O CONCEITO DE FUNÇÃO NO 9º ANO: CONSTRUINDO SIGNIFICADOS A PARTIR DO CONCEITO DE OPERADOR

The function concept in the 9th grade: constructing meanings for function from the concept of operator

Tânia Cristina Baptista Cabral

Clarice Caciani Taube

Resumo

Neste artigo apresentamos alguns resultados de um estudo qualitativo sobre a *produção de significados* de alunos do 9º. ano ao lidarem com atividades sobre funções via o conceito de operador na perspectiva da transformação[1]. A pesquisa foi realizada sob a *metodologia da pesquisa-ação*, em um programa de mestrado profissional. Trazemos ao leitor algumas das atividades que constituem um produto educacional[2] elaborado e aplicado em sala de aula, tendo como referência teóricos sobre o *pensamento matemático como processo*. As atividades centradas na ideia de transformação foram trabalhadas pelos alunos organizados em *grupos operativos*. Os modos de produzir significados dos alunos foram analisados considerando que, segundo a *análise de discurso*, a fala é uma forma discursiva pois produz efeitos sociais que modificam o sujeito e o grupo. Concluímos que a abordagem via operador para o conceito de função é viável e o trabalho em grupo operativo é importante para manter os alunos engajados em seus processos de aprendizagem.

Palavras-chave: Função. Pensamento matemático. Operadores.

Abstract

In this article, we present some findings from a qualitative study on the 9th-grade students' *sense-making* when engaging in activities related to functions using the concept of operator. The research was conducted within the framework of *action research methodology* as part of a professional master's program. We provide the reader with some activities that constitute an educational product developed and implemented in the classroom, drawing upon theoretical frameworks related to *mathematical thinking as a process*. The activities, which were centered around the notion of transformation, were carried out by students organized into small *operative groups*. The students' processes of meaning-making were analyzed, considering the view that speech, according to *discourse analysis*, is a discursive form that generates social effects, thereby influencing both the individual and the group. Based on our findings, we conclude that the operator-based approach to the concept of function is not only viable but also highly effective. Additionally, we found that engaging students in operative group work is crucial for maintaining their motivation and active participation in the learning process.

Keywords: Function. Mathematical thinking. Operators.

Introdução

Quando se trata de aprendizagem matemática, não faltam trabalhos que mostram o histórico de baixo índice de aproveitamento dos estudantes nessa matéria, nos diversos níveis de ensino. Cury (2009, p. 227) apresenta estudos de pesquisadores de diversas instituições de ensino superior envolvidos em um projeto amplo, que inclui o seu próprio. Os resultados mostram a falta de conhecimentos e os erros de estudantes calouros das áreas de ciências exatas em relação a alguns conceitos do ensino básico, como o conceito de função. As pesquisas sobre o tema continuam, como mostrado por Cabral (2022) que trata da descontinuidade na

[1] Esse artigo é referente à dissertação de mestrado elaborada por Clarice Caciani Taube, sob a supervisão da Profa. Dra. Tânia C. B. Cabral, no Programa de Pós-Graduação em Docência para Ciências, Tecnologias, Engenharias e Matemática, Unidade Guaíba, UERGS.

[2] Produto Educacional sob a Licença Creative Commons – Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional, constando no EDUCAPES http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/734163

aprendizagem de conceitos matemáticos observada na passagem do ensino elementar para o ensino superior, na passagem de disciplinas básicas para as profissionais e na saída da universidade para o exercício da profissão.

Diante disso, a fim de contribuir para os debates e, talvez, para as soluções sobre as dificuldades de aprendizagem relacionadas a este conceito, elegemos a questão de pesquisa “Como abordar o conceito de função no Ensino Fundamental por meio do conceito de operador?”. Elaboramos um conjunto de atividades que compuseram o Produto Educacional (PE) e aplicamos em uma turma de 9o ano do Ensino Fundamental. Para abordar este tema e sustentar a organização e aplicação das atividades, fundamentamos o trabalho em pesquisas sobre o pensamento matemático como processo e na discussão sobre o próprio conceito de função.

Sobre a formação do pensamento matemático

As nossas observações sobre como os estudantes tentam resolver problemas matemáticos nos permitem identificar alguns elementos que causam dificuldades: o domínio da linguagem natural, a criação de ideias relacionais, a criação de estratégias para lidar com as informações e as relações e, finalmente, o reconhecimento de quais representações matemáticas podem responder pela resolução.

Para aprofundar a discussão, tomamos como referência alguns autores que analisam o pensamento matemático como um processo. Tall (1991, p.14) e Dubinski (1991, p. 95) sugerem que esse processo, estudado sob a perspectiva da psicologia cognitiva e, particularmente, a partir dos estudos piagetianos sobre a abstração reflexiva, envolve estruturas cognitivas que permitem a criação de novas concepções que sustentam sistemas já organizados. De acordo com Dreyfus (1991, p. 26), além da ligação entre a psicologia cognitiva e o campo do conhecimento matemático, os estudos sugerem que alguns elementos característicos do pensamento matemático avançado estão presentes nos processos de aprendizagem em nível elementar. Isto é, há procedimentos característicos da resolução de problemas em nível avançado que, em níveis elementares de ensino, estão presentes na investigação necessária para a criança resolver um problema (TALL, 1991, p. 26). Dreyfus (1991, p. 40) sugere que, em relação ao pensamento matemático elementar, é necessário que elementos como observar, intuir, verificar, provar e definir estejam presentes nos processos de aprendizagem matemática das crianças. A ideia é aceitável, mas no nível do ensino fundamental, provar não está relacionado com as demonstrações matemáticas. Portanto, a forma como analisamos as complexidades na forma de se resolver um problema pode estabelecer uma linha de demarcação entre o pensamento avançado e o elementar.

O pensamento matemático avançado e elementar são processos próprios do desenvolvimento do pensamento matemático. A álgebra é um tema central nos estudos sobre o pensamento elementar que indicam ser preciso considerar o ensino dessa disciplina a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico. Ponte et al. (2009, p. 10-11) sustentam que é preciso superar a ideia de que a álgebra é apenas uma manipulação de símbolos. Quando tratada como um conjunto de técnicas aplicadas em exercícios recorrentes, impede-se a produção de significados. Os autores, portanto, defendem que o pensamento algébrico seja caracterizado pela capacidade do estudante de usar sistemas de representação simbólica, relacionar objetos particulares, deduzir e usar as representações de objetos algébricos para resolver problemas em qualquer área do conhecimento.

Essa ideia é reforçada por Lins (1994) ao sustentar que o pensar algebricamente é uma maneira de produzir significado para a álgebra a partir de características que constituem as formas de pensar aritmeticamente, internamente e analiticamente (LINS, 1994, p. 30). Em seu modelo epistemológico, as formas de produzir significados definem um campo semântico. Modos de produzir objetos estão relacionados ao conhecimento definido como uma crença-afirmação que requer, no campo semântico em que se enuncia, uma justificação, no nível da enunciação (LINS, 1994, pp. 36-38). Dado que a produção de significado requer lidar com crenças verdadeiras justificadas, é de se esperar que as situações problema sejam experiências que levem o estudante a observar, analisar, conjeturar, generalizar e justificar, permitindo o progresso na aplicação de conceitos básicos em contextos mais complexos.

Podemos concluir que os elementos destacados acima dizem respeito à produção de significado em qualquer campo, incluindo o das relações entre duas variáveis, envolvendo valores em conjuntos. Sobre essas relações especiais, é identificada a característica da interdependência entre valores, variação simultânea ou não entre duas ou mais variáveis. Interessa-nos a relação entre dois valores expressa por meio de fórmulas ou leis; para cada valor assumido pela variável livre, existe um valor da variável dependente associado por uma lei – uma correspondência unívoca entre elementos de dois conjuntos que pode ser expressa em linguagem natural, ou por uma fórmula, ou por um gráfico.

A interdependência é um aspecto importante para introduzir algumas ideias de Caraça (1984). Em seu texto "O estudo matemático das leis naturais" (1984, p. 107), o autor sustenta que as coisas mundanas estão relacionadas umas com as outras. Essa percepção, que se baseia em observações de fenômenos, suscita interpretações das regularidades por meio de leis para descrever as variações percebidas. Caraça (1984, pp. 110-129) analisa as noções de isolado, quantidade e de qualidade, passando pela transformação das duas últimas uma noutra. Em seguida, apresenta o conceito de lei, qualitativa e quantitativa, não necessariamente separadas, até chegar ao conceito de função como o instrumento matemático para estudar os fenômenos, suas regularidades e as correspondências entre seus elementos (CARAÇA, 1984, p. 129). O autor apresenta a definição de função, conhecida do professor de matemática, encontrada, com algumas variações de escrita, em livros didáticos.

Neto e Rezende (1998) apresentam três interpretações sobre o conceito de função na história que denominam categorias, a saber, as relações – entre conjuntos e entre variáveis – e as transformações (NETO; REZENDE, 1998, p. 33). Dentre estas, destacamos as *transformações* por considerarmos estratégico o resgate dessa concepção no ensino em nível elementar. As transformações podem ser relacionadas ao trabalho com máquinas que recebem uma entrada e produzem uma saída. De acordo com os estudos dos autores, alguns livros usados no ensino médio tratam do conceito de função a partir dessa ideia de aplicação de máquina. O tema função é recorrente no primeiro ano do ensino médio, quando os estudantes têm entre 14 e 16 anos, e é abordado do ponto de vista estático. Essa forma de trabalhar leva os estudantes a se distanciarem cada vez mais de uma compreensão dinâmica. Conforme o levantamento feito por uma das autoras ao longo dos anos na condução de disciplinas de matemática no ensino superior, para os estudantes função e fórmula são sinônimas.

Como apontam Carraher et al. (2006), o conceito de função pode ser útil para o professor ao ter de ensinar álgebra para integrá-la na grade curricular e, acrescentamos, em atenção às orientações sobre o desenvolvimento de habilidades estabelecidas na BNCC. Quanto ao fato de o conceito de função estar presente na escolaridade do estudante desde sua alfabetização, concordamos com a perspectiva dos autores quando se refere às operações elementares de soma e multiplicação como funções e que têm a subtração e a divisão como suas inversas, consideradas as restrições necessárias. Aliás, esperar-se-ia que o professor que ensina matemática nos primeiros anos tivesse ideia de que a operação de soma de dois números é uma função, pois associa a um par ordenado de um conjunto um único valor de outro conjunto. Carraher et al. (2006) enfatizam a importância desse conceito ao citar Quine (1987, p. 72, apud CARRAHER et al., 2006, p. 88), "uma função é um operador ou operação".

Em comum, os autores aqui citados defendem que a ideia de função deve ser trabalhada de forma que ajude na compreensão de outros conceitos e que não se restrinja a um conjunto de regras e técnicas de resolução. Consideradas essas reflexões, para os estudantes produzirem significados sobre esse conceito propomos abordá-lo sob a perspectiva da *transformação*, apresentada por Neto e Rezende (1998, p. 33), envolvendo a noção de *operador*.

Em matemática, um operador é um mapa de um conjunto em outro, sabido que os conjuntos envolvidos têm uma estrutura que pode ser definida por operações algébricas, por uma topologia ou por uma relação de ordem. O conceito de operador é abordado em disciplinas como álgebra linear, cálculo numérico, cálculo vetorial e análise funcional. A relevância desse conceito é evidenciada nesta última disciplina devido aos estudos de sistemas com comportamentos não-lineares, aplicados à física-matemática, por exemplo.

Para retomar a ideia de operador no ensino básico, objeto de nosso trabalho, citamos Vergnaud (2009) ao analisar diversas situações aparentemente simples no ensino de matemática elementar na constituição dos campos conceituais aditivo e multiplicativo. O autor estabelece categorias de relações ternárias e quaternárias, observando que problemas que compõem o isomorfismo de medidas são a base das estruturas multiplicativas. Caracteriza esse isomorfismo como uma relação entre quatro quantidades avaliadas de modo distinto duas a duas (VERGNAUD, 2009, p. 239) e exemplifica essa concepção por meio de algumas situações semelhantes, mas representados por esquemas de correspondência diferentes como observado pelo próprio Vergnaud (2009, p. 246). Seus estudos sobre o ensino de matemática para crianças fazem destacar o conceito de operador nas formas escalar, fracionário, multiplicativo, relação e função. Portanto, Vergnaud (p. 248) trata da noção de fração sob a perspectiva de operador correspondendo à composição de dois operadores multiplicativos – uma divisão e uma multiplicação.

A ideia de fração como operador multiplicativo é exaustivamente explorada em atividades propostas por Baldino (1984) que acompanham o material estruturado, significante manipulável, de sua autoria, chamado Frac-Soma 235. Nessa estrutura, uma peça representando uma fração de outra tomada como referente para o inteiro, ao ser aplicada sobre uma segunda, produz uma modificação, uma transformação, um encolhimento, por exemplo. Algumas atividades propostas pelo autor foram inseridas no produto educacional e aplicadas, embora não sejam apresentadas aqui.

> Até aqui as peças do FRAC-SOMA 235 têm sido consideradas como representando quantidades. Elas vão, agora, assumir **a função de operadores** [grifo nosso]. Tome uma peça VM1 e suponha que ela seja uma espécie de serra mágica ou varinha de condão que tenha a propriedade de, ao tocar outra peça, dividi-la em duas partes iguais, retendo uma dessas partes. Por exemplo, quando VM1 toca AM1, produz-se uma peça LA1, que é metade de AM1. (BALDINO, 1984, p. 5).

Após essas reflexões sobre concepções relevantes para a formação do pensamento matemático, apresentamos alguns resultados da aplicação de uma sequência didática compreendendo o conceito de função como operador em uma sala de aula de matemática do nono ano de uma escola pública. Ao enfatizarmos que o produto educacional foi aplicado por uma das autoras deste trabalho em sua própria turma, passamos a apresentar as ideais que cercaram a metodologia de pesquisa.

Metodologia

As autoras deste artigo integram um grupo de pesquisa-ação (THIOLLENT, 1988, p. 14) que se reúne a cada duas semanas para abordar o problema da mudança da prática educativa e da organização da sala de aula em conjunto com a elaboração de produtos educacionais. De acordo com Thiollent (1988, p. 75), no grupo, o problema que nos representa, a elaboração de produtos educacionais, as nossas ações de intervenção em nossas próprias salas de aulas discutidas de forma colaborativa e as respostas alcançadas tomadas como objeto de reflexão são elementos que marcam o desenvolvimento do estudo aqui apresentado na modalidade de pesquisa social baseada na experiência. Como este trabalho é uma pesquisa aplicada, definindo o papel do professor como pesquisador de sua própria sala de aula, trata-se de uma intervenção de caráter especial. Cabral (2019) explica essa característica via o conceito de intervenção diferencial porque o professor-pesquisador atua sob condicionantes institucionais. Estes definem a margem de liberdade que o professor tem para modificar sua prática educativa na direção de abrir espaço para a colaboração visando a produção de significado caracterizando a pesquisa participante.

Como já aludido, uma das autoras, professora de matemática do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de São Leopoldo/RS, aplicou a sequência de atividades em sua própria turma do 9o ano formada por 35 alunos, moças e rapazes, com idades entre 14 e 15 anos. As atividades foram trabalhadas durante três meses e foi usada a estratégia de grupos operativos que possibilitou a interação entre os estudantes visando a produção de significados em suas tentativas de adaptação ativa que levam à aprendizagem como modificação do sujeito e do meio (PICHON-RIVIÈRE, 1988, p. 177). A fim de coletar os dados dessa investigação, a professora utilizou um diário de campo no qual anotou o que considerou relevante sobre sua ação e sobre as respostas dos alunos durante a aplicação das atividades. Os registros dos comportamentos, das interações e das falas foram feitos logo após cada aula para que fosse possível retomá-los para análise e produção de conhecimento científico no grupo de pesquisadores. Nossa intenção de analisar as falas dos estudantes, formas discursivas pois produzem efeitos, é interpretar os significados produzidos que abrangem elementos da formação do pensamento matemático em contexto de diálogo. Isso nos aproxima da análise discursiva como método pois a sala de aula é um microssistema sociopsicológico e histórico (PÊCHEUX, 2011).

Discussão dos resultados

Consideradas algumas dificuldades dos alunos identificadas em pesquisas aqui citadas, foram propostas atividades com a finalidade de promover a compreensão das ideias iniciais do conceito de função sob a perspectiva de transformação usando a ideia de operador.

Apresentamos neste artigo as atividades “Operadores que transformam” e “Descrevendo operadores” que envolveram o construtor de funções no simulador Phet Colorado disponível em https://phet.colorado.edu/pt_BR/. As atividades foram preparadas de modo que os alunos fossem levados a observar para identificar a entrada, a saída e o operador responsável pela transformação; descrever as mudanças ocorridas; descrever o operador; generalizar ao prever saídas de um operador e construir operadores para criar uma função. A atividade, denominada “Desvendando operadores” foi adaptada do jogo “Mestre e adivinho” (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 93-96) e teve por fim estabelecer relações entre a linguagem natural e a linguagem algébrica simbólica, bem como perceber as operações algébricas como operadores.

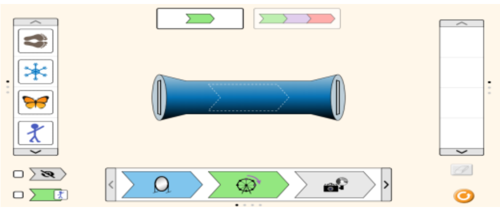
O contexto inicial se deu por meio de uma conversação a respeito dos tipos de aparelhos domésticos que os alunos possuíam em suas residências. Os alunos elencaram as “máquinas” o que possibilitou à professora prosseguir com a conversa. Segue um fragmento do diálogo sobre máquinas exemplificadas pelos alunos:

> *Professora: O que cada máquina faz?*
> *Alunos: “A cafeteira faz café”; “A máquina de lavar lava as roupas sujas”; “O liquidificador tritura os alimentos”; "Cada máquina tem uma função”; “Cada máquina foi programada para fazer uma coisa”.*

> *Professora: O que entra na cafeteira?*
> *Alunos: "Água e pó de café".*
> *Professora: E o que sai?*
> *Alunos: "A bebida café".*
> *Professora: A cafeteira foi programada para fazer o quê?*
> *Alunos: "Primeiro ela esquenta a água e depois a água quente sobe pelo caninho, cai no pó de café e desce a bebida pronta".*

A atividade situou os alunos no cotidiano doméstico, o que foi relevante para que produzissem as primeiras concepções ingênuas, mas adequadas ao modo como o conceito evolui. De acordo com Moreira (2011, p. 13), a aprendizagem significativa se dá pela interação entre os conhecimentos prévios e os conhecimentos novos. A pergunta "O que cada máquina faz?" marcou a situação de engajamento inicial, permitindo à professora estabelecer um primeiro acordo com os alunos sobre a palavra "operador", programação que modifica uma entrada. Na conversa, um aluno comentou: "Tem máquina que tem só uma função e outras tem mais de uma função". A palavra "função" não foi dita pela professora, foi intuída a partir do processo de programação responsável pela modificação das entradas. Intuir é um dos elementos importantes na formação do pensamento matemático. As condições para o trabalho com as atividades do produto educacional estavam estabelecidas. Cada grupo recebeu as questões e um Chromebook para acessar o simulador Phet Colorado com diferentes tipos de telas: padrões, numérica, equação e misteriosa.

Figura 1 - Simulador Phet Colorado: tela padrões



Fonte: Phet Colorado[3]

Questão 1- Explore o simulador e construa algumas transformações que escolher. Anote de uma a três observações sobre as transformações realizadas.

Reunimos algumas respostas dos grupos:

> *"O boneco entrou foi operado e saiu 90º para direita; A borboleta entrou, sofreu a operação e a cor amarela ficou azul; O pé entrou foi operado e ficou menor; Podemos observar que tem várias opções com diferentes funções, algumas podem ser transformadas e depois devolvidas, já outras não; O espelho inverte o lado; As transformações fazem as imagens terem efeitos diferentes"* (Grupos diversos)

De acordo com nossa discussão, a observação é uma ação relevante no processo de formação do pensamento matemático e, particularmente, na elaboração do conceito que está sendo trabalhado com o objetivo de produzir significados. Os estudantes observaram regularidades ao explorarem o simulador e expressaram que o operador modifica as entradas. A atividade que segue teve por objetivo continuar estimulando a observação dos alunos ao solicitar que descrevessem os acontecimentos.

Questão 2 - Faça uma captura de tela de cada imagem depois de passar pelo operador e registre na tabela. Descreva o que acontece com as imagens depois que elas passam pelo operador. Nomeie o operador.

Figura 2 - Registro da questão 2 - Operadores que transformam

Fonte: imagem das autoras

Na sequência, a atividade proposta visava que os grupos fizessem registros

[3] Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_pt_BR.html. Acesso em: 10 nov. 2022.

baseados em observações usando a linguagem natural na forma escrita.

Questão 3 - Com suas próprias palavras, com base em suas observações da tabela, escreva o que você compreendeu referente à função do operador (na sua explicação tente usar as palavras entrada, saída, operador, relacionado/relacionamento). Segue abaixo os registros dos grupos:

> *"As entradas passam pelo operador de uma forma e a saída sai de outra; O jeito que ela vai sair depende do operador escolhido; Transformar está relacionado a mudar; A função dos operadores é fazer alguma mudança; Com a entrada do item, o operador modifica o item e faz dele um item totalmente diferente ou o item fica igual dependendo do operador; O operador executa uma ação e seu resultado se transforma"*

Trazer para a linguagem natural o que é interpretado, leva o aluno a produzir significados e predições que devem, nesse caso, permitir a elaboração de leis. É o passo a ser dado na direção da generalização. Este foi o objetivo da tarefa que seguiu.

Questão 4 - Com base na sua definição, crie uma previsão do que acontecerá se você passar a borboleta pelos seguintes operadores:

Figura 3 - Questão 4 - Operadores que transformam

Fonte: Phet Colorado[4]

Todos os grupos fizeram a mesma previsão: *"Vai mudar de cor, vai girar 90 graus e vai ficar espelhada"*. Na sequência, eles testaram no simulador e puderam avaliar a veracidade da previsão. Avaliar o resultado de uma atividade é fundamental para organizar novas situações.

Figura 4 - Registro da questão 4 - Operadores que transformam

Fonte: imagem das autoras

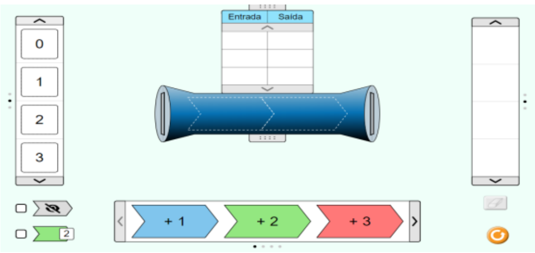
Nos registros das questões 3 e 4, para os alunos o operador altera as entradas de alguma maneira, e isso pode ser verificado na saída. Dreyfus (1991, p. 40) entende que o processo de aquisição de um conceito parte da ação do aluno quando ele constrói propriedades dos conceitos por meio das deduções de definições. É possível notar que os grupos relacionaram as máquinas com transformações e que essas transformações ocorreram devido à ação do operador envolvido, ou seja, a concepção, ainda que ingênua, mostra que o operador é uma mudança que atua de um grupo em outro.

Concernente a trabalho em pequenos grupos, a professora reunida com a turma pediu que os alunos analisassem o trabalho. As avaliações expressaram satisfação e clareza sobre os elementos que definem um trabalho grupal colaborativo. Dentre as opiniões sobre o trabalho em grupo, destacamos: "*Precisa pensar; Precisa saber ouvir a opinião dos outros; Foi interessante fazer a atividade com um colega que nunca havia conversado antes; O grupo deixa em dúvida, cada um tem uma opinião*". Interpretamos que os alunos consideraram o trabalho em grupo como algo desafiador e estimulante para o aprendizado. A professora assumiu o papel de questionadora ao colocar os alunos em pequenos grupos, com o objetivo comum de resolver uma tarefa, para produzir significados e aprender. Dessa maneira, foi criada uma situação em que os alunos passam da condição de receptores passivos para a condição de produtores ativos em seus processos de aprendizagem; os alunos se modificam ao ouvir e quando precisam convencer outros colegas do grupo sobre uma ideia.

[4] Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_pt_BR.html. Acesso em: 10 nov. 2022.

Da conclusão do trabalho em grupo sobre as atividades, destacamos a fala de um aluno: *"Profe, agora eu entendi a relação da atividade com a matemática, primeiro achei que não tinha nada a ver, porque só tinha as figuras, mas os operadores também podem ser os sinais de mais, menos, vezes e dividido"*. Esse discurso é relevante para o desenvolvimento do pensamento matemático; foi produzido significado que nos permite interpretar que um modo de compreender que os sinais operatórios são operadores, responsáveis por transformar, foi acionado. Acreditamos ter atingido uma parte do nosso objetivo uma vez que os alunos ao realizarem as atividades no Simulador Phet Colorado utilizando a tela numérica expressaram *"As entradas agora são números; Os operadores são as operações matemáticas"*.

Figura 5 - Simulador Phet Colorado: tela numérica



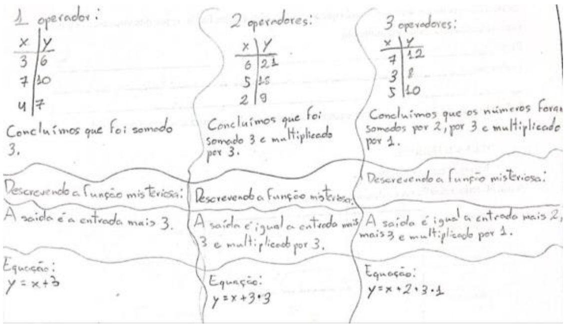
Fonte: Phet Colorado[5]

Inicialmente, sem inserir operadores, deveriam arrastar alguns valores de entrada, soltar na máquina e comparar os resultados. Todos os grupos relataram que sem operador a entrada não sofria nenhuma alteração, após terem testado com um e dois operadores. É preciso registrar que alguns grupos apresentaram dificuldades em expressar ideias por meio da escrita. Nesse sentido, é papel do professor intervir com questionamentos que possibilitem aos alunos situações desafiadoras com a finalidade de reformular as frases.

Professora: Subtrair e adicionar o que?
Aluno: Subtrair 1 e adicionar 3.
Professora: A que?
Aluno: Ao valor da entrada.
Professora: Será que você poderia dizer de maneira mais simples, subtrair 1 e adicionar 3, ou seja, subtrair 1 e adicionar 3 é o mesmo quê?
Aluno: Somar 2.

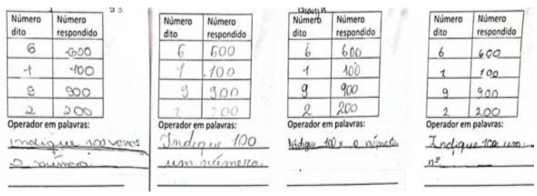
A exigência de simbolizar deve ser considerada pelo professor como uma ferramenta que auxilia a reflexão. Por meio da escrita, checada pelo professor ou por um integrante do grupo, o aluno tem a oportunidade de analisar seus modos de produção de significados. Na atividade com a tela misteriosa, assim como no jogo Desvendando Operadores, esperava-se que os alunos "descobrissem" os operadores por meio da análise das entradas e saídas.

Figura 6 - Registro da questão 1 e 2 - Descrevendo operadores - tela misteriosa



Fonte: imagem das autoras

Figura 7 - Registro da atividade desvendando operadores



Fonte: imagem das autoras

Em relação às atividades que levariam os alunos à generalização, na passagem da linguagem natural escrita para a linguagem matemática, alguns compreenderam de forma simples esse processo de transição, enquanto outros tiveram algumas dificuldades. No quadro abaixo é mostrado como um grupo entendeu

[5] Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_pt_BR.html. Acesso em: 10 nov. 2022.

a ideia de operador na frase “o número dito multiplicado pelo sucessor dele”.

Quadro 1 - Desvendando operadores

Número dito	2	4	5	9
Número respondido	6	20	30	90

Fonte: elaborado pelas autoras

A dificuldade desse grupo foi generalizar a frase. A professora solicitou que realizassem os cálculos a partir do “número dito”, de acordo com a frase mencionada.

Quadro 2 – Estratégia para desvendar operadores

$2 \times 3 = 6$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 6 = 30$	$9 \times 10 = 10$

Fonte: elaborado pelas autoras

Os alunos não tiveram dúvidas sobre o 2 ser sucessor de 3, o 4 ser sucessor de 5, e assim por diante. A professora questionou sobre que operação deveria ser feita para chegar ao sucessor de um número qualquer e, como não houve resposta, perguntou:

Professora: Que operação se faz com o 2 para chegar ao 3?
Alunos: Somar 1.
Professora: E com o 4 para chegar ao 5?
Alunos: Somar 1.
Professora: Que operação se faz para chegar ao sucessor de um número qualquer?
Alunos: Somar 1 ao número.

A professora pediu ao grupo que desenvolvesse novamente os cálculos com as operações realizadas para chegar ao sucessor do número, na situação $2 \times 3 = 6$, o grupo registrou $2 \times 2 + 1 = 6$.

Professora: Verifiquem se a igualdade é verdadeira da maneira que vocês registraram.
Alunos: $4 + 1 = 5$*, então não está certo.*
Professora: O que precisamos colocar para mostrar que queremos multiplicar o 2 pelo resultado de $2 + 1$*?*
Alunos: Um parêntese.

O grupo repete as operações utilizando os parênteses:

Alunos: $2 \times (2 + 1) = 6, 2 \times 3 = 6$*. Agora deu certo.*
Professora: Então, como é possível generalizar a frase: O número multiplicado pelo sucessor dele?
Grupo: $n \times (n + 1)$

Nos fragmentos acima, é possível notar a dificuldade dos alunos para generalizar; a superação desse tipo de dificuldade requer tempo de trabalho e intervenções calculadas do professor para não responder como fazer. A ideia é sempre que o professor produza encaminhamentos para ajudar o aluno. Alguns perceberam o funcionamento do operador, mas não conseguiram escrever a expressão que o generaliza. De acordo com os autores que apresentamos neste trabalho, generalizar é a capacidade do indivíduo de analisar e expressar o que há em comum em diversas situações de forma que em outras situações responda do mesmo modo. Com toda a certeza, essas generalizações devem ser exploradas desde os primeiros anos escolares.

Considerações Finais

Investigamos a possibilidade de abordar o conceito de função no 9º. ano do Ensino Fundamental, na sua acepção de transformação, sob a perspectiva de operador. O estudo foi fundamentado em: 1) concepções a respeito da formação do pensamento matemático como processo, 2) interpretações que cercam o conceito de função e 3) concepções sobre a fala como discurso pelos efeitos sociais produzidos.

Em sala de aula, desenvolveu-se o trabalho em grupos operativos, caracterizado pela situação em que a professora escuta e devolve perguntas, distinguindo um discurso essencialmente mediador e inclusivo que visa manter os alunos envolvidos na tarefa e, dessa forma, permitir a aprendizagem. Os grupos reagiram de forma positiva a esse tipo de trabalho e, apesar de terem mencionado o medo de errar, as suas avaliações mostram que compreenderam que é preciso ouvir a opinião do outro, que cada um pode expressar crenças e apresentar justificativas. As atividades em grupo favoreceram o surgimento de dúvidas e dos erros que formaram um rico material para reflexão dos próprios alunos.

Os registros das falas dos alunos durante as atividades, no contexto de provocação estabelecido pela professora, caracterizam um ciclo de fatos discursivos, postos e retomados, para a produção de significados sobre o conceito de transformação. Esse conceito sofreu, portanto, uma transformação desde a ideia de máquina que opera sobre objetos até a operação sobre números. É dessa perspectiva que interpretamos que foi satisfatório o trabalho; podemos dizer que alcançamos o objetivo de levar os grupos a perceberem padrões por observação e análise de situações para então generalizar. Resulta que foram produzidos os primeiros significados sobre transformações, um dos aspectos importantes na elaboração do conceito de função; isso deve levar a professora a continuar explorando a ideia em novas situações.

Os alunos expressam ideias oralmente com certa facilidade, ou seja, suas falas deslizantes escutadas pela professora são fluxos de significantes, discursos que devem ser estimulados pois dão feitio aos pensamentos. Nos fluxos percebemos pontos de dificuldades de alguns alunos. Um deles diz respeito à passagem da oralidade para a forma escrita, ainda em linguagem natural, e desta para a forma de expressões matemáticas. Isso implica a instituição de obstáculos para a representação dos operadores algebricamente. É fato, portanto, que o pensamento algébrico ainda não está consolidado como é esperado ao final desse segmento de ensino. A produção de significado sobre conceitos matemáticos depende do domínio da linguagem natural, crucial como forma discursiva para o aluno enunciar crenças e justificá-las. Acreditamos que a resolução de problemas pode ajudar na superação desse tipo de dificuldade por exigir trabalho inicial de interpretação – leitura e significação – com a linguagem natural.

Para encerrar, apesar das dificuldades apontadas, reafirmamos nossa confiança a respeito dos alunos terem produzido significados sobre transformações, trabalho fundamental no processo de elaboração do conceito de função. A nossa compreensão de que é possível criar condições para a formação do pensamento matemático sob essa perspectiva é reforçada pelo que disse o aluno sobre os sinais operatórios serem operadores. Estamos seguras de termos respondido à questão de pesquisa, tendo em mente que se trata de um tema complexo e que requer estudos constantes. A ideia de que os alunos em diálogo podem produzir significados matemáticos nos motiva a continuar o trabalho de aprofundar as concepções que surgem, ainda que provisórias, na direção dos conceitos científicos. Além disso, na situação de grupo os alunos se tornaram sujeitos ativos, perceberam-se responsáveis pela produção colaborativa. Isso também permitiu à professora modificar seu discurso; assumiu o papel de coparticipante do processo, abandonou o discurso característico do ensino tradicional expositivo que provoca a exclusão pelo jogo da imitação. Em síntese, a partir das atividades desenvolvidas, acreditamos que trabalhar o conceito de função sob a perspectiva de transformação, como operador, proporciona condições favoráveis para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Referências

BALDINO, R. R. **Frac-Soma 235**: significantes manipuláveis. Registrado na Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro, sob o nº 30262 em 2 de abril de 1984.

CABRAL, T. C. B. **Epistemology of mathematical education in engineering**: building bridges between calculus and engineering. Site. Disponível em: https://cabraldinos.mat.br/category/projects/. Acesso em: 20 mar. 2022.

CABRAL, T. C. B. Desafios e perspectivas para a educação matemática: O normal como novo remoto. **Educação Matemática em Revista-RS**, v.1, n. 20, – p. X, 2019.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 2. ed. Lisboa: LIVRARIA SÁ DA COSTA EDITORA, 1984.

CARRAHER, D. W. *et al*. Arithmetic and algebra in early mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education**, [*s.l.*], v. 37, n. 2, p. 87-115, 2006. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/30034843. Acesso em: 14 jan. 2022.

CURY, H. N. Pesquisas em análises de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados. In: FROTA, M. C. R., NASSER, L. (Org.). **Educação matemática no ensino superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM. 2009. 265p.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Process. In D. Tall. (ed.) **Advanced Mathematical Thinking**, p. 25-41. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

DUBINSKY, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall. (ed.) **Advanced Mathematical Thinking**, p. 95-123. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

LINS, R. C. O modelo teórico dos campos semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis**. Blumenau, v.1, n.7, p. 29-39, abr/jun 1994.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

NETO, T. A. Q. F.; REZENDE, W. M. Interpretações do conceito de função. **Caderno Dá Licença**, Rio de Janeiro, v. 2, n. 2, 1998. Disponível em: http://dalicenca.uff.br/projetos/caderno/. Acesso em: 6 jan. 2022.

PÊCHEUX M. O **Discurso: estrutura ou acontecimento**. 4a ed. Campinas (SP): Pontes; 2011.

PHET. **Interactive Simulations da Universidade do Colorado**. 2016. Site. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/function-builder-basics. Acesso em: 31 jan. 2022.

PICHON-RIVIÈRE, E. **O processo grupal**. São Paulo: Martins Fontes, 1988.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação de Portugal, 2009.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Cadernos do Mathema**: jogos de matemática 6º a 9º ano. Porto Alegre: Artmed, 2007.

TALL, D. (Ed.) **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

Tânia Cristina Baptista Cabral: Professora-Pesquisadora e Supervisora de Dissertação no Programa de Pós-graduação em Docência para Ciências, Tecnologias, Engenharias e Matemática, Unidade Guaíba, UERGS, vinculada à linha de pesquisa "Epistemologia e Metodologias na Formação Docente". Desenvolve pesquisa sobre ensino, aprendizagem e a formação de professores em STEM, à luz da teoria Hegel-Marx-Lacan (HML) na Educação Matemática. Filiada a Sociedades Científicas e revisora de periódicos científicos, nacionais e internacionais. Líder do grupo "Pesquisa-Ação Diferencial e Produtos Educacionais", certificado no CNPq pela UERGS. Membro do "Grupo de Estudos Seminários de Jacques Lacan". E-mails de contato: cabral.taniacb@gmail.com (preferencial) ou tania-cabral@uergs.edu.br
CVLattes: https://lattes.cnpq.br/4533258109766315 ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5955-9632 Grupo de Pesquisa no CNPq: https://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/4767711656550967

Clarice Caciani Taube: Graduada em Licenciatura em Matemática pela URI/Santo Ângelo, Especialista em Educação Matemática pela FACCAT e Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Docência para Ciências, Tecnologias, Engenharias e Matemática, Unidade Guaíba, UERGS. É professora de Matemática da rede pública municipal de São Leopoldo/RS e integrante do grupo "Pesquisa-Ação Diferencial e Produtos Educacionais". E-mail de contato: cacitaube@gmail.com
CVLattes: https://lattes.cnpq.br/8214410222894047 Grupo de Pesquisa no CNPq: https://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/4767711656550967