Artigo

TALES: MIL E UMA UTILIDADES

José Carlos Pinto Leivas

Resumo

Este artigo aborda o Teorema de Tales quanto a aspectos geométricos e de medidas. Utiliza a relação entre grandezas e estabelece a comparação com medidas de segmentos, quer sejam eles comensuráveis ou incomensuráveis. Busca um resgate do uso de régua e compasso para aplicá-los em atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula, principalmente na representação de números racionais na reta real. Outras possibilidades de aplicação, tanto no ensino fundamental como na formação inicial de professores, são a divisão de um segmento de reta em partes iguais e a distância do ponto de encontro das medianas de um triângulo aos vértices.

Palavras-Chave

Tales – representação de números racionais – comensurável - incomensurável

INTRODUÇÃO

Os parâmetros curriculares nacionais, que deram um direcionamento ao ensino da Matemática, apontam a presença desta na vida das pessoas de diversas formas e trazem a recomendação de que as políticas educacionais devem ser diversificadas e concebidas de modo que a educação não seja um fator de exclusão social. Ainda mais, afirma que os campos e os tempos da educação devem ser repensados, completar-se e interpenetrar-se, de modo que cada indivíduo, ao longo de sua vida, possa tirar o melhor proveito de um ambiente educativo em constante transformação.

A Matemática deve contribuir para essa transformação, mas, para que isso ocorra, é necessário que deixemos de propiciar uma aprendizagem com foco em procedimentos mecânicos, ou simplesmente pelo uso de algoritmos estruturados, e inovemos os currículos, a fim de alcançarmos tal transformação. Isso continua a não ocorrer tanto nos projetos pedagógicos das escolas da educação básica quanto nos cursos de formação de professores, em especial, uma vez que, nestes últimos, as disciplinas continuam desempenhando papéis isolados e sem conexão entre si e com as da primeira.

Para cumprir essa missão, os PCN:

...indicam aspectos novos no estudo dos números e operações, privilegiando o desenvolvimento do sentido numérico e a compreensão de diferentes significados das operações;
propõem novo enfoque para o tratamento da álgebra, apresentando-a incorporada aos demais blocos de conteúdos, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo;
destacam a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecem sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações;
apresentam uma graduação dos conteúdos do segundo para o terceiro ciclo que contempla diferentes níveis de aprofundamento, evitando repetições; (BRASIL, 1998, p.60).

O educador Edgar Morin (2002) defende a incorporação dos problemas cotidianos ao currículo e a interligação dos saberes, criticando o ensino fragmentado e alertando que, sem uma reforma do pensamento, é impossível aplicar suas idéias.

O tema intitulado Teorema de Tales, nos livros didáticos da educação básica e nos programas escolares e acadêmicos, parece ser um contra-exemplo do que é discutido ou esperado para atender às necessidades de reformulação do fazer matemático. É um dos temas que, acreditamos, deva ser bem explorado no ensino fundamental. No entanto, na maioria das vezes, ele é apresentado em forma de um enunciado e em algumas aplicações do tipo "calcular o x desconhecido", em que x representa a medida do segmento de reta entre paralelas. Isso ao final da oitava série, quando é feito, muito distanciado da sexta série, quando são trabalhados os temas razões, proporções e regra de três, sem nenhuma alusão geométrica ao dito teorema. Na sétima série, dificuldades com representações de números racionais na reta real são freqüentes, o que poderia ser resolvido com a utilização do teorema, explorando o uso da régua e do compasso, a discussão do comensurável e do incomensurável. Na maioria das vezes, o professor, ao representar o conjunto dos números racionais, demarca a "olho nu", sem utilizar nenhuma unidade de medida, números como 0, 1, ½, ¼, etc. Números racionais com denominadores diferentes de potências de 2, em geral, são omitidos, pela própria dificuldade de percebê-los visualmente. A interligação entre esses saberes não é feita e nem proporcionada discussão ao professor ou ao futuro professor, no caso dos cursos de formação de professores. Quando se fala na História da Matemática como recurso didático, em se tratando do tema, quando aparece, restringe-se à narração da origem de Tales de Mileto, à época e ao local onde viveu e a algumas contribuições, não dando idéia do grande feito que representou e representa para a matemática atual, haja vista a teoria dos números reais de Dedekind, que, em alguns aspectos, utiliza as idéias de Eudoxo, que prova o teorema, mesmo sem considerar os incomensuráveis, grande questão enfrentada pelos matemáticos. Tratamento do tema, com uma maior abrangência, não é feito na quase totalidade dos livros didáticos disponíveis ao professor.

O principal objetivo do artigo é a retomada do Teorema de Tales e seu emprego na representação de números racionais na reta real. Algumas ligações com alguns campos do conhecimento matemático também são abordadas, mostrando ser uma ferramenta poderosa e útil para a construção de conhecimento algébrico geométrico.

PARALELAS, TRANSVERSAIS E CONGRUÊNCIA DE SEGMENTOS.

Em geral, pouco se discutem a questão geométrica e a questão de medida. Ávila (1985) discute a questão da igualdade de razões entre grandezas, como, por exemplo,a razão $AB/CD=m/n$,em que AB e CD são segmentos de reta e não números, mas poderiam também ser outras grandezas. Essa igualdade expressa que existem números inteiros m e n, de modo que AB=mX e CD=nX, sendo X um segmento unitário que fica contido em AB m vezes e em CD, n vezes. Dito de outra forma, os segmentos AB e CD são comensuráveis, uma vez que a medida do segmento AB corresponde ao número m e a do segmento CD, ao número n. Essa abordagem torna clara a comparação de grandezas distintas, a saber, a geométrica, quando se estão utilizando segmentos e as medidas dos segmentos, traduzidas por números.

Na origem da discussão histórica, a definição acima precisava ser pensada para o caso de os segmentos AB e CD não serem comensuráveis, pois, nesse caso, a igualdade nAB = mCD jamais ocorreria. Eudoxo, segundo o mesmo autor citado, resolve o problema definindo a igualdade de duas razões entre grandezas, mesmo que elas sejam expressas por não comensuráveis. Essa idéia é posteriormente utilizada por Dedekind, em seus "cortes", para a construção dos números reais.

No que segue, vamos buscar a questão geométrica, em primeiro lugar. Observe-se que não se abordam questões de medidas, apenas o aspecto geométrico é que é considerado, deixando para um segundo estágio a questão das medidas dos segmentos.

Definição: Se uma transversal "t" intersecciona duas retas "r" e "s", respectivamente, nos pontos A e B, dizemos que "r" e "s" determinam o segmento de reta AB sobre a transversal(figura 1).

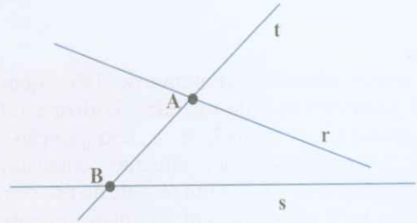


figura 1

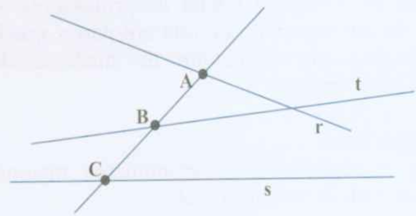


figura 2

Observamos que nessa definição não há alusão a nenhuma medida e, sim, à caracterização de um segmento de reta como objeto geométrico. Da mesma forma com o que segue. Se uma transversal intersecciona três retas "r", "t" e "s", respectivamente, nos pontos A, B e C, e se AB = BC, então diremos que as três retas determinam segmentos de reta congruentes sobre a transversal (figura 2).

Teorema: Se três paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, então determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Demonstração: Consideremos uma transversal "t" interseccionando as retas paralelas a,b e c nos pontos A,B e C, respectivamente, com AB = BC. Seja "s" uma outra reta transversal interseccionando essas retas nos pontos D, E e F, respectivamente. Mostraremos que DE = EF.

1º. Suponhamos A D e "s" não paralela a "t". Tomemos s_1 s, e passando por A, com intersecção B´ e C´ com as retas b e c, respectivamente (figura 3).

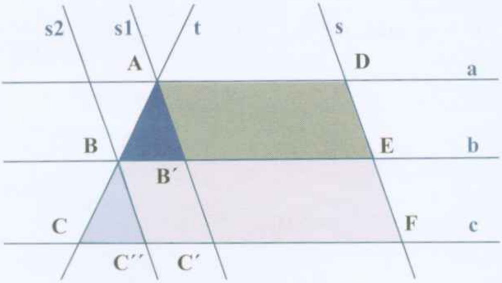


figura 3

Tomemos s_2 paralela a "s", passando por B, com intersecção C" com c. Com essa construção, temos os paralelogramos AB'ED e BC"FE. Decorre que são congruentes (mesma medida) os pares de segmentos AB'e DE, BC" e EF. Simbolicamente, AB' DE e BC" EF. (1). Por outro lado, são congruentes os triângulos ABB'e BCC", isto é, $\Delta ABB' \equiv \Delta BCC''$

$\widehat{ABB'} \equiv \widehat{BCC''}$; AB ≡ BC; $\widehat{BAB'} \equiv \widehat{CBC''}$, que é o caso clássico A.L.A. de congruência de triângulos, em que $\widehat{ABB'}$ denota o ângulo de vértice B.

Daí, AB' ≡ BC". Substituindo na equação (1), temos que DE ≡ EF.

2º. Suponhamos A = D, A, D "a" e "s" não paralela a "t". Tome s_1 s, passando por B, interseccionando c em C"(figura 4).

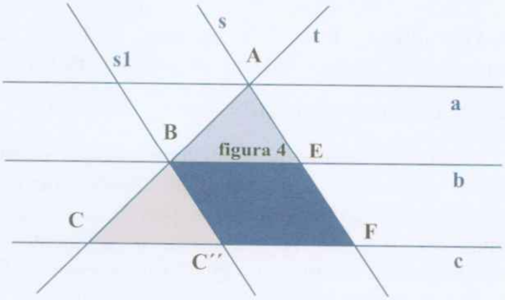


figura 4

BC"FE é um paralelogramo, logo BC" ≡ EF (2). Como ABE ≡ BCC" (caso A.L.A.), temos AE ≡ BC". Portanto, AE ≡ EF.

3º. Suponhamos A ≠ D, "s" "t". Considerando o paralelogramo ABED (figura 5), temos AB≡ ED (3).

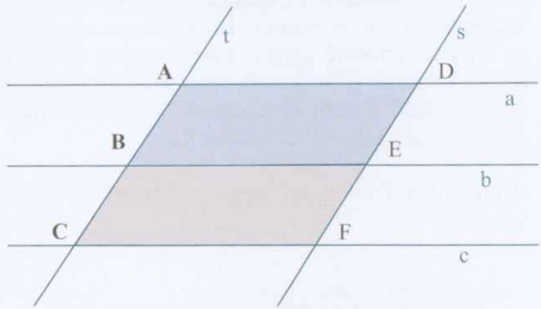


figura 5

Consideremos o paralelogramo BCFE na figura acima. Daí, BC ≡ EF (4).

Por hipótese, AB ≡ BC. Então de (3) e (4) e da transitividade da igualdade DE ≡ EF.

Corolário: Se três ou mais retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, então determinam segmentos congruentes em qualquer outra transversal.

DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM PARTES CONGRUENTES

Uma dificuldade no ensino de geometria é a falta de uso de instrumentos, como esquadro, compasso, régua e transferidor, os quais foram alijados da geometria, quando não conjuntamente com a mesma, nas nossas escolas. Um grande número de professores não utiliza tais instrumentos no quadro de sua sala de aula, alegando não terem habilidade para o manuseio dos mesmos enquanto explicam aos alunos o que estão fazendo. Em geral, fazem desenhos à mão livre, sem maior cuidado ou coerência com o que vão descrevendo. Deixam a cargo do aluno, de sua imaginação e criatividade internalizar o que estão dizendo, muitas vezes distante do que está sendo visualizado, como retas perpendiculares que não formam ângulo reto, paralelas que se aproximam, para citar alguns.

Obter uma divisão de um segmento em partes iguais tem se mostrado algo que tanto professores quanto alunos fazem a "olho nu", sem unidade de medida. O professor diz que os segmentos que ele representa, têm as mesmas medidas, no entanto, a representação, na maioria das vezes, deixa a desejar e visualmente se percebem grandes diferenças nos comprimentos de tais representações. Isso é observado, por exemplo, quando o professor, ao trabalhar com conjuntos numéricos, deseja fazer a representação na reta real de números reais, como dito antes.

Num primeiro momento, o problema 1, explorando a questão geométrica, mostrará como dividir um dado segmento em partes iguais, utilizando régua e compasso e, posteriormente, após construções com medidas, será mostrado o processo, bastante simples, de representação de números racionais na reta real, que é uma bela aplicação do Teorema de Tales.

Problema 1. Dividir um segmento AB em "n" partes iguais.

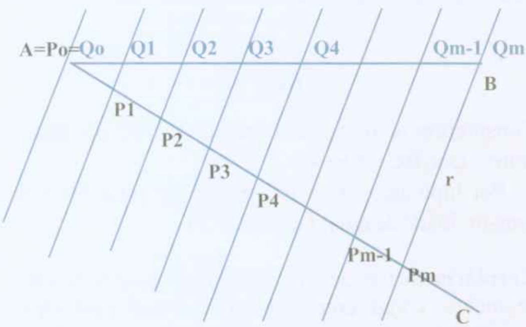


figura 6

Tracemos uma semi-reta AC (figura 6) distinta de AB. Tomemos os pontos P_0, P_1,..., P_m na semi-reta AC tal que

$P_0=A$, $P_0P_1 \cong P_1P_2$,...,$\cong P_{m-1}P_m$.

Seja "r" a reta P_mB.

Pelos pontos P_1, P_2,..., P_{m-1}, P_m, tracemos retas paralelas a r, obtendo os pontos Q_1, Q_2, ..., Q_{m-1} no segmento AB.

Pelo corolário anterior, temos

$AQ_1 \cong Q_1Q_2 \cong ... \cong Q_{m-1}Q_m$

Aqui o símbolo $\cong$ significa que os segmentos são de mesmo tamanho.

No problema 2, discutido a seguir, será feita uma importante aplicação no que diz respeito às medianas de um triângulo. Optamos pela discussão desse problema, útil em problemas reais, pois explora a questão dos segmentos congruentes determinados por transversais sobre paralelas.

Problema 2. As medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice dois terços da distância desse vértice ao ponto médio do lado oposto.

Consideremos o triângulo ABC (figura 7) e, nele, os pontos Ma, Mb e Mc como pontos médios de BC, de AC e de AB, respectivamente. Devemos mostrar que existe $P \in$ AMa, BMb, CMc e que

$AP = \frac{2}{3} AM_a$, $BP = \frac{2}{3} BM_b$, $CP = \frac{2}{3} CM_c$.

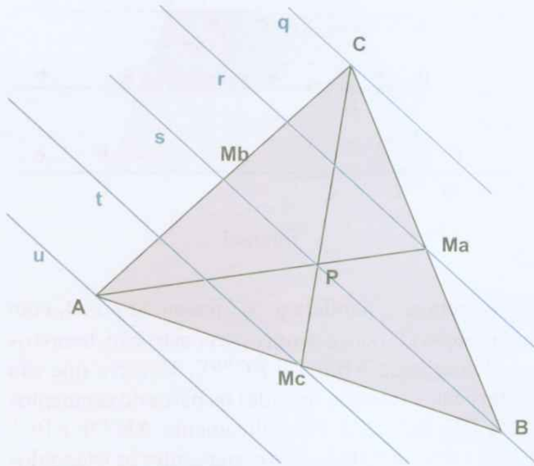


figura 7

Sejam r, s e t com s = BMb retas paralelas que dividem o lado AC em quatro segmentos congruentes. Consideremos u e q paralelas às anteriores, passando por A e C, respectivamente.

t divide AB em dois segmentos congruentes e, portanto, Mc $\in$ t.

t, s, r e q dividem a mediana CMc em três segmentos congruentes. Se P é o ponto de intersecção de BMb e CMc, temos $CP = \frac{2}{3} CM_c$.

De modo análogo em retas paralelas a AMa, mostramos que P' é ponto de intersecção das medianas CMc e AMa, sendo $CP' = \frac{2}{3} CMc$.

Por último, P = P'e as três medianas são concorrentes. Como AMa passa por P e BMb passa por P', concluímos que $AP = \frac{2}{3} AM_a$, $BP = \frac{2}{3} BM_b$.

O lema a seguir vai estabelecer relação entre o objeto geométrico e o aritmético. Intuitivamente, a existência de números inteiros parece ser simples, uma vez que se pode buscar o segmento de comprimento c tão pequeno quanto se necessite, a fim de que caiba um número de vezes exato em cada um dos segmentos dados. Por isso, sua demonstração é muito simples quando a razão é um número racional. Podemos notar que o lema passa a estabelecer relação entre números que expressam as medidas dos segmentos, caracterizando razão entre duas grandezas, e, a partir dele, podemos refletir sobre proporcionalidade.

Lema: Dados dois segmentos AB e CD, temos que $\frac{AB}{CD}=\frac{n}{m}$ em que m e n são números inteiros positivos se, e somente se, existe um segmento de comprimento c tal que AB=nc e CD=mc.

Demonstração

Sejam dados os segmentos AB e CD (figura 8) tais que AB=nc e CD=mc, de modo que $\frac{AB}{CD}=\frac{n}{m}$.

Sejam $P_0 = A, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n = B$. pontos em AB tais que $P_0P_1 \cong P_1P_2 \cong ... \cong P_{n-1}P_n$ com comprimentos "c".

Então, $\frac{AB}{CD}=\frac{n}{m}=\frac{n.c}{m.c}$. Como por construção AB = n.c, segue que CD = m.c. A recíproca é imediata.

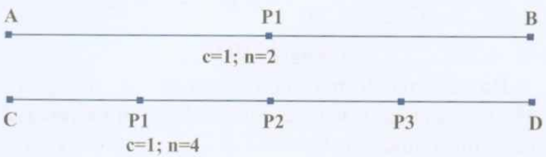


Figura 8

Observação: Quando $\frac{AB}{CD}$ é um número irracional, a situação acima não ocorre. No teorema a seguir, serão discutidas as duas situações: de a razão ser racional e de a razão ser irracional.

A questão da proporcionalidade:

O teorema abaixo aparece com freqüência como sendo o Teorema de Tales; no entanto, mais especificamente, é denominado Teorema Fundamental da Proporcionalidade, tendo como conseqüência imediata o primeiro. A demonstração do Teorema de Tales é essencialmente a mesma do teorema abaixo. A forma geométrica que mais aparece na literatura é que no Teorema de Tales as transversais não se encontram no limite da visão do leitor, não formando ali triângulos. Isso, muitas vezes, confunde tanto aluno quanto professor nas aplicações a triângulos.

Se duas retas são transversais a um conjunto de retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes da outra. (Teorema de Tales)

Teorema: Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

Demonstração

Seja o triângulo ABC (figura 9) e r uma reta paralela ao lado BC, a qual intercepta AC em D e AC em E. Devemos provar que $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

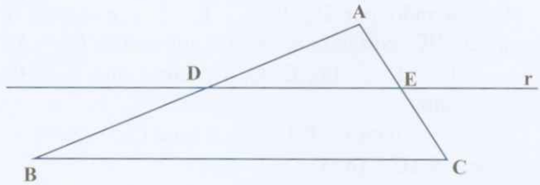


figura 9

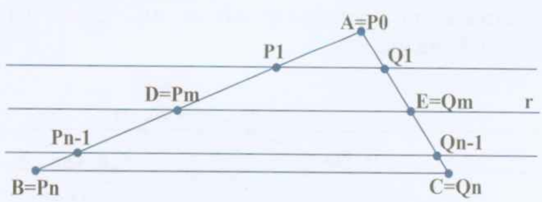
1ª situação: Consideremos $\frac{AB}{AD}$ sendo um número racional, isto é, existem inteiros positivos m e n tais que $\frac{AB}{AD}=\frac{n}{m}$. Pelo lema anterior, existe um segmento de comprimento "ε" tal que AD = m. ε e AB = n. ε e ainda mais vale m < ε.

Tome na semi-reta AB (figura 10) os pontos P_0, $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n-1}$ e trace paralelas a BC por $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n-1}$. Tais paralelas cortam AC em $Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}$. $\exists\, \square > 0$ satisfazendo

$$Q_iQ_{i+1} = \square \text{para } i = 0,1,2,3,...,n-1 \text{ com } Q_0 = A; ...; Q_m = E; ...; Q_n = C.$$

Portanto,

$$\frac{AC}{AE}=\frac{n.\square}{m.\square}=\frac{n}{m}=\frac{n.\square}{m\,\square}=\frac{AB}{AD}$$



(figura 10)

ou seja, a reta r corta os lados AB e AC, respectivamente, em D e E, determinando razões correspondentes, em cada lado, iguais.

2ª situação: consideremos $\frac{AB}{AD}$ sendo um número irracional.

Seja m um número inteiro positivo. Na semi-reta AB, tomemos os pontos P_0=A; P_1;... ; P_m = D; ...; P_n; B, P_{n+1} tais que P_iP_{i+1} = , i = 0,1,2,...,n. Daí, AD = m. para algum . Além disso, n. < AB < (n+1).

Temos $\frac{n}{m} < \frac{AB}{AD} < \frac{n+1}{m}$ (1)

Conduzindo por P_0, P_1, ..., P_n, P_{n+1} paralelas à semi-reta BC, cortando a reta AC nos pontos Q_0 = A, Q_1, ..., Q_m = E, ..., Q_n, C, Q_{n+1} , temos que ∃ > 0, satisfazendo

Q_iQ_{i+1} = para i = 0,1,2,3,...,n com Q_0 = A; AE = m. e n. < AC < (n+1). .

Portanto, $\frac{n}{m} < \frac{AC}{AE} < \frac{n+1}{m}$ (2)

De (1) e (2) vem que

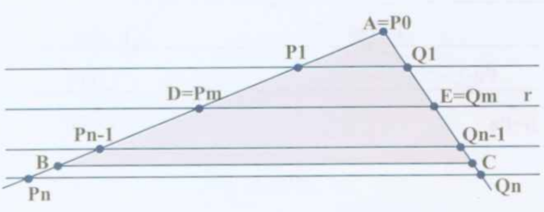
$$0 < \left|\frac{AB}{AD} \square \frac{AC}{AE}\right| < \frac{n+1}{m} \square \frac{n}{m} = \frac{1}{m}.$$

Como a desigualdade vale para m, que é número inteiro positivo qualquer, segue que

$$0 < \frac{AB}{AD} \square \frac{AC}{AE} < 0 \Leftrightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

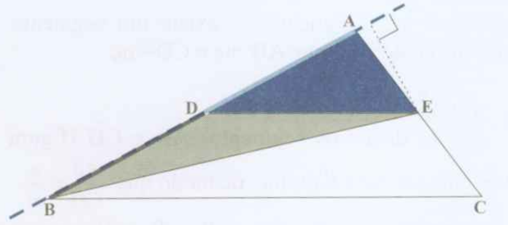
Assim, da igualdade das duas razões entre os segmentos e da hipótese de que a razão $\frac{AB}{AD}$ é irracional, segue imediatamente que a razão $\frac{AC}{AE}$ também é irracional.

Ao analisarmos a segunda situação, devemos considerar, na figura 10 acima, os pontos P_n e Q_n não mais coincidentes com B e C, respectivamente, mas exteriores aos segmentos AB e AC, como na ilustração abaixo.



Observação: Uma outra prova interessante deste teorema utiliza a equivalência de áreas (REZENDE 2000, p.185) e pode ser uma atividade a ser realizada.

Consideremos a figura 10, anterior, e nela marquemos os triângulos ADE com base AD e BDE com base BD, como indicado abaixo.



As duas bases se encontram sobre a mesma reta comum, r, e como o vértice E é comum aos dois triângulos, a altura EF é comum aos dois. Assim, a razão entre as medidas das áreas dos dois é a mesma razão entre as das bases, isto é,

$\frac{área\square BDE}{área\square ADE} = \frac{BD}{AD}$, em que □BDE significa triângulo BDE.

Da mesma forma, considerando os triângulos AED e CED, com vértice comum D, a altura relativa à reta que contém os lados AE e CE é comum. Assim,

$$\frac{área\square CDE}{área\square ADE} = \frac{CE}{AE}.$$

Por outro lado, os triângulos BDE e CDE têm um lado comum DE e o lado BC é paralelo a este, logo a altura relativa a esse lado é a mesma. Assim, $área\square BDE = área\square CDE$. Portanto,

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE},$$

ou, ainda,

$\frac{BD+AD}{AD} = \frac{CE+AE}{AE}$ e, finalmente, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO RACIONAL NA RETA REAL.

O problema 1, anterior, à primeira vista, parece ser o mesmo problema que iremos apresentar a partir de agora; entretanto, uma diferença consubstancial existe entre as duas situações. Observamos, de imediato, que, na resolução do primeiro problema, levamos em consideração apenas o aspecto geométrico, ou seja, para sua resolução não tratamos com medidas ou questionamos quanto à racionalidade ou não dos segmentos envolvidos.

No que segue, vamos considerar as medidas dos segmentos, uma vez que vamos buscar a representação na reta real e assim estabelecer uma correspondência entre os objetos geométricos (segmentos de reta) e os numéricos (medidas dos segmentos de reta).

As representações dos números racionais, como exemplos, feitas abaixo, utilizam o Teorema de Tales como justificativa e exploram o uso de instrumentos geométricos que visam desenvolver no aluno dois aspectos que consideramos serem relevantes: primeiro, fundamentar com a teoria matemática os procedimentos, dando ao professor subsídios para os tão freqüentes questionamentos dos alunos "para que serve isso?" ou "onde vou utilizar isso?"; e, segundo, utilizar instrumentos de uso comum para a geometria, a fim de desenvolver clareza e precisão nas representações e, conseqüentemente, na formação dos conceitos geométricos.

1ª situação: Consideremos um número racional positivo, por exemplo 2/5, e o representemos na reta real.

Tomemos O para origem da reta real e A, tal que o segmento OA corresponda à unidade de medida ou ao número inteiro 1 (figura 11).

Por O conduzimos uma semi-reta OB formando um ângulo qualquer com OA. Considerando O como origem na semi-reta OB, escolhemos uma unidade de medida u, marcando sobre OB os pontos $P_0 = O$, P_1, $P_2,\ldots, P_5 = B$. Foram considerados cinco pontos em função de que o denominador do número racional a representar é cinco. No caso de ser um outro número n, devemos considerar n pontos e tais que $P_n = B$.

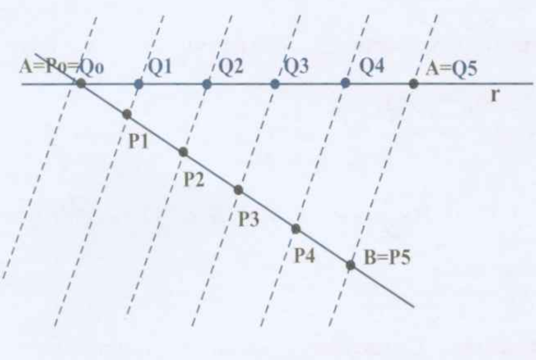


figura 11

Conduzimos por $P_5 = B$ uma reta t passando por A. (ou, no caso geral, $P_n = B$).

Por $P_0, P_1, P_2,\ldots, P_5$ (P_n), conduzimos paralelas a t, determinando em r os pontos $O = Q_0, Q_1, Q_2,\ldots, Q_5 = A$. (ou, no caso geral, $Q_n = A$).

Do Teorema de Tales vem que

$$\frac{\overline{OQ_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OP_2}} = \frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OP_3}} = \frac{\overline{OQ_4}}{\overline{OP_4}} = \frac{\overline{OQ_5}}{\overline{OP_5}}.$$

Segue que

$$\frac{\overline{OQ_1}}{1} = \frac{\overline{OQ_5}}{\overline{OP_5}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \overline{OQ_1} = \frac{1}{5}\ ; \quad \frac{\overline{OQ_2}}{2} = \frac{\overline{OQ_5}}{\overline{OP_5}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \overline{OQ_2} = \frac{2}{5}\ ;$$

$$\frac{\overline{OQ_3}}{3} = \frac{\overline{OQ_5}}{\overline{OP_5}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \overline{OQ_3} = \frac{3}{5}\ ; \quad \frac{\overline{OQ_4}}{4} = \frac{\overline{OQ_5}}{\overline{OP_5}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \overline{OQ_4} = \frac{4}{5}$$

Um ponto importante a destacar nesse procedimento é a consideração do segmento unitário $AO = OQ_5$ (ou OQ_n no caso geral).

2ª situação: Consideremos um número racional negativo, por exemplo -2/5, e o representemos na reta real.

Nesse caso, representamos o número real 2/5 e usamos o compasso para transferir para o sentido negativo, à esquerda de O. Essa situação é importante na medida em que permite explorar a simetria de números na reta em associação à simetria pontual que é obtida com o uso do compasso.

3ª situação: Representemos o número real 7/5 na reta real.

Essa situação amplia as anteriores, uma vez que naquelas usávamos frações próprias, enquanto aqui a fração é imprópria. Alguns estudantes, num primeiro momento, podem tentar colocar sete pontos na reta OB, em lugar de cinco. É importante, aqui, discutir sobre o que aconteceria se assim o fizessem. Buscar a compreensão de uma provável representação do número 7/5 na reta real, o qual deverá estar localizado à direita do ponto A que dista uma unidade de O.

Usamos o mesmo procedimento anterior. No entanto, os pontos P_6 e P_7 ficam além do ponto B, considerando a figura acima. As paralelas, passando por P_6 e P_7, interseccionam a reta r à direita de A e, assim, os pontos Q_6 e Q_7 ficam também à direita de A, mostrando que correspondem a números reais maiores do que 1. (figura 12)

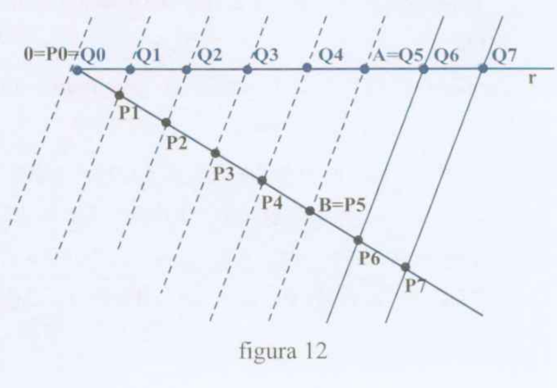


figura 12

artigo

Consideramos importante que o professor, além de utilizar instrumentos para construções geométricas, possa construir e representar números na reta real, estabelecendo correspondência bijetora entre os dois conjuntos: a reta como ente geométrico ou conjunto de pontos e o de números, facilitando a compreensão da existência de um único ponto da reta correspondente a um número real, e vice-versa. Isso permitirá ao aluno perceber: a possibilidade de visualizar outros números além dos inteiros, racionais e irracionais; a existência de outro número entre dois quaisquer; a existência de aproximação de um número por outro menor ou maior, tanto quanto se deseje. Estes são conceitos não comuns em alunos que concluem o ensino médio e ingressam nos cursos de cálculo.

Outras possibilidades de aplicação do Teorema de Tales ainda poderiam ser exploradas, como, por exemplo, as razões e proporções e as regras de três, que continuam ainda sendo ensinadas de forma bastante conservadora e sem ligação com o Teorema.

Conclusão

Segundo Guedj (2003), o filósofo Tales foi considerado um dos Sete Sábios da Grécia e o primeiro a enunciar resultados gerais relativos a objetos matemáticos. O Teorema de Tales, também denominado Teorema das Proporções, está diretamente ligado às questões relativas a semelhanças e, conseqüentemente, a formas. Diz ainda que "todas as figuras semelhantes têm a mesma forma"ou, ainda, que "a forma é o que se conserva quando guardamos as proporções e mudamos as dimensões" (GUEDJ, 2003, p. 46).

Na história da geometria grega, no período de Platão, eram estudadas a aritmética, a geometria, a astronomia e a música, a fim de entender as leis do universo. Segundo Struik (1997), o nome de Eudoxo está diretamente ligado à teoria das proporções, sendo esta denominada no livro quinto de Euclides como "método da exaustão".

Uma questão bem pouco discutida, ao se ensinar o Teorema, é a questão do comensurável e do incomensurável, isto é, o tratamento do racional e do irracional no Teorema. Além disso, não é feita, na maioria das vezes, a distinção entre o aspecto geométrico e o das medidas.

Referências Bibliográficas

ÁVILA, Geraldo. Grandezas incomensuráveis e números irracionais . In **Revista do Professor de Matemática,** vol. 5, SBM, 1984. p.6-11.

________________ Eudoxo, Dedekind, números reais e o ensino de matemática . In **Revista do Professor de Matemática,** vol. 7, SBM, 1985. p.5-10.

________________ Razões, proporções e regra de três . In **Revista do Professor de Matemática,** vol. 8, SBM, 1986. p.1-8.

BRASIL. **Revista Nova Escola**. ed. agosto 2002. p.20

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** Brasília: SEF /MEC, 1997.

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**: **um thriller da história da matemática**. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

MORIN, Edgar. In Nova Escola, ed. agosto 2002. p. 20.

REZENDE, Eliane Q.F.; QUEIROZ, Maria Lúcia B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas.** Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2000.

STRUIK, Dirk. **História concisa das matemáticas**. 3.ed. Lisboa: Editora Gradiva, 1997.