

APREENSÕES FIGURAIS MOBILIZADAS POR ALUNOS DO OITAVO ANO AO ESTUDAR ÁREA COM MATERIAIS MANIPULATIVOS

Figural apprehensions mobilized by 8th grade students when studying area with manipulable materials

Antônio Alexandre Aparecido da Silva

Angelica da Fontoura Garcia Silva

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Resumo

Objetiva-se analisar as diferentes abordagens de 23 alunos do oitavo ano ao resolverem um problema geométrico, considerando o papel das apreensões figurais propostas por Duval mobilizadas na resolução. Para tal, durante 3 sessões de estudo, foram observadas as estratégias e comentários dos participantes. O estudo fundamenta-se nas teorias de Duval e em pesquisas sobre apreensões figurais potencializadas pelo uso de materiais manipulativos na resolução de problemas de Geometria. Os resultados destacam o desenvolvimento do potencial heurístico na exploração das figuras, evidenciando uma variedade de abordagens dos estudantes. Emergem como elementos essenciais as apreensões perceptivas, discursivas, sequenciais e operatórias propostas por Duval. A integração de materiais manipulativos facilitou a compreensão e o desenvolvimento das apreensões, promovendo o engajamento e a criatividade dos participantes. No entanto, identifica-se desafios, como a dificuldade de alguns alunos em compreender o enunciado do problema e em aplicar corretamente os conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Problema geométrico; Apreensões figurais; Materiais manipulativos.

Abstract

The aim is to analyze the different approaches taken by 23 8th grade students when solving a geometric problem, considering the role of figural apprehensions proposed by Duval mobilized in solving process. Accordingly, the participants' strategies and comments were observed during three study sessions. The study is based on Duval's theories and on research into

figural apprehensions enhanced by using manipulative materials in solving geometry problems. The results highlight the development of heuristic potential in figures' scope, showing a variety of approaches by the students. The perceptual, discursive, sequential, and operative apprehensions proposed by Duval emerge as essential elements. The integration of manipulative materials enables the understanding and development of these apprehensions, promoting the participants' engagement and creativity. However, challenges were identified, such as the difficulty some students had in understanding the problem statement and correctly applying the mathematical concepts.

Keywords: Geometric problem; Figural apprehension; Manipulative materials.

Introdução

O papel da figura é, quase sempre, essencial na resolução de problemas geométricos, oferecendo diversas possibilidades de análise e estratégias para sua solução. Uma figura pode ser manipulada de várias maneiras, desde ampliações, reduções e movimentos até a subdivisão em partes menores para estudo individual ou a recombinação para criar figuras com propriedades semelhantes à original, como, por exemplo, a preservação da área.

O fracionamento da figura exemplifica uma das operações de modificações figurais estudadas por Raymond Duval, renomado pesquisador francês no campo da semiótica matemática. Duval (1994) destaca e apresenta uma

proposta para a análise da complexidade do trabalho com a visualização, manipulação e exploração de uma figura durante a resolução de problemas, enfatizando que a interpretação pode variar de acordo com fatores internos e externos, como sua estrutura e as habilidades perceptivas do estudante. Em uma série de estudos (Duval, 1994, 1995, 2006, 2012, 2018), são evidenciadas as potencialidades de apreensões figurais provocadas por uma figura na resolução de problemas e identificados os obstáculos que podem surgir durante esse processo.

Este artigo se baseia na análise dos dados coletados na tese de Silva (2023). Busca responder à seguinte questão: quais são as estratégias e apreensões figurais mobilizadas pelos estudantes participantes de sessões de resolução de problemas geométricos utilizando uma figura?

Os registros dos dados na forma de protocolos de resolução elaborados pelos estudantes referentes a uma das sessões de estudo da pesquisa nos darão elementos para embasar a análise a ser aqui apresentada. A seguir aprofundaremos questões pertinentes

à base teórica utilizada nesta investigação, procedimentos metodológicos, análise dos dados e conclusões decorrentes dessa análise

Investigações que fundamentam este estudo

A pesquisa se apoia nas contribuições teóricas de Duval (1994, 1995, 2006, 2012, 2018), cujo trabalho oferece uma análise detalhada sobre o papel das figuras na resolução de problemas de Geometria. Duval destaca a importância de desenvolver a capacidade de criar registros semióticos que representem objetos matemáticos e suas situações contextuais. Ele considera que a apreensão de um objeto matemático decorre da “descoberta, pelo próprio sujeito, do que até então ele mesmo não supunha, mesmo que outros lhe houvessem explicado” (Duval, 1994, p. 41). O autor identifica e destaca quatro tipos de apreensões – perceptiva, discursiva, sequencial e operatória –, cada uma desempenhando funções cognitivas e epistemológicas específicas descritas, resumidamente, na Figura 1.

Figura 1 - Tipos de apreensão das figuras geométricas



Fonte: Elaborada pelos autores, inspirados nos estudos de Duval

Para o autor, a apreensão perceptiva ocorre instantaneamente ao observar uma figura, enquanto a apreensão discursiva envolve a interpretação do enunciado e sua relação com a figura para resolver o problema. A apreensão sequencial relaciona-se à construção da figura geométrica com o auxílio de instrumentos de desenho, seguindo princípios específicos para sua formulação. Já a apreensão operatória abrange modificações na figura, como deslocamentos, ampliações ou divisões,

visando a explorar suas propriedades e facilitar a resolução do problema. Duval destaca a importância dessas modificações, que podem aproximar ou distanciar o estudante da solução, influenciadas por fatores internos e externos. Com base nessas concepções, nosso estudo analisa quais apreensões foram mobilizadas por estudantes ao resolverem problemas geométricos.

Autores como Nasser e Tinoco (2011), mesmo sem abordar diretamente as

apreensões propostas por Duval, destacam a importância de um tratamento figural e o uso de materiais manipulativos. Em sua discussão sobre estratégias para sala de aula, destacam quatro ações relacionadas às apreensões: (1) incentivo ao manuseio de figuras geométricas, comparação por superposição, composição e decomposição de figuras; (2) uso de papel quadriculado, triangulado e pontilhado para facilitar representações, ampliação e redução de figuras; (3) exploração de regularidades e simetrias por meio de dobraduras; e (4) estímulo às construções com régua e compasso, com ênfase na compreensão e justificção de cada passo (NASSER; TINOCO, 2011, p. 9-11). Acredita-se que essas práticas e recursos didáticos podem promover o desenvolvimento de operações figurais, alinhando-se com o potencial heurístico da figura proposto por Duval. O estímulo a essas atividades pode favorecer a emergência das apreensões e a construção de um caminho que leve a solução do problema. Para desenvolver este estudo procuramos proporcionar aos alunos vivências com Materiais Manipulativos. Nesta pesquisa, assim como Bartolini e Martignone (2020), entendemos como manipulativos artefatos usados na Educação Matemática, eles são manuseados pelos alunos para explorar, adquirir ou investigar conceitos ou processos matemáticos e para realizar atividades de resolução de problemas com base em evidências perceptíveis (visuais, táteis ou, mais geralmente, sensoriais).

Sobre o tema, além de Bartolini e Martignone (2020), pesquisas de Lorenzato (2010), Galvão e Passonian (2022) e Passos (2010) fornecem elementos para reconhecer o papel dos materiais manipulativos no desenvolvimento das apreensões figurativas discutidas por Duval. Bartolini e Martignone (2020) destacam a importância da mediação do professor na utilização desses materiais, enfatizando a necessidade de uma abordagem que considere o potencial semiótico dos artefatos. Lorenzato (2010) ressalta que o envolvimento ativo do aluno com os materiais é essencial para a aprendizagem efetiva, enquanto Galvão e Passonian (2022) observam que, embora os materiais manipulativos sejam considerados

divertidos, ainda é necessário vinculá-los aos conceitos matemáticos. Passos (2010) argumenta que o uso adequado desses recursos pode facilitar a construção de conhecimento matemático, mas alerta para a necessidade de mediação por parte do professor. Esses estudos, coletivamente, destacam a importância dos materiais manipulativos como ferramentas para promover a compreensão e a aprendizagem significativa em Matemática.

Procedimentos metodológicos

Este trabalho, de cunho qualitativo, expande as reflexões sobre os resultados obtidos na tese de doutorado conduzida pelo autor principal Silva (2023). Antes de sua realização, obtivemos a aprovação ética do sistema CEP/CONEP CAAE: 45236821.3.0000.549. As atividades de pesquisa foram conduzidas ao longo do segundo semestre de 2021, durante três sessões de estudo, que ocorreram em horários alternativos ao período regular de aulas dos estudantes na instituição em que estavam matriculados.

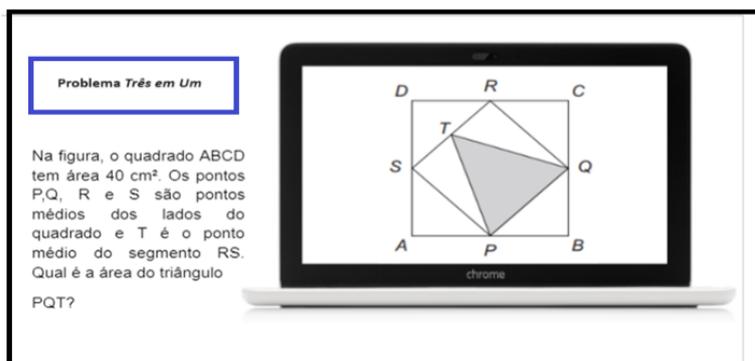
A pesquisa envolveu a participação de todos os alunos do oitavo ano que consentiram em colaborar (totalizando 23 estudantes), em uma escola privada na cidade de São Paulo. Para proteger a identidade dos participantes, decidimos usar os nomes de flores para fazer referência a eles.

As sessões foram realizadas de maneira híbrida, com alguns alunos participando presencialmente e outros de forma *on-line*, devido aos impactos da pandemia de Covid-19. Para a coleta de dados, empregamos diferentes instrumentos, incluindo observações com registros escritos e audiovisuais, além de protocolos de resolução elaborados pelos próprios estudantes.

Neste artigo, concentrar-nos-emos na análise dos dados provenientes da resolução de um problema geométrico apresentado durante a primeira sessão de estudo. A escolha desse problema específico (ver Figura 2) foi motivada pela expectativa de que ele suscitasse uma variedade de interpretações e abordagens por parte dos

alunos, promovendo o desenvolvimento de apreensões figurais.

Figura 2 - Situação-problema apresentada aos estudantes



Fonte: OBMEP 2009 – N1, Q10, F1

Este problema é apropriado para o nível de escolaridade dos estudantes devido aos conceitos envolvidos em sua resolução, como o cálculo de área do quadrado e do triângulo e a noção de ponto médio de um segmento. Além disso, o problema permite a criação de um modelo manipulativo da figura para potencializar a resolução.

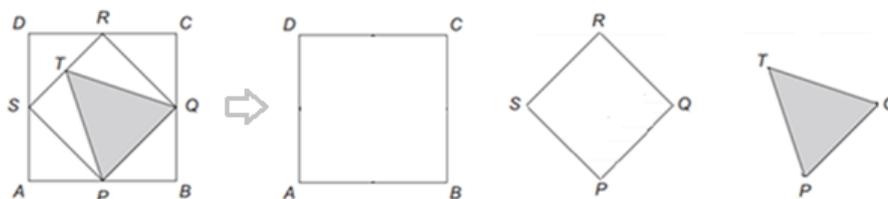
Potencial heurístico do problema “Três em Um”

Nossa escolha de analisar o potencial heurístico da figura apoia-se em Duval (1994, p. 130), que enfatiza a necessidade de um conhecimento detalhado dos fatores envolvidos e sua influência na visibilidade das operações como essencial

para analisar o potencial heurístico de uma figura em um problema de Geometria. Acreditamos que essa análise possibilita uma exploração mais eficiente, permitindo aproveitar ao máximo as características intrínsecas da figura para a resolução do problema. Nessa perspectiva, são ressaltadas as informações referentes à figura que podem ser consideradas pelos estudantes na resolução do problema, ou seja, uma análise “prospectiva”.

O problema “Três em Um” envolve a percepção de três subfiguras – quadrados ABCD e PQRS, e o triângulo PQT (Figura 3) –, num primeiro momento em que é mobilizada uma apreensão perceptiva.

Figura 3 - O fracionamento da figura



Fonte: Elaboração do Pesquisador a partir de OBMEP 2009 – SF1N1, Q10, F1

A mobilização da apreensão discursiva é apresentada ao confirmar que a Figura ABCD é um quadrado, e PQT é um triângulo, fornecendo elementos para deduzir que a Figura PQRS também é um

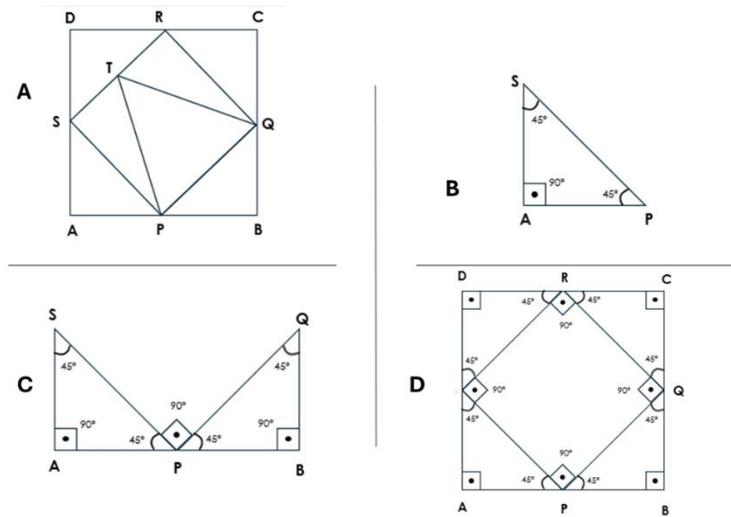
quadrado. Ao afirmar que P, Q, R e S são pontos médios dos lados, conclui-se que os segmentos \overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} e \overline{SP} , lados do quadrilátero, são congruentes, estabelecendo uma primeira condição. Uma segunda

condição pode ser verificada ao observar que os quatro triângulos formados no quadrado ABCD ao traçar os segmentos \overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} e

Figura B). Podemos concluir, finalmente, que os ângulos internos do quadrilátero PQRS são retos (Figura C) e que o quadrilátero PQRS é um quadrado (Figura 4C).

\overline{SP} , conforme apresentado na Figura 3, são retângulos isósceles; portanto, os ângulos da base são congruentes e têm medida de 45° (

Figura 4 - Apreensão discursiva para determinar que PQRS é quadrado

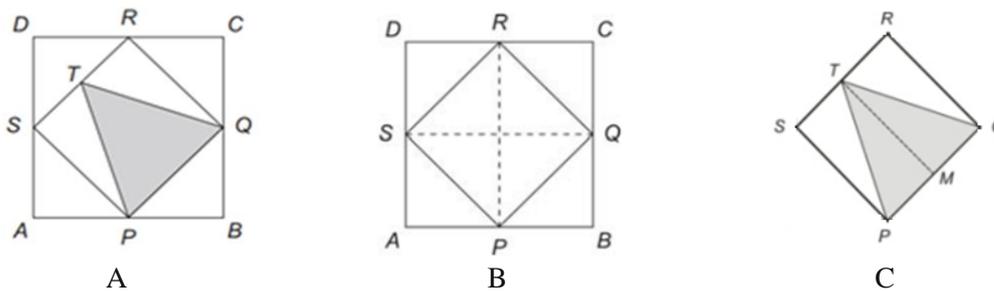


Fonte: Elaboração do Pesquisador a partir de OBMEP 2009 – SF1N1, Q10, F1

A resolução do problema pressupõe a investigação das subfiguras B e C da Figura 4 a partir da apreensão operatória. Além de serem desenhadas, as subfiguras

podem ser reproduzidas, recortadas e dobradas, propiciando uma experiência manipulativa.

Figura 4 - Subfiguras principais contidas na figura inicial



Fonte: Elaboração do Pesquisador a partir de OBMEP 2009 – SF1N1, Q10, F1

Assim como Duval (1994), acreditamos que há diversas maneiras de apreender uma figura num contexto geométrico. Além disso, consideramos que, para cada tipo de apreensão, mobiliza-se uma aprendizagem específica, que vislumbra e se apoia em uma maneira

matemática de olhar uma figura em Geometria. Nesse contexto, acreditávamos que, na exploração desse problema, poderíamos identificar e discutir coletivamente diferentes apreensões a partir das ações dos estudantes. Tal ocorrência poderia favorecer, eventualmente, a

ampliação do repertório dos participantes para que as utilizassem em estratégias de resolução de outros problemas.

Discussão e análise dos dados

O modelo estruturado para esta pesquisa foi desenvolvido com base em Alevato et al. (2021) e seguiu as seguintes etapas: (1) proposição do tema gerador; (2) leitura individual utilizando conhecimentos prévios; (3) discussão coletiva mediada pelo pesquisador para aprimorar as compreensões; (4) resolução do problema em grupos; (5) apresentação das soluções para discussão e verificação da compreensão.

Inicialmente, o problema foi apresentado aos estudantes, que tiveram tempo para explorá-lo e propor soluções de forma individual. Após esse período, o pesquisador conduziu uma conversa coletiva com o grupo, incentivando os estudantes a compartilharem as estratégias pensadas para a resolução e dificuldades ou obstáculos encontrados. Essa etapa foi realizada coletivamente para encorajar os alunos a exporem suas ideias e dificuldades, mostrando que essas questões poderiam ser comuns a vários deles.

Na sequência, o pesquisador retomou o trabalho com foco direcionado aos alunos que apresentaram soluções (completas ou incompletas) para socializar as estratégias pensadas. O objetivo era ouvir os relatos dos estudantes e encorajar a utilização de estratégias que considerassem as apreensões por meio da utilização de materiais manipulativos. Nessa fase, buscou compartilhar as interpretações dos estudantes sobre o problema e possíveis estratégias de resolução.

Na etapa 4, o pesquisador sugeriu uma tentativa de resolução do problema, organizando os participantes em grupos conforme a afinidade com a estratégia escolhida. Essa fase foi um desdobramento da etapa 3, baseada na discussão sobre as estratégias apresentadas pelos estudantes e no incentivo do pesquisador para o uso de materiais manipulativos, favorecendo a aplicação das apreensões. Ao final, as resoluções encontradas pelos participantes foram apresentadas para discussão coletiva.

Nosso objetivo foi observar as apreensões desenvolvidas e discutir coletivamente sua influência na resolução da situação. Acreditamos que esse *design* e a mediação do professor podem estimular os participantes a construírem novas apreensões a partir das apresentadas na exploração inicial do problema.

Consideramos que o modelo proposto para o desenvolvimento da pesquisa poderia ser flexibilizado para atender às demandas dos participantes e às necessidades e condições do modelo híbrido. Isso significa que ele poderia ser adaptado para se adequar às necessidades específicas dos estudantes tanto no ambiente da sala de aula quanto no virtual.

No Quadro 1, apresentamos a quantidade de alunos que realizaram ou não o registro da resolução durante o desenvolvimento da etapa 2 da pesquisa, além daqueles que conseguiram resolvê-la completamente ou não.

Quadro 1 - Registro quantitativo da resolução do problema “Três em Um”

Problema		Estudantes		
		Total	Usou a figura na resolução	Não usou a figura na resolução
B	Resposta completa	8	4	4
	Resposta incompleta	6	3	3
	Sem resposta	9		
	Total	23		

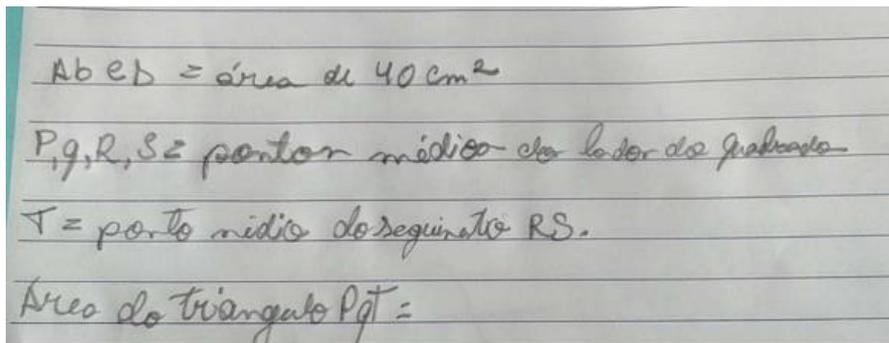
Fonte: Elaborado pelo pesquisador

O problema “Três em Um” foi considerado difícil pelos participantes desta investigação. Ao analisar os dados sobre as resoluções, foi possível identificar que: oito estudantes resolveram completamente o problema; seis solucionaram-no, mas não chegaram à resposta correta; e um (Azaleia) anotou as informações contidas no problema; oito não resolveram o problema e indicaram em seus comentários dificuldades encontradas, como destacado nos relatos dos estudantes Crisântemo, Dália, Hibisco e Ipê transcritos a seguir. Além disso, vale

sublinhar que um estudante deixou o problema totalmente em branco. A seguir, apresentamos alguns depoimentos exemplares que refletem as questões apresentadas.

Azaleia: “*Eu não entendi o que o exercício pede, mas fiz algumas anotações*”. A estudante apresenta ao pesquisador suas anotações iniciais, Figura 6.

Figura 6 - Anotações da estudante Azaleia sobre o problema “Três em Um”



Fonte: Acervo da pesquisa

Pesquisador: *Essa última informação, por que não preencheu?*

Azaleia: *É isso que é para calcular?*

Pesquisador: *O que acha?*

Azaleia: *Sim, agora entendi, mas continuo sem saber como faz.*

Pesquisador (para o grupo): *Olha, a Azaleia conseguiu escrever todos os dados do problema, conseguiu identificar o que foi perguntado, isso já é muito importante.*

O pesquisador prossegue ouvindo os relatos dos estudantes sobre as dificuldades encontradas na resolução:

Begônia: *Entendi o exercício, porém na hora de resolver não consegui entender como faz a resolução.*

Crisântemo: *Eu estou com dificuldade para descobrir a área do quadrado do meio.*

Dália: *Não entendi nada do enunciado, nem como fazer.*

Hibisco: *Não entendi nem a pergunta nem a imagem.*

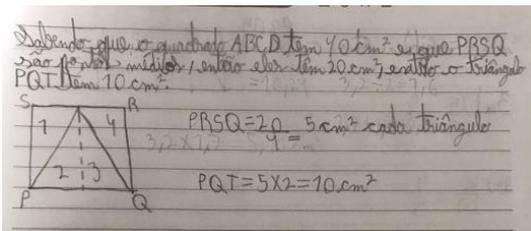
Ipê: *Como no anterior [outro problema resolvido anteriormente] fiquei com dificuldade de entender o exercício de primeira.*

Após os relatos dos estudantes, o pesquisador identifica as dificuldades de compreensão do enunciado que podem ter comprometido a resolução da situação. Os estudantes explicaram que sabiam o que foi solicitado no problema – área do triângulo –, mas não conheciam um caminho que os levasse à resolução.

Na sequência, o pesquisador se dirigiu aos estudantes que resolveram completamente a situação-problema para sondar as estratégias utilizadas: “*E quem resolveu? Pode explicar o raciocínio?*”. Narciso e Hortência disseram: “*Sabendo que o quadrado interno era a metade do externo [inferindo que a área de ABCD é metade da área de PQRS], dividimos a área do quadrado menor [PQRS] em 4 triângulos com 5cm² cada, assim o triângulo PQT ficou com 10 cm²*”.

Perguntados sobre como sabiam o valor da medida da área do quadrado interno, os estudantes não conseguiram explicitar seu raciocínio, mas, quando apresentaram o registro, citaram a relação dos vértices do quadrado PQRS e os pontos médios dos lados do quadrado ABCD, conforme a Figura 7.

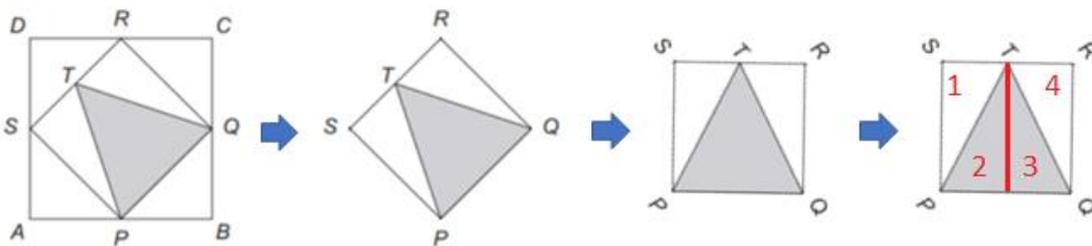
Figura 7 - Resolução proposta por Narciso e Hortência



Fonte: Acervo da pesquisa

Analisando o registro, não pudemos inferir se a dedução sobre a relação da área dos quadrados ABCD e PQRS apoiava-se

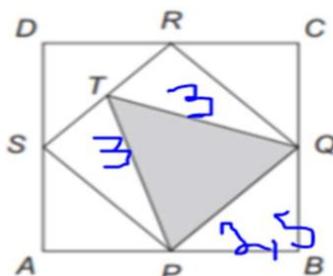
Figura 8 - Apreensões presentes na resolução proposta por Narciso e Hortência



Fonte: Elaborado pelo pesquisador a partir da estratégia apresentada pela dupla

Como nosso propósito inicial era permitir que os alunos socializassem suas estratégias, perguntamos se outros estudantes gostariam de falar sobre o caminho de resolução. Rosa afirmou: “Ao utilizar uma régua, é possível ver que a parte de baixo do triângulo é de 2,5 cm e as duas de cima 3 cm, depois de um bom tempo calculando, o resultado foi 25 cm²”. Sua resolução consta na Figura 9.

Figura 9 - Resolução proposta por Rosa



Fonte: Acervo da Pesquisa

A estudante Rosa, que participava remotamente, tentou, sem sucesso, utilizar a figura e instrumentos de medida (régua) em

em propriedades matemáticas ou na utilização do termo “pontos médios” como uma palavra-chave para deduzir a relação de metade. Do ponto de vista das apreensões, notamos que a figura apresentada nos registros dos estudantes nos possibilitou identificar que sua obtenção se deu a partir da reconfiguração para obter a subfigura formada pelo quadrado PQRS e o triângulo PQT, por meio de uma rotação (transformação de posição) e um fracionamento (divisão da figura em 4 triângulos congruentes), desenvolvidas mentalmente e apresentadas na Figura 8.

sua proposta de solução, todavia não conseguiu explicitar o raciocínio desenvolvido

Apresentamos aqui os registros iniciais dos estudantes Azaleia, Narciso e Hortência e Rosa para exemplificar a heterogeneidade da turma na apreensão das figuras para promover a resolução do problema. Nessa situação, foi possível identificar que a figura não funcionou necessariamente como ferramenta heurística na resolução da situação para as participantes Dália e Begônia; para ambas, a resolução foi feita por meio de cálculos e a figura não foi modificada, Dália não considerou a figura como possibilidade para o desenvolvimento de resolução.

Retomamos as ideias apresentadas por Nasser e Tinoco (2011) em relação à prática de abordagem dinâmica da Geometria, que envolve os alunos em tarefas que requerem manipulação e investigação de figuras e suas propriedades. Essa abordagem se torna relevante ao considerarmos a importância de fornecer aos estudantes uma experiência mais concreta e prática na

aprendizagem da Geometria. A construção de um enfoque didático que atribua a essa abordagem um *status* mais amplo vai além de simplesmente associá-la à diversão, mas reconhece-a como uma forma efetiva de representação de conceitos matemáticos, conforme apontado por Galvão e Panossian (2022).

Durante o desenvolvimento da etapa 3, o pesquisador promoveu uma discussão sobre as possíveis alternativas de manipulação de materiais para a resolução do problema “Três em Um”. Logo nas conversas iniciais, o pesquisador observou a presença de dois grupos na sala que construíam modelos manipulativos em papel para estudar o problema. Essa abordagem demonstrou o engajamento e interesse dos alunos em explorar estratégias práticas para compreender e solucionar o problema em questão, favorecendo a transição da mobilização das apreensões perceptivas e discursivas.

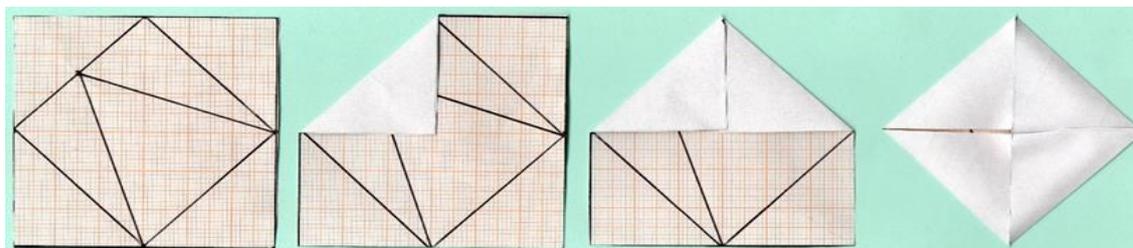
Foi possível registrar a construção do grupo ao qual pertencia a estudante Girassol (Figura .

Figura 10 - Proposta de resolução da Aluna Girassol usando manipulação



Figura 1.

Figura 11 - Proposta da estudante Lírio para determinar a área do quadrado PQRS



Fonte: Acervo da Pesquisa

Fonte: Acervo da Pesquisa

A etapa 4 se desenvolveu a partir dessa ideia de recortar figuras, o pesquisador chamou a atenção do grupo para a estratégia e propôs que os alunos explorassem a situação por meio de dobraduras e papel quadriculado. Após a socialização da estratégia pensada por Girassol, forneceu aos estudantes presentes na sala meia folha de papel quadriculado e enviou digitalmente uma folha semelhante para os alunos que participavam de maneira remota, pedindo que desenhasssem a figura no papel e investigassem formas de alterar essa figura. Eles poderiam se utilizar de dobras ou inserir novos traços.

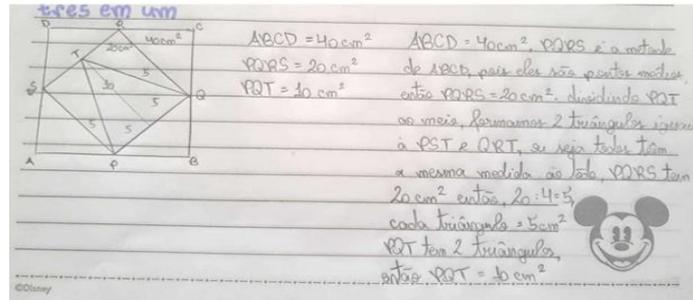
O pesquisador resgatou com a turma o enunciado do problema em busca de informações que não haviam sido consideradas pelos discentes e surgiu a questão dos pontos médios. A classe começou a discutir a ideia de a área do quadrado PQRS ser metade da área do quadrado ABCD (início da apreensão discursiva por meio de determinações orais embasadas na congruência entre figura visível e dedução Duval, 1995 p. 146). Os estudantes aceitaram a ideia e buscaram argumentos que confirmassem essa hipótese. A estudante Lírio sugeriu “dobrar as pontas” do quadrado ABCD para “cobrir” o quadrado PQRS,

Após a determinação da área do quadrado PQRS, aconteceu o diálogo:

Cravo: E se a gente dobrasse o triângulo PTQ ao meio? Não iria formar quatro triângulos iguais?

Acácia: Nem precisa dobrar, eu fiz aqui no caderno isso mesmo [referindo-se à Figura 11].

Figura 11 - Solução apresentada por Acácia



Fonte: Acervo da Pesquisa

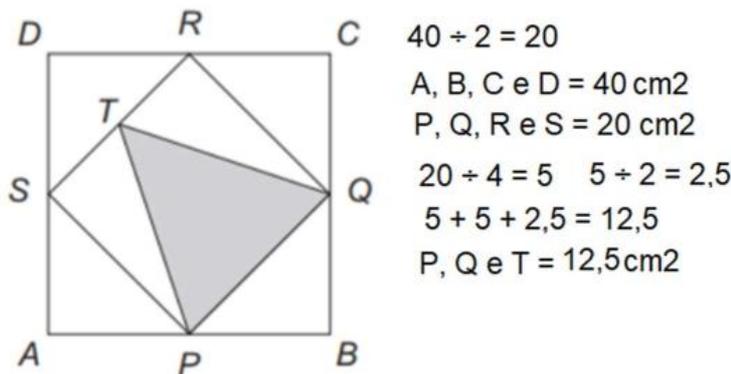
Nesse diálogo, constatamos que o material ajudou Cravo a apreender a relação entre as medidas de área das figuras, fato que Acácia já havia observado.

Destacamos também a proposta de resolução da estudante Margarida, desenvolvida em sala após as discussões. Ela não desenvolveu modificações físicas na figura e não chegou à resposta correta.

Margarida participava remotamente dessa sessão, e o pesquisador não conseguiu contato com ela no final para obter mais esclarecimentos. Na sessão seguinte (uma semana depois), Margarida disse que não se lembrava direito dos fatos e não conseguiria explicar o raciocínio desenvolvido para justificar os cálculos (

Figura 3).

Figura 13 - Proposta de resolução da estudante Margarida



Fonte: Acervo da Pesquisa

A resolução apresentada pela estudante se desenvolve corretamente até a determinação da área do quadrilátero PQRS. Na etapa seguinte, ao dividir 20 por 4 e encontrar 5 como resposta, a estudante provavelmente não interpretou o cálculo; ao

proceder dessa forma, ela havia dividido o quadrado PQRS em 4 subfiguras de áreas iguais a 5 cm²; não ter o apoio da figura a conduziu a pensar a área do triângulo PQT como soma das áreas de três subfiguras. Duval (1994) afirma que as figuras

desenhadas ou imaginadas são representações que evidenciam as mesmas apreensões, mas destaca que, em algumas situações, há interesse em desenhar uma figura se, de fato, ela apresentar muitos detalhes, imaginar todos os detalhes pode ser uma tarefa difícil, mas a construção da figura garante o acesso a todos eles.

Encerramos a sessão discutindo as sobre a ideia de determinação de área de figuras formadas por sobreposição de outras três, uma vez que a resolução envolvia análise de subfiguras compostas por duas delas. Frisamos os temas envolvidos e os alunos destacaram as palavras: geometria, cálculo de áreas e sobreposição de figuras.

Durante o estudo do problema “Três em Um”, as etapas 4 e 5 acabaram se misturando devido à dinâmica das discussões. Foi observado que os estudantes, inspirados pela resolução de outra situação que também envolveu a manipulação de figuras, já levavam consigo possibilidades de utilização de materiais manipulativos. Ao final da sessão, os alunos relataram sentir-se um pouco cansados, porém satisfeitos com a atividade e com o que haviam aprendido. Essa fluidez e integração entre as etapas evidenciaram o envolvimento dos alunos na resolução do problema, assim como sua capacidade de aplicar estratégias e explorar recursos de forma criativa para encontrar soluções.

Considerações finais

O estudo abordou a questão: Quais são as estratégias e apreensões figurais mobilizadas pelos estudantes participantes de sessões de resolução de problemas geométricos utilizando uma figura? A partir das análises realizadas, concluímos que os estudantes adotaram uma variedade de abordagens e estratégias para resolver o problema proposto. Desde a observação da figura até a aplicação de conceitos matemáticos complexos, os participantes demonstraram diferentes níveis de compreensão e habilidades na manipulação de figuras geométricas.

As apreensões perceptivas, discursivas, sequenciais e operatórias, propostas por Duval, emergiram como elementos essenciais na resolução do

problema. Os estudantes mobilizaram essas apreensões de maneiras diversas, evidenciando a importância de considerar a interação entre fatores cognitivos e contextuais no ensino e na aprendizagem da Geometria.

Além disso, a integração de materiais manipulativos, como papel quadriculado e dobraduras, desempenhou um papel significativo na promoção do desenvolvimento das apreensões figurais para ajudar a encontrar um caminho para a resolução de problemas geométricos. Os participantes demonstraram engajamento e criatividade ao explorar esses recursos, destacando a relevância das apreensões figurais potencializadas por abordagens práticas e concretas na resolução de problemas de geometria.

No entanto, o estudo também identificou desafios, como a dificuldade de alguns alunos em compreender o enunciado do problema e em aplicar corretamente os conceitos matemáticos. Essas questões ressaltam a importância de uma abordagem pedagógica que promova não apenas a manipulação de figuras, mas também o desenvolvimento de habilidades de interpretação e raciocínio matemático.

Portanto, em resposta à questão de pesquisa, afirmamos que os estudantes abordaram a resolução do problema geométrico de maneiras diversas, mobilizando diferentes apreensões e estratégias cognitivas. A integração de materiais manipulativos se mostrou uma ferramenta valiosa para facilitar o desenvolvimento das apreensões, embora desafios ainda persistam e destaquem a necessidade contínua de aprimoramento das práticas pedagógicas no ensino da Geometria.

Referências

BARTOLINI, M.G.; MARTIGNONE, F. Manipulatives in Mathematics Education. In: LERMAN, S. (Ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Springer: Cham, 2020. p 487-493.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.

Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de matemática, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118>.

DUVAL, R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. **Educ Stud Math**, [S. l.], n. 61, p. 103-131, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>.

DUVAL, R. Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. In: SUTHERLAND, R.; MASON, J. (Ed.). **Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education**. Heidelberg, 1995. p. x-y. (Nato Asi Series, 138).

DUVAL R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères-IREM**, [S. l.] n.17, p. 121-138, 1994. Disponível em: https://www.univ-irem.fr/reperes/articles/17_article_119.pdf. Acesso em: 1 jul. 2022.

DUVAL, R. Registers of Semiotic Representation. In: LERMAN, S. (Ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Springer: Cham, 2018. p. 724-727.

GALVÃO, M. E. E. L.; PANOSSIAN, M. L. **Recursos didáticos em aulas de matemática: o proposto pelas pesquisas e o praticado**. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022. *E-book*.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associado, 2010. p. 3-38.

NASSER, L.; TINOCO, L. (Coord.). **Curso Básico de Geometria: enfoque didático**. Módulo 1. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011. Projeto Fundação-SPEC-PADCTCAPES.

OBMEP. **Prova 2009 - Nível 1**. 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas-2009.htm>. Acesso em: 12 jun. 2024.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2010. p. 77-92.

SILVA, A. A. A da. **Possibilidades de apreensões mobilizadas na manipulação de figuras na resolução de problemas de geometria**. 147 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Centro Universitário Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2023. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/67114>>. Acesso em: 4 maio 2024.