ser previstos em parte com fundamento na análise cognitiva, segundo Duval e Padilla, mas também como provável decorrência de obstáculos didáticos criados em séries anteriores. Em outras palavras, os erros cometidos pelos alunos na aplicação do Teorema de Pitágoras podem ser explicados como conseqüência da abordagem utilizada no processo de ensino-aprendizagem, porém sem esquecer os fenômenos concernentes à apreensão das figuras. Por outro lado, verificou-se que a seqüência elaborada pode ser aplicada em alunos com parcos conhecimentos de Geometria, mas também em estudantes possuidores de melhor bagagem matemática. Em relação ao primeiro caso, foram proporcionadas oportunidades para colocar o aluno em contato com itens fundamentais da Matemática. No segundo, reinvestindo em conceitos e retomando técnicas, foi possível mostrar ao aluno por meio da mudança de quadros que os conhecimentos matemáticos não se situam em "gavetas" isoladas, mas, sim, se completam ao ser usados como ferramentas na resolução de novos problemas.

Bibliografia

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,*. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 9, nº 3, pp. 281-308, 1988 .

BASTIAN, I.V. *O Teorema de Pitágoras*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática, PUC- SP, 2000.

BERTÉ, A. Différents ordres de présentation des premières notions de géometrie métrique dans l´enseignement secondaire. *Recherches en didactique des mathématiques,*. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 15, nº 3, pp.83-130, 1995.

DUVAL, R. Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives,*. Strasbourg : IREM, v. 1, pp. 57-74, 1988.

DUVAL, R. Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives,*. Strasbourg : IREM, v. 1, pp. 7-25, 1988.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine.* Berne: Peter Lang, 1995.

LOOMIS, E.S. *The Pythagorean Proposition.* Washington D.C.: National council of teachers of mathematics, 1972.

PADILLA, V. *Analyse cognitive de quelques démonstrations du théorème de Pythagore.* Strasbourg, 1992.

SINGH, S. *O último teorema de Fermat.* (2ª edição). Tradução de Calife, J. L. Rio de Janeiro: Record, 1998.