REDESCOBRINDO RELAÇÕES ENTRE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL POR MEIO DE PARADOXOS MATEMÁTICOS

Tífani T. Gonçalez[1]
Paula de O. Baladão[2]

Resumo: A meta deste trabalho é desenvolver o pensamento geométrico; em particular, correlacionar elementos planos e espaciais. Também auxilia o professor na busca constante por atividades criativas que tornem mais interessante o aprendizado da matemática.

Palavras-chave: Faixa de Möebius; Teorema das Quatro Cores; Geometria; Relação de Euler.

INTRODUÇÃO

As chamadas Recreações Matemáticas auxiliam a tarefa diária de tornar o ensino matemático mais atraente e significativo aos alunos. Dentre essas recreações, destacamos duas: o desafio de pintar qualquer mapa com apenas 4 cores diferentes e a paradoxal faixa de Möebius. À primeira vista, parecem atividades completamente diferentes e apenas recreativas, entretanto estão relacionadas de forma bastante simples, traçando um elo entre a Geometria plana e a espacial. Explicitaremos algumas atividades, a seguir, com esse intuito.

Atividade 1: Teorema das quatro cores

Um globo possui a forma de uma esfera, tem um lado de dentro e um lado de fora, também chamados de *Região Interior* e *Exterior*; o que separa esses dois lados é o que chamamos de Crosta Terrestre. A Crosta Terrestre também recebe outro nome por separar a região que está dentro do globo da que está fora, a qual é chamada de *Fronteira.* Se tomarmos o mapa do Brasil, temos mais exemplos disso. Nosso país tem fronteiras com a Bolívia, o Peru, a Argentina, o Uruguai, o Equador, a Venezuela, o Suriname, a Guiana e a Guiana Francesa. O estado do Rio Grande do Sul faz fronteira com o estado de Santa Catarina, com a Argentina e o Uruguai. No caso dos estados e países, essa fronteira é uma linha imaginária que separa as regiões.

Na aula de Geografia, é costume pintar o mapa do Brasil com diferentes cores para as regiões brasileiras, mas podemos surpreender as crianças ao perguntar:

"Qual o número mínimo de cores que podemos usar para pintar um mapa, sem que duas regiões vizinhas estejam pintadas com a mesma cor?"

Essa questão surgiu em Outubro de 1852 e seria de autoria de Francis Guthrie, a quem o problema ocorrera quando coloria o mapa da Inglaterra. Ficou conhecido como o *Problema das Quatro Cores*, pois descobriu que são necessárias no mínimo quatro cores para se colorir um mapa. Experimente no mapa abaixo, por exemplo.

Este teorema foi demonstrado, pela primeira vez, por Appel e Haken

Figura - Mapa do Brasil

em 1976, utilizando um computador. Em 1994, foi produzida uma prova simplificada, mas continua sendo impossível demonstrar o teorema sem recorrer a tal tecnologia. Veja o enunciado deste teorema.

Teorema das Quatro Cores: *Dado um mapa em um plano dividido em regiões, é possível colorir o mapa utilizando apenas quatro cores, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.*

Deve-se lembrar que as regiões que só se tocam em um ponto também são consideradas vizinhas.

Vamos descobrir mais sobre este teorema? Sugerimos uma atividade do tipo problema aberto,

Faculdade de Educação da UFRGS. tifani.goncalez@gmail.com.
UFRGS. paulabaladao@yahoo.com.br.

em que desafiamos o aluno a comprovar o que está sendo discutido. Tente pintar a figura abaixo com apenas 4 cores, de forma que regiões vizinhas não tenham a mesma cor.

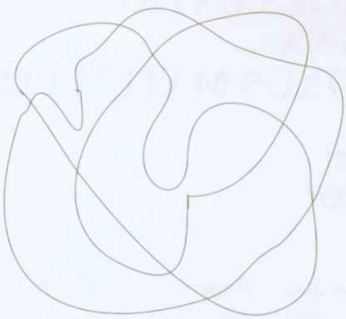

Figura 2 - Mapa de regiões

Vamos investigar como os matemáticos fazem para descobrir as "fórmulas matemáticas". Um matemático faz suas descobertas partindo de definições para só então começar a raciocinar; por isso vamos olhar nosso mapa. O que temos aqui? Se você só viu um monte de riscos, olhe novamente. Para começar, temos regiões vizinhas que devem ser pintadas com cores diferentes; temos linhas (que chamaremos de segmentos); e temos pontos em que essas linhas se cruzam. Para que não haja nenhuma confusão, definimos segmento – que pode ser linha reta ou curva – como aquela linha que liga quaisquer dois pontos de intersecção.

Tomando região por região do mapa, tente montar uma tabela que contenha o número de regiões, segmentos e pontos de intersecção do conjunto de regiões que você pegar do mapa colorido.

Pontos	Regiões	Segmentos
	2 (1 interna e 1 externas)	
	3 (1 interna e 2 externas)	
	4 (1 interna e 3 externas)	
	5 (1 interna e 4 externas)	

Tabela 1: Tabela Comparativa das Regiões de um Mapa

Para essa tarefa, vamos separar uma fronteira da fig.2 que contenha 2 regiões, ou seja, uma região interior e uma região exterior (tudo o que não for a região tomada). Para analisar quantos pontos de interseção temos, devemos observar onde dois segmentos de regiões vizinhas se encontram. Pode-se observar que, nesse caso, não há o encontro de segmentos, ou seja, não temos pontos de interseção. Logo obtemos

0	2	0

Façamos a mesma análise, mas agora tomando 2 regiões internas, ou seja, 3 regiões, onde uma é externa e as outras duas são internas. Dessa forma, é preciso um segmento para separar as duas regiões vizinhas; portanto temos dois pontos de intersecção, conforme a figura. Note, entretanto, que, apesar de afirmarmos que é necessário um segmento para separar as regiões vizinhas, também se faz preciso um segmento para separar a região 1 da região externa. De igual modo, necessita-se de um segmento para separar a região 2 da região externa, como mostrado na figura 3a. Com isso, soma-se um total de 3 segmentos.

Figura 3a - Representação de 3 regiões

Escrevemos em nossa tabela:

2	3	3

Pegando três regiões internas, obtemos 4 regiões no total (3 regiões internas e 1 externa). Para separar essas 3 regiões internas vizinhas são precisos 4 pontos de intersecção no total. Entretanto, não são apenas 2 os segmentos, pois devemos lembrar que são necessários: um segmento para separar a região da região externa; dois segmentos para separar a região 2 da região externa; e, finalmente, mais um segmento para separar a região 3 da região exterior. Temos, então, ao todo, 6 segmentos, conforme está sendo mostrado na figura 3b.

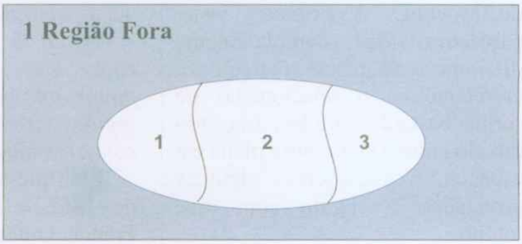

Figura 3b - Representação de 4 regiões

Na tabela teremos:

4	4	6

Continue o processo de tomar regiões vizinhas a fim de completar a tabela proposta. Lembre-se de que os resultados obtidos não se alteram se tomarmos outras fronteiras mais complexas. Aqui tomamos fronteiras simples a título de um bom entendimento da atividade. Os resultados continuam válidos para quaisquer fronteiras.

Após a análise com diversos números de regiões, você deverá obter:

Pontos	Regiões	Segmentos
0	2 (1 interna e 1 externas)	0
2	3 (1 interna e 2 externas)	3
4	4 (1 interna e 3 externas)	6
6	5 (1 interna e 4 externas)	9

Tabela 2: Tabela Final

Nesse momento, podemos mais uma vez instigar a investigação dos alunos acerca de fórmulas matemáticas. Questione-os, por exemplo, sobre se é possível *descobrir* uma só fórmula que seja perfeitamente adequada a todas as linhas da tabela acima, ou seja:

"Usando apenas as quatro operações fundamentais, é possível descobrir uma fórmula matemática que contemple todas as linhas da tabela acima?"

Deve-se perceber que estamos nos referindo à relação:

Pontos + Regiões – Segmentos = 2

Mas ainda persiste uma dúvida: essa relação é válida para qualquer figura? Você verá que a resposta é *sim*. Vamos verificar. Pegue, por exemplo, uma planificação de um sólido e uma tabela, como a anterior. Aqui, por simplicidade, tomamos a planificação de um tetraedro, mas convém salientar que se pode tomar uma planificação mais complexa, se desejar.

Tomando apenas uma face do tetraedro, repetimos o processo visto anteriormente para a primeira linha da Tabela 1. Pelo fato de estar tomando apenas uma região (face) do sólido, não existem segmentos nem pontos de intersecção entre duas regiões vizinhas. Preencha a primeira linha da tabela 1 da seguinte forma:

0	**2**	**0**

Tomando agora duas regiões/faces do ente geométrico, obtêm-se 3 regiões: duas internas, ou pertencentes ao tetraedro, e uma externa. Examinando a fronteira comum às duas regiões vizinhas, vê-se que são necessários 2 pontos para traçar a aresta. Entretanto, o número de segmentos são 3, pois recordamos que, apesar dos cantos de cada face tomada ser o encontro entre dois segmentos de reta, poderíamos ter uma curva; logo não se enquadra no que definimos como segmento – linha reta ou curva que une dois pontos de intersecção, conforme exposto na figura 4.

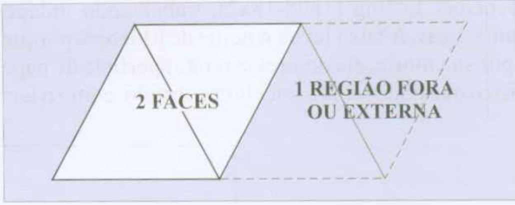

Figura 4 - Representação de duas faces tomadas

Assim, a próxima linha da tabela é:

2	3	3

Continue o processo mostrado acima pegando uma a uma todas as regiões do sólido. Como resultado, você obtém novamente as linhas da tabela 1. Por que se deu isso? Isso ocorreu porque, independentemente da planificação ou da figura tomada, essa relação é sempre válida. Logo, sempre será possível obter a relação matemática acima.

A relação que encontramos é válida para um corpo no espaço ou é só no plano? Para isso, vamos recortar a planificação do tetraedro acima e montá-lo no espaço. É possível observar que existe equivalência entre os entes do espaço e do plano, ou seja:

Pontos de intersecção = vértices
Regiões = faces
Segmentos = arestas

Quando vincamos e formamos o sólido geométrico, a relação pode ser reescrita em notação de entes espaciais, a saber:

Vértices – Faces + Arestas = 2

Essa relação é conhecida como *Relação de Euler no Espaço* R^3. Com essa atividade, mostramos que não existem apenas relações que são válidas no espaço e outras no plano, e sim que, em geral, elas recebem outro nome quando mudam de dimensão.

Após redescobrirmos a relação de Euler, a definição de fronteira e região, pode-se estimular o pensamento do aluno com uma atividade sobre um famoso paradoxo.

Atividade 2: Faixa de Möebius

A maior parte dos objetos que encontramos em nossa vida tem dois ou mais lados, conforme notamos anteriormente. Uma folha de papel, apesar de sua pequena espessura, tem dois lados. O globo terrestre

tem uma superfície esférica interna e outra externa, ou seja, dois lados. Uma sala está contida dentro de quatro paredes, um teto e um chão, possuindo, portanto, seis superfícies que a delimitam.
Será sempre assim? Você consegue pensar em algo que tenha um só lado?

Dois matemáticos alemães conseguiram. Em 1858, Auguste Ferdinand Moëbius (1790-1868) e Johann Benedict Listing (1808-1882), trabalhando independentemente, descobriram uma faixa com propriedades fantásticas. A faixa levou o nome de Möebius porque este publicou primeiro sua descoberta. No artigo, lançado após sua morte, ele descrevia uma superfície de papel como uma fita, com um só lado. Tratava-se de um objeto físico que pode ser facilmente construído, como o faremos agora, de acordo com a figura 5.

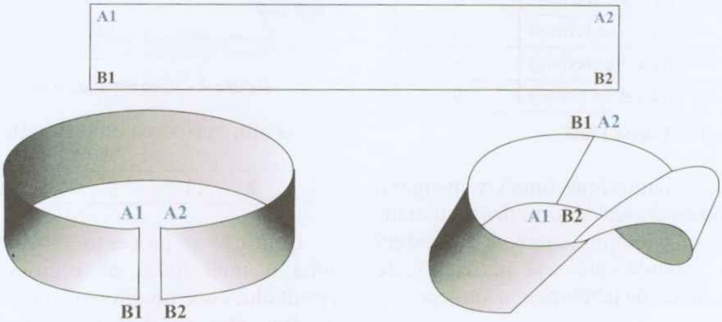

Figura 5 - Fita Comum e Fita de Möebius

1. Primeiro recorte uma tira de papel com uma largura considerável;
2. Com lápis, escreva A1, A2, B2, B1 nos cantos do papel, conforme a figura 5.
3. Faça uma torção de 180° em uma das extremidades do papel e cole as extremidades A1 com B2 e B1 com A2, conforme a figura 5.

Observe essa faixa obtida. Quantos lados ela possui? Para descobrir, marque um ponto inicial em qualquer lugar da faixa, em seguida pegue um lápis e, sem levantá-lo, percorra a faixa ao longo do seu comprimento. O que acontece é que chegamos ao ponto inicial e, incrivelmente, toda a faixa foi percorrida, como se pode verificar facilmente ao olhar o risco do lápis ao longo do seu comprimento. Isso não acontece numa faixa comum de papel - que tem dois lados.

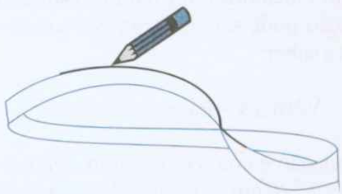

Figura 6 - Contornando a borda da faixa de Möebius

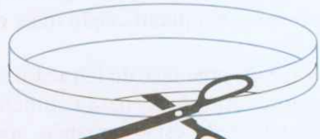

Figura 7 - Corte longitudinal

Outra propriedade interessante: a faixa de Möebius possui apenas uma borda. Para verificar isso, contorne a borda com canetinha, como na figura 6.

A Faixa de Möebius é realmente fantástica, pois contém muitos paradoxos. Veja: recorte longitudinalmente a faixa *'**ao meio**'* e observe o que acontece. A faixa se transforma numa faixa *'**duas vezes mais longa**'* que a banda original, comportando quatro semitorções. Reproduzindo o procedimento anterior para averiguação do número de lados, ou seja, marcando um ponto inicial em qualquer parte da faixa e percorrendo-a longitudinalmente, descobre-se que essa tira de papel voltou a ter dois lados e duas margens. A única diferença dessa fita para uma faixa circular convencional consiste em que sua forma, agora, é semelhante a um "8". Veja a seguir outra característica dessa faixa:

"Para criar uma banda de Möebius, o número de semitorções deve ser ímpar."

Figura 8 - Faixa de Möebius após o primeiro e o segundo corte longitudinal respectivamente

Para confirmarmos essa afirmação, devemos recortar mais uma vez a faixa ao meio e no sentido longitudinal. O que aconteceu dessa vez? Obtém-se não uma, mas duas faixas! Entretanto, nenhuma delas é de Möebius. Verifique.

Se você obteve uma faixa de Möebius, há outro fato desse paradoxo a ser notado: conforme o local em que se recorta, o resultado é diferente. Se a faixa for cortada, longitudinalmente, ao meio, obtém-se um resultado; se o corte for diferente de 1/2 da largura, obtemos outro resultado. Isso implica que não só o corte e o comprimento da nova faixa estão relacionados, mas também as características que serão obtidas estão diretamente relacionadas com o processo.

O recorte no meio da faixa causará o efeito multiplicativo da mesma, porém tornando faixas convencionais, sem as características de Möebius. Agora procure fazer a mesma experiência, mas, dessa vez, cortando longitudinalmente com uma largura de 1/3 do total da faixa. O que mudou? A faixa intercambia entre a Faixa de Möebius e a faixa convencional.

Após repetir o procedimento dos cortes longitudinais a 1/3 da largura várias vezes, veja se é possível conjecturar alguma "fórmula" com base nas propriedades vistas. Essa atividade tende a instigar a curiosidade e aguçar o pensamento lógico-dedutivo dos alunos.

Em suma, podemos concluir que a Faixa de Möebius possui, em seu primeiro momento: uma só superfície; uma só margem; número ímpar de semitorções; cortes longitudinais diferentes de ½ de sua largura (ou seja, a Faixa de Möebius aparece desde que **não** façamos um corte longitudinal na metade da faixa).

Embora essa fita pareça meramente recreativa, a propriedade de possuir um só lado tem aplicação prática na engenharia, na matemática e em outras. A Faixa de Möebius é muito utilizada pelos engenheiros, por exemplo, para aumentar a duração das correias de transmissão. De fato, uma correia comum - com dois lados - terá desgaste desigual. Com uma "correia" de Möebius, o desgaste se dá de forma mais equilibrada.

Considerações Finais

As atividades apresentadas neste trabalho foram aplicadas a estudantes do ensino fundamental, a professores da rede municipal e estadual de Porto Alegre, e também a estudantes da Faculdade de Educação da UFRGS, dos cursos de Matemática e Pedagogia. Nas diversas situações, todos se surpreenderam com os resultados. Havia professores que não conheciam o processo de 'recorte' da Faixa de Möebius, pois geralmente a faixa é apresentada sem o corte longitudinal, e raros são os livros que se aprofundam nesse assunto. Quanto às crianças, esperavam fazer cálculos, mas ficaram ainda mais admiradas de ver a "mágica" diante de seus olhos e *sem números*! Muitos se motivaram a conhecer mais sobre Matemática.

Procuramos continuar as pesquisas sobre atividades complementares ao ensino matemático, pois acreditamos que esse tipo de procedimento possa trazer o estímulo do pensar matemático.

Referências Bibliográficas

GRANON-LAFONT, Jeanne. **A Topologia de Lacan,** p.25-40, p.60-63, p.107-112. Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro. 1998.

NORTHROP, Eugéne P. **Fantasies et Paradoxes Mathématiques,** p.69-76. Paris, 1961.

BOLT, Brian. **Actividades Matemáticas,** p.38-41. Ed. Gradiva. Lisboa. 1991.

STEWART, Ian. **Jogos, Conjuntos e Matemática: Enigmas e Mistérios,** p.199-202. Ed Gradiva. Lisboa. 1991