# A ARITMÉTICA E A ÁLGEBRA NA MATEMÁTICA ESCOLAR[1]

*Rosinalda Aurora de Melo Teles*[2]

RESUMO: Este artigo discute a complexa relação entre aritmética e álgebra na matemática escolar, destacando dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra. Nossa pretensão é oferecer subsídios para reflexão sobre esta relação nos seus aspectos de rupturas e continuidades, dando pistas para formulação de situações didáticas mais eficientes do ponto de vista do ensino aprendizagem da álgebra.

PALAVRAS CHAVES: aritmética, álgebra, dificuldades conceituais, linguagem algébrica, concepções de álgebra

## Introdução:

O desenvolvimento tardio da Álgebra, registrado na história da Matemática e na própria estruturação do saber científico, parece dar indícios para o estudo, na Educação Matemática, da existência de dificuldades conceituais importantes, subjacentes à construção deste campo do conhecimento matemático. Segundo Coxford e Schulte (1995), enquanto a geometria elementar, já no século III a.C., podia ser vista como um sistema lógico razoavelmente consistente, a álgebra, ainda no início do século XIX, era pouco mais do que uma coleção de regras desconexas.

Neste artigo, baseados nos estudos de Teles (2002), abordaremos inicialmente questões relacionadas à complexa relação entre álgebra e aritmética. Neste estudo, Teles (2002) utilizou o recurso da *transposição didática* para analisar questões inerentes ao desenvolvimento do saber e os vínculos com as práticas de referência, buscando compreender questões contextuais e científicas, pois, conforme Chevallard (1991), o conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os"objetos de ensino".

A designação dos conteúdos matemáticos a serem abordados na escola é feita sob influências diversas, tais como: comunidade científica dos matemáticos, a sociedade em geral e os educadores matemáticos. Portanto, procuramos refletir sobre os limites e as relações entre aritmética e álgebra nesses contextos, designados respectivamente como matemática acadêmica, matemática do senso comum e educação matemática.

Também abordaremos o campo conceitual da Álgebra, por meio de questões relativas às representações simbólicas inerentes à Álgebra num apanhado da história da Matemática sobre a evolução da linguagem algébrica. Encerraremos o artigo apresentando dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra, destacando a relação com a aritmética catalogadas nos estudos em Educação Matemática.

## 1. A complexa relação entre aritmética e álgebra na Matemática Escolar

Definir Álgebra e Aritmética e de que modo elas se relacionam é uma tarefa difícil. Não se pretende aqui esgotar essa questão. Inicialmente, para os propósitos deste trabalho, podemos considerar pelo menos três contextos distintos: o da Matemática Acadêmica, tomando como referência o significado destes termos em alguns dicionários de matemática acadêmica atual; o contexto do"saber social"(senso-comum), ou seja, a matemática dos não-matemáticos, evidenciado nos dicionários, enciclopédias e na própria etimologia das palavras; e o contexto da Educação

[1] Este trabalho é um recorte da fundamentação teórica da dissertação de Mestrado em Educação defendida em 2002 pela autora sob orientação da Dr. Paula Moreira Baltar Bellemain da UFPE. Nela fez-se um estudo diagnóstico com o propósito de analisar a interferência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais, na apropriação da álgebra e, mais especificamente, na resolução de equações polinomiais do 1° grau, nos ensinos fundamental e médio.

[2] Doutoranda em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco; professora substituta de Metodologia do Ensino da Matemática na UFPE e Professora do Ensino Fundamental e Médio na Rede Pública Estadual de Pernambuco. E- mail: rosinaldateles@bol.com.br ou ronaldoteles@yahoo.com.br

Matemática, representado por alguns textos publicados por esta comunidade.

No ambiente escolar, a idéia mais difundida é que a aritmética trata de números e a álgebra, de letras. Tenta-se também estabelecer limites rígidos entre conteúdos de aritmética (trabalhados prioritariamente desde a educação infantil até o terceiro ciclo do ensino fundamental) e conteúdos de álgebra (abordados a partir do terceiro ciclo). Acredita-se que os conteúdos da aritmética são pré-requisitos para a introdução da álgebra.

Nossas reflexões nos conduziram a discutir se estas idéias são consensuais nos outros contextos: da matemática acadêmica, do saber do senso comum e na comunidade da educação matemática.

Para discutir os objetos de estudo e as especificidades da álgebra e da aritmética na matemática acadêmica atual recorremos ao *"Atlas des Mathématiques"* (REINHARDT e SOEDER, 1997) e à enciclopédia de Matemática (NEWMAN, 1964). O primeiro, publicado em 1997 pela La Pochothèque Librairie Générale Française é a tradução para o francês de uma obra alemã (Atlas zur Mathematik). De acordo com esse texto, o"objeto de estudo da álgebra são as propriedades dos conjuntos munidos de uma estrutura algébrica, como os grupos, os anéis, os corpos, os espaços vetoriais. Uma estrutura algébrica consiste em leis de composição internas e externas, possuindo propriedades particulares, tais como comutatividade, distributividade, associatividade, existência do elemento neutro, existência de um inverso". A aritmética é considerada como sinônimo de "teoria dos números" e colocada como um dos ramos da álgebra, cujo foco central é o estudo da divisibilidade dos números inteiros.

Na enciclopédia de Matemática (NEWMAN, 1964), encontramos a definição de aritmética como "sendo parte da matemática", e dividida em aritmética comum – cálculo com números definidos - e aritmética literal – cálculo com números representados por letras do alfabeto (cálculo algébrico).

Essas definições evidenciam que o uso de letras não é o critério hoje para diferenciar álgebra e aritmética na matemática acadêmica.

No que diz respeito ao saber do senso comum, o Novo Dicionário Aurélio define aritmética como *"a arte dos números"* e a álgebra como *"ciência da reintegração e equiparação"*. Ainda num dicionário de língua portuguesa encontramos aritmética como a parte da matemática em que se investigam as propriedades elementares dos números inteiros e racionais. E álgebra como a parte da Matemática em se que estudam as leis e processos formais de operações com entidades abstratas (HOLANDA, 1999). Etimologicamente, em árabe, *al-ga-bãra*, referia-se à ciência da equiparação ou da comparação. Percebemos que, nos dicionários de língua portuguesa aritmética refere-se ao número, enquanto na designação do que significa álgebra focaliza-se a etimologia da palavra, fazendo referência à resolução de equações.

Para representar a Educação Matemática recorremos a algumas pesquisas que discutem o ensino aprendizagem de álgebra: Lins e Gimenez (1997), Garcia (1997), Souza e Diniz (1996), Sá (s/ed., s/d).

Lins e Gimenez (1997) afirmam que a álgebra parece ser um domínio exclusivo da escola e que, na matemática dos não-matemáticos, a álgebra é, antes de tudo, um conjunto de afirmações genéricas sobre quantidades para as quais se produziria significado com base no dinheiro. E a aritmética seria um conjunto de afirmações a respeito de como efetuar certos cálculos. Ainda segundo estes autores, a álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdades e desigualdades.

Segundo Garcia (1997), a álgebra revoluciona por ser uma ferramenta a serviço da resolução de problemas e ser um objeto matemático em si, um ramo autônomo da Matemática, de que todas as disciplinas científicas se nutrem para estabelecer melhores e mais cômodas vias de comunicação entre elas e com o exterior.

Para Souza e Diniz (1996), a álgebra é a linguagem da Matemática utilizada para expressar fatos genéricos. Como toda linguagem, a álgebra possui seus *símbolos* e suas *regras*. Estes *símbolos* são as letras e os sinais da aritmética; enquanto as *regras* são as mesmas regras da aritmética, que nos permitem manipular os símbolos assegurando o que é permitido e o que não é. Em contraposição, Garcia (1997) diz que há uma nova significação na álgebra para as ações que se realizavam com os símbolos na aritmética: determinadas regras sintáticas específicas da álgebra são contraditórias com as da aritmética.

Estudos em Educação Matemática também focalizam aspectos na definição que diferenciam álgebra e aritmética.

Lins e Gimenez (1997) afirmam que, na matemática escolar, álgebra e aritmética são definidas em função dos conteúdos que tratam: coisas da álgebra são equações, inequações, funções etc., e as da aritmética são números, operações, tabuada etc.

Para Souza e Diniz (1996) o fator fortemente diferencial entre a álgebra e a aritmética são os seus objetivos. Enquanto a aritmética trata de números, operações e suas propriedades visando à resolução de problemas ou de situações que exigem uma resposta numérica, a Álgebra procura expressar o que é genérico, aquilo que se pode afirmar para vários valores numéricos independentemente de quais sejam eles exatamente. Para Lins e Gimenez (1997), a própria atividade aritmética envolve, naturalmente, um certo nível de generalidade. Para eles, portanto, a diferença entre álgebra e aritmética é de tratamento, de foco, sugerindo não apenas que uma se beneficia da outra, como também que uma *depende* da outra. Há, na verdade, segundo os autores, um jogo de primeiro e segundo plano: o que dizemos na aritmética deve poder ser dito de forma genérica, deve ter validade genérica, ao passo que o que dizemos na álgebra pode ser dito em casos particulares.

Os estudos em educação matemática apresentam a aritmética tratando de números, operações e das propriedades destas, enquanto a álgebra possui um aspecto de generalização da aritmética, tem a função de ferramenta e destaca-se por causa da utilização da linguagem simbólica. Inferimos, portanto, que na Matemática escolar é quase impossível colocar uma divisória ou estabelecer limites entre aritmética e álgebra, muito menos impor uma ordem estrita, primeiro aritmética, depois álgebra.

## Concepções de Álgebra

Há várias concepções subjacentes à álgebra, que não se esgotam em si mesmas. A pertinência desta discussão está no fato de haver uma relação intrínseca entre estas e o ensino/aprendizagem da álgebra e da aritmética.

Os estudos em educação matemática apresentam a aritmética tratando de números, operações e das propriedades destas, enquanto a álgebra possui um aspecto de generalização da aritmética, tem a função de ferramenta e destaca-se por causa da utilização da linguagem simbólica

Para Usiskin (1995) e Souza e Diniz (1996), podem ser observadas as seguintes concepções com relação à álgebra:

*A álgebra como aritmética generalizada* – Para Usiskin (1995) as *variáveis* são generalizadoras de modelos, chamados por Souza e Diniz (1996) de padrões numéricos e que foram construídos indutivamente na aritmética. Na concepção de Usiskin, as instruções-chave para o aluno são *traduzir* e *generalizar*. Conforme o autor, trata-se de técnicas importantes, não só para a álgebra, mas também para a aritmética. Para ele é impossível estudar aritmética adequadamente, sem lidar implícita ou explicitamente com variáveis.

Ao questionar o que seria mais fácil: "O produto de qualquer número por zero é zero" ou "Para todo $n$, $n.0 = 0$", ele argumenta que a superioridade da linguagem algébrica sobre, por exemplo, o português nas descrições de relações numéricas se deve à similaridade das duas sintaxes. A descrição algébrica assemelha-se à descrição numérica; a descrição em português não.

*A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problema s*- as variáveis são ou *incógnitas* ou *constantes*, isto é, valores numéricos desconhecidos que são descobertos através da resolução de uma equação ou de um sistema de equações. O que se espera do aluno é que ele descreva simbolicamente através de uma equação a situação que envolve a incógnita de um problema, para depois disso, simplificar a equação e resolvê-la (USISKIN, 1995; SOUZA e DINIZ, 1996).

Para Usiskin, as instruções-chave são *simplificar* e *resolver*, usando para exemplificar o seguinte problema: "Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número". Ele diz que facilmente se traduz o problema para a linguagem da álgebra: $5x + 3 = 40$, ou seja, encontramos um modelo geral utilizando a álgebra como generalizadora de modelos. Precisamos agora, resolver a equação com um procedimento, por exemplo, somando $-3$ a ambos os membros. Ao resolver problemas desse tipo, muitos alunos têm dificuldades na passagem da aritmética para a álgebra. Enquanto a resolução aritmética ("de cabeça", isto é, por cálculo mental) consiste em subtrair 3 e dividir por 5, a forma algébrica $5x + 3$ envolve a multiplicação por 5 e adição de 3, as operações inversas. "*Isto é, para armar a equação, devemos raciocinar exatamente da maneira contrária à que empregaríamos para resolver o problema aritmeticamente*"(USISKIN, 1995, p.15).

*A álgebra como estudo de relações entre grandezas* - nesta concepção de Usiskin (1995) a variável é um *argumento* (isto é, representa valores do domínio de uma função) ou um *parâmetro* (isto é, representa um número do qual dependem outros números). Souza e Diniz (1996) enfatizam que as variáveis "variam"e o que se espera do aluno é que ele relacione quantidades e faça gráficos. Para Usiskin, no contexto dessa concepção existem as noções de variável independente e variável dependente. As funções surgem quase imediatamente, pois necessitamos de um nome para os valores que dependem do argumento ou parâmetro *x*. Por tratar-se de um modelo fundamentalmente algébrico, a diferença crucial entre a álgebra como estudo das relações e álgebra como estudo de procedimentos para resolver problemas está em que, no primeiro caso, as variáveis *variam*.

Por exemplo, quando se pergunta ao aluno: o que ocorre com a valor de 1 /x quando x se torna cada vez maior, a questão confunde o aluno, pois não lhe estamos pedindo o valor de x, portanto x não é uma incógnita. Não pedimos que o aluno traduza. Há um modelo a ser generalizado, mas não se trata de um modelo aritmético (USISKIN, 1995):

*A álgebra como estudo das estruturas matemáticas* – a variável torna-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades (grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais, por exemplo), "*o aluno tende a tratar as variáveis como sinais no papel, sem nenhuma referência numérica*". Desejamos que o aluno tenha em mente os referenciais (geralmente números reais), quando utilizam as variáveis e, ao mesmo tempo, que sejam capazes de operar com as variáveis sem ter que voltar sempre ao nível desse referencial (USISKIN, 1995; SOUZA e DINIZ, 1996).

*Embora a dicotomia aritmética tratando de números e álgebra, de letras, como já dissemos, seja simplista, a questão do uso de representações simbólicas é central na álgebra*

## Representações simbólicas inerentes à álgebra

Embora a dicotomia aritmética tratando de números e álgebra, de letras, como já dissemos, seja simplista, a questão do uso de representações simbólicas é central na álgebra. Segundo Harper (1987, citado por Lins e Gimenez, 1997), da representação algébrica retórica (apenas palavras) à sincopada (alguma notação especial, em particular palavras abreviadas) e à simbólica (apenas os símbolos e sua manipulação) haveria um correspondente desenvolvimento intelectual. Desta forma, de algum modo, seguir a trajetória do uso de letras permite seguir a trajetória do desenvolvimento de um pensamento algébrico.

Em Matemática, conforme Garcia (1997), o simbolismo formal constitui uma verdadeira linguagem, principalmente em forma escrita, necessário para a comunicação do pensamento matemático que opera em dois níveis. O primeiro é o nível semântico: os símbolos e as notações carregam um significado em paralelo com a linguagem natural. O segundo nível é puramente sintático, em que se podem aplicar regras manipulativas, sem referência direta ao significado.

Ainda segundo Garcia (1997), o nível sintático, elemento essencial na álgebra, é a principal causa de dificuldades associadas ao uso das notações formais, sobretudo, para os estudantes que depois de uma larga trajetória aritmética, em séries anteriores, se deparam com novas regras sintáticas algébricas, contraditórias muitas vezes com as da aritmética. Por exemplo, o uso da justaposição para indicar a operação de multiplicação: em álgebra escrevemos **ab** para indicar a operação **a x b**, o que representa uma fonte de erro na aprendizagem, porque não pode ser aplicado ao produto dos números – evidentemente não se escreve **75** para indicar **7 x 5**.

Para compreender a evolução da linguagem algébrica e sua influência na evolução da álgebra como campo de conhecimento matemático, recorremos à história da Matemática.

## A evolução da linguagem algébrica

Há aproximadamente 1600 anos antes de Cristo, vivia no Egito um escriba chamado Aahmesu, conhecido nos meios científicos como Ahmes. É ele o autor de uma das mais antigas obras de

Matemática de que se tem notícia: o *Papiro de Ahmes*[3] O Papiro de Ahmes está guardado no Museu Britânico. Com 5,5 metros de comprimento por 32 centímetros de largura, contém oitenta problemas, todos resolvidos.

A maior parte dos problemas compilados no Papiro de Ahmes tratava de assuntos do dia-a-dia dos antigos egípcios: o preço do pão e da cerveja, a alimentação do gado, a quantidade de grãos de trigo armazenados. Alguns, no entanto, não se referiam a coisas concretas, mas aos próprios números. Nesses problemas, o número procurado era sempre representado pela mesma palavra: ***montão.*** Um problema do tipo"Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me: Qual é a quantidade?" era resolvido de um modo muito engenhoso utilizando a *regra do falso*[4] (BOYER, 1974). Tratava-se da"Álgebra Retórica".

Andando no tempo, chegamos à Grécia, aproximadamente 400 anos antes de Cristo, e encontramos Diofante de Alexandria[5], freqüentemente chamado"pai da Álgebra", que foi o primeiro matemático a fazer uso sistemático de símbolos algébricos, isto é, de abreviações nos problemas e nas operações com os números.

Os símbolos de Diofante marcam a passagem da **Álgebra retórica**, em que as expressões são escritas totalmente em palavras, para a **Álgebra sincopada,** na qual algumas expressões vêm escritas em palavras e outras são abreviadas (STRUIK, 1989).

Ainda na Grécia, Euclides de Alexandria, se dedicava ao ensino em 300 a.C, trabalhando no centro de ensino e pesquisa mais importante do seu tempo – o Museu de Alexandria - publicou a obra *Elementos*, com treze livros, dos quais dois são dedicados à Álgebra: o livro II e o livro V. Na Álgebra de Euclides as quantidades desconhecidas eram representadas por figuras geométricas. Nos ***Elementos,*** Euclides realizava todas as construções utilizando somente régua não graduada e compasso, não fazia cálculos nem estabelecia medidas. Preocupava-se apenas com as relações que podia obter geometricamente. A Álgebra geométrica antiga não era um instrumento ideal, mas era eficaz (BOYER, 1974; STRUIK, 1989).

Os matemáticos gregos nunca chegaram a estabelecer uma ponte entre a Álgebra geométrica de Euclides e o cálculo numérico do valor de x. Um dos motivos para isso pode ter sido o desprezo com que o trabalho com números era visto na sociedade grega do tempo de Euclides. Tratava-se de assunto de escravos, indigno de cidadãos livres. A sociedade escravocrata limitava, assim, a possibilidade de avanço do conhecimento. Outro motivo era puramente matemático: eles descobriram que era impossível resolver alguns problemas através da Álgebra geométrica de Euclides, como por exemplo, o problema da *"quadratura do círculo"*[6] (Boyer, ibid).

No século VIII da era cristã, al-Khowarizwi escreveu dois livros sobre aritmética e álgebra que tiveram papéis muito importantes na história da matemática. O livro mais famoso dele chama-se **Hfisab al-jabr wa-almuqãbalah,** literalmente, "ciência da redução e da confrontação" (STRUIK, 1989), ou seja, **Livro sobre as operações al-jabr e qabalah.** Do termo **al-jabr,** vem *"álgebra"* que significa **restauração** e refere-se à transposição de termos para o outro lado de uma igualdade; o termo **qabalah** significa **redução** ou **equilíbrio** e refere-se ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos de uma equação.

Ao longo dos séculos e superando muitas dificuldades, os matemáticos foram lentamente aprendendo a substituir as palavras por letras e pequenos sinais: =, +, -, :, etc., criando as condições para a próxima etapa do desenvolvimento da Álgebra - as equações expressas totalmente em símbolos como as conhecemos hoje: a **Álgebra simbólica.**

Um advogado e matemático francês, François Viète (1540-1603), apaixonado pela álgebra, introduziu o uso sistemático das letras para indicar números desconhecidos e dos símbolos nas operações, da forma como são utilizados até hoje. Por esse motivo, Viète, assim como Diofante, também é conhecido como o Pai da Álgebra. Foi o primeiro a escrever as equações e a estudar suas propriedades através de expressões

[3] O Papiro de Ahmes está guardado no Museu Britânico. Com 5,5 metros de comprimento por 32 centímetros de largura, contém oitenta problemas, todos resolvidos

[4] Por exemplo, para resolver a questão: "Um montão, sua metade, seus dois ter
ços, todos juntos são 26. Digam-me: qual é a quantidade?", inicialmente, atribuíam a montão um valor qualquer, encontrando um resultado provavelmente falso; os valores falsos eram então usados para montar uma regra de três simples com os elementos do problema, para então chegará solução verdadeira. Matemáticos de várias partes do mundo adotaram a regra do falso dos egípcios.

[5] Diofante (325-409) – grande matemático, viveu e trabalhou na Alexandria no século IV a.C. , após a destruição do museu de Alexandria, restaram apenas seis livros da sua coleção Aritmética A coleção traz uma variedade muito grande de problemas, extremamente criativos e complexos, que desafiaram a inteligência e a imaginação de grandes matemáticos durante séculos.

[6] Para os gregos, quadrar um circulo significava construir, com auxílio de régua não graduada e compasso, um quadrado que tenha exatamente a mesma área do circulo.

gerais. Graças a ele, pela primeira vez na história da Matemática os objetos de estudo passaram a ser não mais problemas numéricos sobre o preço do pão ou da cerveja, sobre a idade das pessoas ou os lados de figuras, mas sim as próprias expressões algébricas.

Além de Viète, outros matemáticos da mesma época contribuíram para aperfeiçoar a linguagem simbólica da Álgebra. Um deles foi o inglês Robert Record (1510-1558) que criou o sinal de igualdade ( = ). Este sinal foi usado por outro matemático inglês, Thomas Harriot (1560-1621), nas equações de Viète. Ele conseguiu eliminar as poucas palavras que restavam na Álgebra de Viète (BOYER, 1974 e WAERDEN, 1985).

A passagem para a Álgebra simbólica foi completada pelo grande matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650), que aperfeiçoou a Álgebra de Viète, criando a notação que usamos até hoje para os expoentes.

Em suma, até o século XVII, a álgebra era uma generalização da aritmética. No início do século XIX, a álgebra estende-se a elementos que não são mais "números" e a operações que não são necessariamente as quatro operações da aritmética. A álgebra dita "moderna" começa com a teoria dos grupos, devida em parte a Gauss e, sobretudo, a Evariste Galois.

Na segunda metade do século XIX, a álgebra tem como principal objeto o estudo das estruturas algébricas abstratas; surgem a teoria dos corpos, devida a Kjummer, e a noção de ideal de um anel, devida a Dedekind. Uma nova etapa é transposta por volta de 1925 com os trabalhos de Emy Noether e de F. Artin sobre a estrutura da álgebra e sobre a síntese das idéias anteriores. Desde o fim do século XIX, a álgebra teve numerosas aplicações em análise, em geometria, em mecânica, em física teórica (CHAMBADAL 1978).

De acordo com Garcia (1997), a passagem da aritmética para a álgebra, representada pelo desenvolvimento da linguagem algébrica na idade média se produz como resposta à busca de sistemas de representações que permitissem a resolução generalizada dos problemas clássicos gregos.

*Desta forma, pensamos que, na história da matemática, a aritmética esteja relacionada à manipulação de quantidades conhecidas (algoritmos, procedimentos de cálculo), enquanto a álgebra surge para resolver problemas que envolviam quantidades desconhecidas*

A aritmética do século XX oferece respostas a problemas teóricos abertos, muito recentes. Entre eles, a chamada matemática discreta, como a criptografia, os problemas de minimização e exploração máxima na economia, a análise numérica, os problemas de interação etc. (LINS e GIMENEZ, 1997).

Desta forma, pensamos que, na história da matemática, a aritmética esteja relacionada à manipulação de quantidades conhecidas (algoritmos, procedimentos de cálculo), enquanto a álgebra surge para resolver problemas que envolviam quantidades desconhecidas.

## 2. DIFICULDADES DOS ALUNOS NA APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA, DESTACANDO A RELAÇÃO COM A ARITMÉTICA.

Para Booth (1995), uma das maneiras de tentar descobrir o que torna a álgebra difícil é identificar os tipos de erros que os alunos comumente cometem nessa matéria e investigar as razões desses erros.

Uma pesquisa que adotou esta abordagem foi a Seção de álgebra do Projeto "Strategies and Errors in Secundary Mathematics" (SESM), levada a efeito no Reino Unido, entre 1980 e 1983 (BOOTH, 1984). Ela mostrou que muitos dos erros cometidos pelos alunos podiam ter origem em suas idéias sobre aspectos como:

- *O foco da atividade algébrica e a natureza das respostas*: em aritmética, o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na álgebra, porém, é diferente; o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral.

- *O uso da notação e da convenção em álgebra*: em aritmética, símbolos como + e = são interpretados geralmente em termos de ações a serem efetuadas, de maneira que + significa efetivamente realizar a operação, e = significa escrever a resposta (BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1980; e GINSBURG, 1977, citados em: BOOTH, 1995).

- *O significado das letras e das variáveis*: uma das diferenças mais flagrantes entre a aritmética e a álgebra é, obviamente, a utilização, nesta última, de letras para indicar valores. Um dos aspectos mais importantes da álgebra é a idéia de "variável". Mesmo quando as crianças interpretam as letras como representações de números, há uma forte tendência a considerar que as letras representam valores específicos únicos, como em "$x + 3 = 8$", e não números genéricos ou variáveis como em "$x + y = y + x$" ou "$A = b + a$" (KUCHEMAN, 1981, citado em BOOTH, 1995). Na aritmética, os símbolos que representam quantidades sempre significam valores únicos.

- *Os tipos de relações e métodos utilizados em aritmética*: o uso de métodos informais em aritmética pode também ter implicações na habilidade do aluno para estabelecer (ou compreender) afirmações gerais em álgebra.

Para Booth (1995), esta lista de possíveis causas das dificuldades das crianças no aprendizado de álgebra não é, de modo algum, exaustiva. Para ele a álgebra não é isolada da aritmética; sendo ela, em muitos aspectos, a "*aritmética generalizada*", apontando nisto uma das fontes de dificuldade. Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético. Se não forem reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra poderá ser afetado. Neste caso, algumas dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mas de dificuldades conceituais em aritmética que não foram corrigidos.

### • *Dificuldades conceituais da aritmética que interferem na apropriação da álgebra:*

Um apanhado das dificuldades conceituais da aritmética que interferem na apropriação da álgebra indicadas nas pesquisas em Educação Matemática, mostram, segundo Da Rocha Falcão (1995) e Souza e Diniz (1996), que convém considerar que algumas das dificuldades observadas pelos estudantes iniciantes em álgebra são de fato problemas "herdados" da aritmética, que apenas perduram num novo contexto. Uma destas dificuldades, conforme Souza e Diniz (1996), é a não-compreensão da propriedade distributiva, que se constitui em uma dificuldade aritmética que, entre outras, impede a manipulação de expressões algébricas. Segundo as autoras, existe uma dificuldade dos alunos em trabalhar com a propriedade distributiva quando os termos entre parênteses aparecem escritos em outra posição: $(p+q) \times n = n \times p + n \times q$. Outra dificuldade é quanto ao significado do oposto de um número, quando os alunos se deparam com expressões da forma $-(p + q)$ ou $-(p - q)$.

### • *Significado dos Símbolos:*

Segundo Vergnaud (1986), há diferentes significações para o sinal de igualdade: *é o mesmo que; dá como resultado; é equivalente a*. Logo, o significado dos símbolos de operações e de igualdade que as crianças adquirem durante suas primeiras experiências aritméticas pode se constituir em obstáculo epistemológico para a apropriação da álgebra nos seus diversos aspectos.

Garcia (1997), fundamentando-se em Kieran e Filloy (1989), assinala que o sentido do sinal de igual (=) se modifica na passagem da aritmética para a álgebra. Enquanto aritmeticamente o sinal de igual é "sinal de produzir algo" (*señal de hacer algo*), na linguagem algébrica representa um símbolo de equivalência que equilibra os lados esquerdo e direito de uma equação, opinião que corresponde ao pensamento de Sá (S/D), para o qual, na aritmética, a igualdade é usada para representar transformações e, na álgebra, a igualdade é usada para representar o equilíbrio. Porém a idéia de o sinal de igualdade poder ser visto como indicador de uma relação de equivalência não é percebida de imediato pelo aluno.

### • *Operações Inversas:*

Segundo Da Rocha Falcão (1993), os problemas algébricos implicam no enfrentamento de novos algoritmos de cálculos.

Para Vergnaud (1986), pode-se facilmente imaginar as dificuldades que as crianças podem encontrar na extensão da significação das operações ao analisarmos as estruturas aditivas e multiplicativas de base.

Na resolução de uma equação polinomial do 1° grau, por exemplo, está implícita a escolha de operações inversas que serão mobilizadas no momento de "passar termos de um membro para outro da equação". Aplicar uma operação inversa, portanto, significa tomar uma decisão: que número deve ser somado ou subtraído aos dois membros de uma equação? Que número deve multiplicar ou dividir os membros de uma equação quando da aplicação dos *princípios de equivalência*[7]? Esta decisão está relacionada à compreensão do oposto de um número, pois é justamente ele que deve ser adicionado ou subtraído aos dois membros de uma equação. Para ilustrar a importância desta decisão utilizaremos dois erros comuns relacionados às escolhas de operações inversas na resolução de equações polinomiais do 1° grau analisados por Teles(2002):

[7] I. Princípio Aditivo da Igualdade: Adicionando ou subtraindo um mesmo número nos dois membros de uma igualdade obtém-se outra sentença que ainda é uma igualdade.
II. Princípio multiplicativo da igualdade: Multiplicando ou dividindo por um mesmo número (diferente de zero) os dois membros de uma igualdade obtém-se uma nova sentença que ainda é uma igualdade.

Figura001

$$3)\ 2x - 1 = 3$$
$$2x = 3 - 5$$
$$2x = 2$$
$$2x = 2$$
$$x = 2$$

Figura002

$$8)\ -\frac{2}{5}x + 4 = 0$$
$$x = 0 + 4$$
$$x = 4 + \frac{2}{5}$$
$$x = \frac{6}{5}$$

No primeiro exemplo, ao resolver a equação-2/5x + 4= 0, o aluno aplica em relação ao coeficiente –2/5 a operação inversa da subtração ao invés da inversa da multiplicação. No segundo, na equação 2x – 1 = 3, não aplica a operação inversa da subtração emrelação ao coeficiente –1.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Na história da Matemática, um dos aspectos importantes da álgebra foi a evolução das representações simbólicas. Como vimos, a passagem da álgebra retórica para a álgebra simbólica, em que as equações são expressas totalmente em símbolos, demorou cerca de mil anos e aconteceu como conseqüência das profundas mudanças pelas quais passou a Europa na transição da Idade Média para a Idade Moderna. Concordamos com Da Rocha Falcão (1993) quando enfatiza que a passagem da aritmética para a álgebra deve ser situada, entre outras coisas, em um contexto que abra espaço tanto para o aspecto de ruptura quanto para o de continuidade.

Concluímos vislumbrando a possibilidade de contribuir no sentido de oferecer subsídios para uma reflexão mais acurada sobre a relação entre a aritmética e álgebra nos seus aspectos de rupturas e continuidades, dando pistas para formulação de situações didáticas mais eficientes do ponto de vista do ensino aprendizagem da álgebra.

## REFERÊNCIAS


BOOTH, Leslly R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

BOYER,Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher/EDUSP. 1974..

COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

CHAMBADAL, Lucien. *Dicionário da Matemática Moderna*. São Paulo: Nacional, 1978.

CHEVALLARD,Y. *La transposition didactique:* du savoir savant au savoir enseigné. Grenable: La Pensée Sauvage, 1991.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A Álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. IN: SCHLIEMANN, Analúcia Dias. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Ed. UFPE,1993.

GARCIA, Francisco Fernandes. Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* Graó, Barcelona, *n.* 14, ano IV, outubro de 1997.

LINS, Romulo Campos e GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o Século XXI.* Campinas, SP: Papirus, 1997.

NEWMAN, James R. (org.). *The Universal Encyclopedia of Mathematics.* Londres: George Allen & Unwin, 1964.

REINHARDT, Fritz e SOEDER, Heinrich. *Atlas des Mathématiques.* Munich: La Pochothèque Librairie Générale Française, 1997.

SOUZA, Eliane Reame e DINIZ, Maria Ignez de S.Vieira. *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. São Paulo: IME-USP, 1996.

SÁ, Pedro Franco. *Aritmética, álgebra e a igualdade* ( s/l,s/ed.,s/d).

STRUIK, Dirk J. *História concisa das matemáticas.* Gradiva. Lisboa: 1989.

TELES, Rosinalda A. Melo. *A relação entre a aritmética e álgebra na matemática escolar:* um estudo sobre a influência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais, na resolução de equações polinomiais do 1º grau. Recife: UFPE, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação).

USISKIN, Zalman. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. *As idéias da_ álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

VERGNAUD, G. *Psicologia do Desenvolvimento Cognitivoe Didática das Matemáticas.* Um exemplo: as estruturas aditivas. *1986.*

WAERDEN, B. L. van der. *A History of algebra from al-Khowarizmi to Emmy Noether.* Zürich: Springer – Verlarg, 1985.